Eletricidade e Magnetismo - IGC

Carga Elétrica, Lei de Coulomb e Campo Elétrico

Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

Lecture Notes Prof. Cristiano

Eletrização / Magnetismo

As primeiras observações ~600 a.C. quando Tales de Mileto atritou âmbar (do grego, *elektron*), resina fóssil em lã e atraiu palha.

Mais ou menos na mesma época já se conhecia as propriedades da magnetita (Fe3O4), mas os dois fenômenos não eram diferenciados.

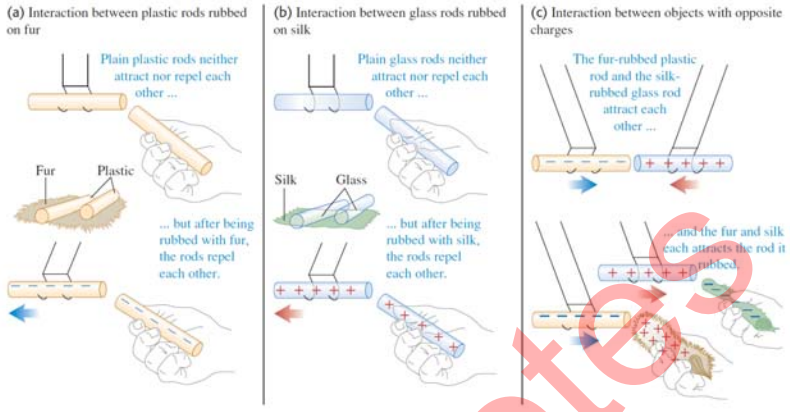
Thales de Mileto - 600 DC

Ambar atritado em jeans, atraindo papel

Dois imãs se atraindo

Eletrostática

Descreve interações entre cargas elétricas em repouso (ou quase em repouso)



Devemos ter dois tipos de cargas elétricas. Benjamin Franklin (1706-1790) sugeriu denominar carga negativa e carga positiva estas cargas geradas pelo atrito. No plastico acumulam-se ***cargas negativas*** **(-)** e no vidro, ***cargas positivas*** **(+)**

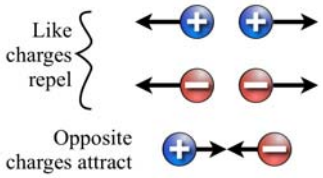
Fur -> pele ; *silk* -> seda

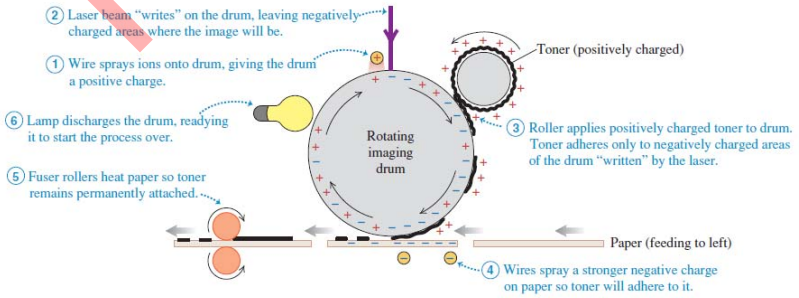
Lecture Notes Prof. Cristiano

Eletrostática

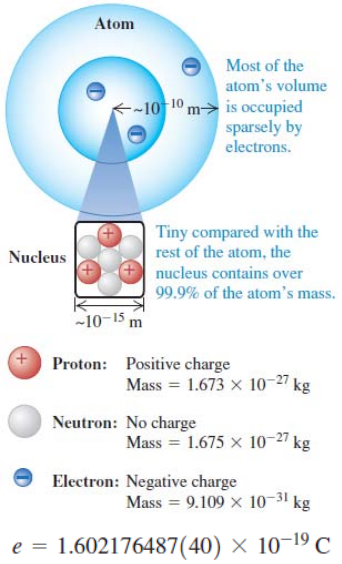
Dos resultados experimentais pode-se postular:

Duas cargas positivas se repelem e duas cargas negativas também se repelem. Existe uma atração mútua entre carga positiva ou carga negativa

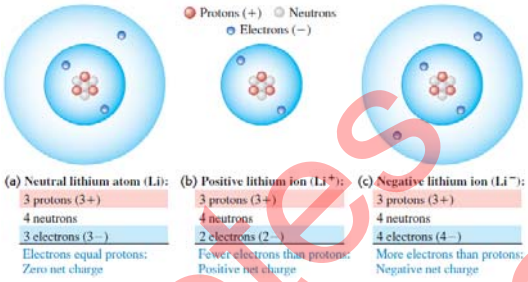




Carga elétrica / Matéria



Eletrização : aumento ou diminuição da quantidade de <u>elétrons</u> no material



Diminuição do número de elétrons: **carga positiva (+)**

Aumento do número de elétrons: **carga negativa (-)**

Série Triboelétrica

CARGA	MATERIAIS	OBSERVAÇÕES
Positiva	Pele humana seca	Grande tendência em doar elétrons e ficar altamente positiva.
	Couro	
	Pele de coelho	É muito usado na eletrização por atrito.
	Vidro	O vidro de sua tela de TV fica eletrizado e atrai pó.
	Cabelo humano	Pentear o cabelo é uma boa técnica para obtenção moderada de carga.
	Nylon	
	Lã	
	Chumbo	O chumbo retém tanta eletricidade estática quanto pele de gato.
	Pele de gato	
	Seda	
	Alumínio	Deixa escapar alguns elétrons.
	Papel	
Neutra	Algodão	A melhor das roupas "não estáticas".
	Aço	Não é usado para eletrização por atrito.
	Madeira	Atrai alguns elétrons, mas é quase neutro.
Negativa	Âmbar	
	Borracha dura	Alguns pentes são feitos de borracha dura.
	Níquel e cobre	Escovas de cobre são usadas no gerador eletrostático de Wimshurst.
	Latão e prata	
	Ouro e platina	Esses metais atraem elétrons quase tanto quanto o poliéster.
	Poliéster	Roupas de poliéster têm avidez por elétrons.
	Isopor	Muito usado em empacotamento. É bom para experimentos.
	Filme de PVC	
	Poliuretano	
	Polietileno	
	PVC	O policloreto de vinila tem grande tendência em receber elétrons.
	Teflon	Maior tendência de receber elétrons entre todos desta lista.

Lecture Notes Prof Cristiano

Carga elétrica

Apesar de não sermos capazes de dizer o que a carta elétrica propriamente é, podemos descrever suas propriedades.

Propriedades da carga elétrica:

1) Principio da ***conservação da carga elétrica*** em que a soma algébrica de todas as cargas existentes em um sistema isolado permanece sempre constante. Trata-se de uma lei de conservação *universal*, não existindo nenhuma experiência que viole este princípio

2) O módulo da carga elétrica do próton ou do elétron é ***uma unidade de carga natural (e)***. Qualquer quantidade de carga elétrica observada é sempre um múltiplo inteiro desta unidade básica. Assim a carga elétrica é ***quantizada.***

$$e = 1.602176487(40) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Depois veremos a definição da unidade Coulomb (C).

Condutores e isolantes

Condutores: Permitem a fácil migração de carga elétrica de uma região para a outra

Isolantes : impedem o movimento de cargas elétricas

Metais são bons condutores de eletricidade.

Muitos materiais não metálicos são isolantes.

Está fora do escopo deste curso a descrição de materiais chamados *semicondutores*, mas este tipo de material é a base para os diodos, transistores e chips de computador!

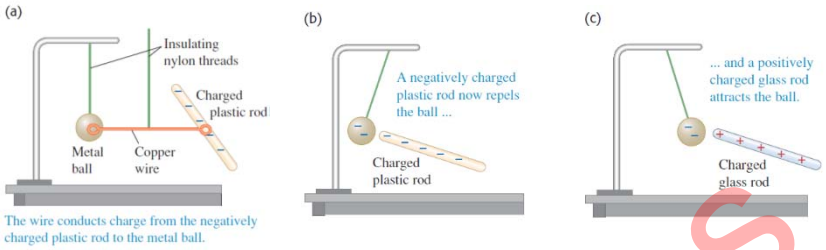
Posteriormente definiremos resistência e condutividade elétrica, que servem para a descrição da qualidade do condutor / isolante

Material	K (cal /s . cm . ° C)	
Ar seco	0,00006	Bom isolante
Lã	0,00009	
Papel	0,003	
Água	0,0014	
Vidro	0,0015	
Concreto	0,0025	
Gelo	0,0040	
Ferro	0,17	Bom condutor
Latão	0,26	
Alumínio	0,50	
Ouro	0,70	
Prata	0,97	

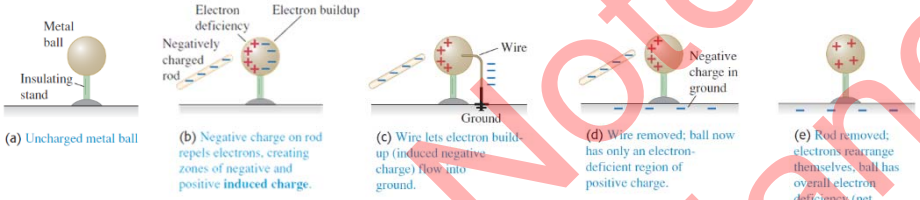
Lecture Notes Prof. Cristiano

Indução de Cargas

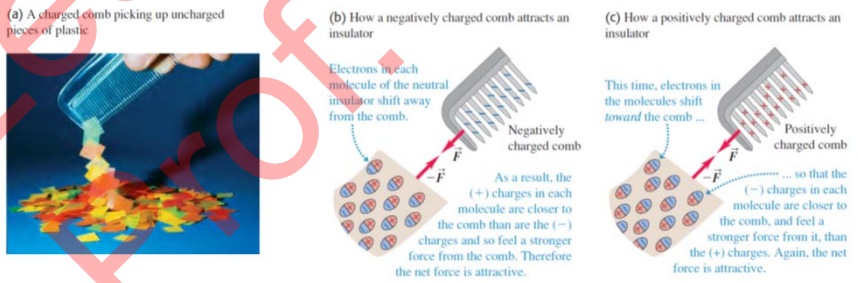
É possível eletrizar materiais pelo atrito.



Ou através da atração / repulsão de cargas. Neste caso tem-se a indução de cargas no sistema.



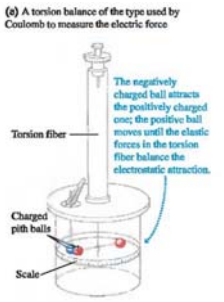
Atração por indução

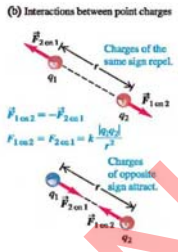


Lecture Notes Prof. Cristiano

Lei de Coulomb

Vimos que corpos carregados se atraem ou se repelem, dependendo de sua carga. No entanto, não sabemos como esta ***força elétrica*** se comporta dependendo das cargas envolvidas e da distancia entre elas.
Similarmente ao que fazemos na cinemática, podemos considerar corpos puntiformes, neste caso, cargas puntiformes para descrever esta interação.
O Físico Francês Charles Augustin de Coulomb estudou esta força de interação em 1794.
Para isso ele utilizou uma balança de torção.





Lecture Notes Prof. Cristiano

Lei de Coulomb

Lei de Coulomb

Sejam as cargas puntiformes denominadas q_1 e q_2. Coulomb obteve os seguintes resultados:

1. A força elétrica entre as cargas é proporcional à $1/r^2$
2. A força elétrica depende da carga existente em cada corpo. Para avaliar essa dependência, Coulomb dividia uma carga em duas partes iguais, fazendo o contato entre um condutor esférico carregado com outro idêntico descarregado. Assim podia obter frações da carga inicial, a saber, 1/2, 1/4, 1/8, etc.
3. Com isso ele verificou que a força elétrica entre as duas cargas q_1 e q_2 é proporcional a cada uma das cargas e portanto ao ***produto*** q_1q_2 das cargas

Assim, estabeleceu uma relação conhecida hoje como ***Lei de Coulomb***

"O módulo da força elétrica entre duas cargas puntiformes é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas"

As cargas q_1 e q_2 estão separadas por uma distancia r.
k é uma constante de proporcionalidade que depende do sistema de unidades utilizado

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

Lecture Notes Prof. Cristiano

Lei de Coulomb

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

No SI a unidade de carga elétrica é igual a um **coulomb** (1 C). Em termos desta unidade, a constante k é:

$$k = 8.987551787 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2} \cong 8.988 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

Por questões de praticidade e junção da lei de coulomb com as outras equações da eletricidade e magnetismo, no SI é comum escrever a constante k em termos da permissividade elétrica no vácuo ε_0:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8.988 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

A Lei de Coulomb assume a forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

(Coulomb's law: force between two point charges)

Lei de Coulomb

Lembre-se que a unidade fundamental de carga elétrica é dado por:

$$e = 1.602176487(40) \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Assim, 1 C equivale a uma carga existente em ~$6x10^{18}$ elétrons!

Bem... No filamento de uma lâmpada incandescente, por segundo, passam cerca de 10^{19} elétrons!

Um corpo ***carregado*** com uma carga de 1C não seria algo prático. Por exemplo, duas cargas de 1C separadas por 1m, exerceriam uma força mútua de **~10^{10}N (dez milhões de toneladas!)**

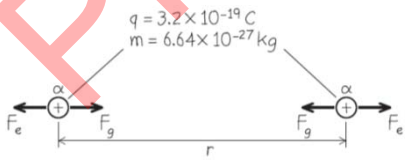
Cargas usuais referentes a elétrons livres em um sistema, giram em torno de 10^{-9}C (nC – nanocoulomb) e 10^{-6}C (μC – microcoulomb)

A lei de Coulomb é válida para ***duas*** cargas puntiformes. Quando temos um sistema de várias cargas pode-se utilizar o ***principio de superposição de forças*** para obter a força resultante. Utilizando este principio, podemos calcular a força proveniente de ***corpos extensos***.

Lecture Notes Prof. Cristiano

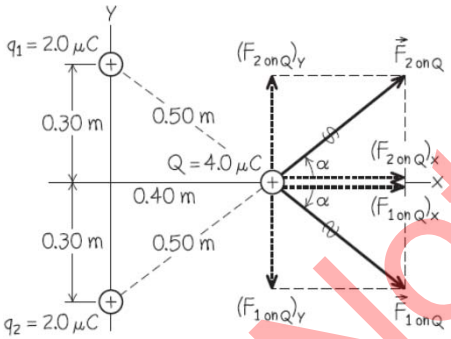
Example 21.1 **Electric force versus gravitational force**

An α particle (the nucleus of a helium atom) has mass $m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg and charge $q = +2e = 3.2 \times 10^{-19}$ C. Compare the magnitude of the electric repulsion between two α ("alpha") particles with that of the gravitational attraction between them.



Example 21.4 **Vector addition of electric forces in a plane**

Two equal positive charges $q_1 = q_2 = 2.0\ \mu C$ are located at $x = 0$, $y = 0.30$ m and $x = 0$, $y = -0.30$ m, respectively. What are the magnitude and direction of the total electric force that q_1 and q_2 exert on a third charge $Q = 4.0\ \mu C$ at $x = 0.40$ m, $y = 0$?

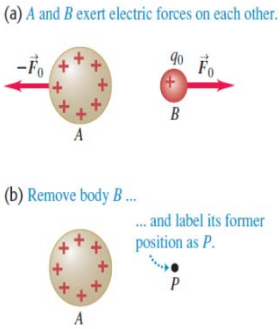


Lecture Notes Prof. Cristiano

Campo Elétrico

A interação entre cargas elétricas ocorre ***<u>à distância</u>***. Sendo assim, como é possível que uma carga perceba a presença da outra?

Uma forma de descrever esta interação é supor que, de algum modo, um corpo A possui carga elétrica que ***modifica o espaço ao redor deste corpo***. Sendo assim, ao colocarmos uma carga q_0 nesta região, esta modificação no espaço gera uma interação na nova carga, na forma de uma ***força elétrica***.



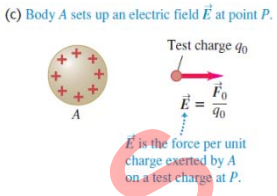
Podemos dizer que o corpo A produz um **campo elétrico** ao redor dele. Esta carga q_0 colocada nesta região sofre a ação de uma força elétrica F_0. Assim, este ***campo elétrico*** serve de intermediário para comunicar a força que o corpo A exerce sobre q_0 .

Em um caso geral, podemos dizer que ***a força elétrica sobre um corpo carregado é exercida pelo campo elétrico produzido por <u>outros</u> corpos carregados.***

Campo Elétrico

Podemos imaginar o seguinte: em um dado ponto do espaço, colocamos uma ***carga de teste q_0***.

Quando esta carga sofre a ação de uma força elétrica, concluímos que existe um campo elétrico neste ponto. Este campo é produzido por outras cargas, com exceção da própria carga ***q_0***.



A força é uma grandeza vetorial e assim o **campo elétrico também é uma grandeza vetorial, ou seja, possui módulo, direção e sentido.**

Define-se campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto como a força elétrica $\vec{F_0}$ que atua sobre uma carga ***q_0*** nesse ponto, dividida pela carga ***q_0***. Ou seja, o campo elétrico é a *força elétrica por unidade de carga*, que atua naquele ponto:

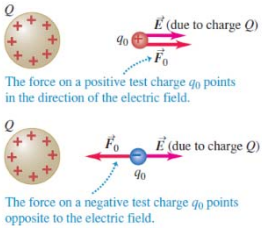
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$ (definition of electric field as electric force per unit charge)

No SI, a unidade de força é 1N e a unidade de carga é 1C, assim a unidade de campo elétrico é 1 newton por coulomb (1 N/C)

Campo Elétrico

Visto de outra forma: quando o campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto é conhecido, podemos obter a força elétrica $\vec{F_0}$ que atua sobre uma carga puntiforme ***q_0*** nesse ponto, simplesmente multiplicando a carga ***q_0*** pelo campo elétrico $\vec{E}$ produzido pelas outras cargas, com exceção da carga ***q_0*** :

$$\vec{F}_0 = q_0\vec{E}$$ (force exerted on a point charge q_0 by an electric field $\vec{E}$)



A carga ***q_0*** pode ser tanto positiva quanto negativa. Quando for positiva a força $\vec{F_0}$ que atua sobre a carga terá o mesmo sentido do campo elétrico $\vec{E}$ e quando for negativa, sentido oposto.

Essa definição de campo elétrico somente é valida para cargas pontuais no limite de ***q_0 tendendo a zero***. Isso é necessário para poder desprezar o efeito perturbador que o campo da carga de teste possa ter no sistema:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F_0}}{q_0}$$

Iremos assumir que o campo $\vec{E}$ é gerado por uma distribuição de cargas fixa!

Lecture Notes Prof. Cristiano

Campo Elétrico

Veremos métodos elegantes para o calculo de campo elétrico para distribuições de carga continuas com simetrias definidas.

Mas podemos utilizar a definição de campo elétrico para obter o campo gerado por uma carga puntiforme. Da lei de Coulomb, temos para o módulo da força,

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2}$$

Assim, da definição do campo elétrico, obtemos o módulo do campo elétrico

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2}$$

Qual a direção deste campo elétrico? Determinar isso devemos compreender a natureza da força elétrica gerada. Essa força *aponta do centro da carga elétrica geradora, para fora*, ***radialmente***. Assim utilizando ***coordenadas esféricas***, o campo elétrico estaria apontando na direção $\hat{r} = \vec{r}/r$:

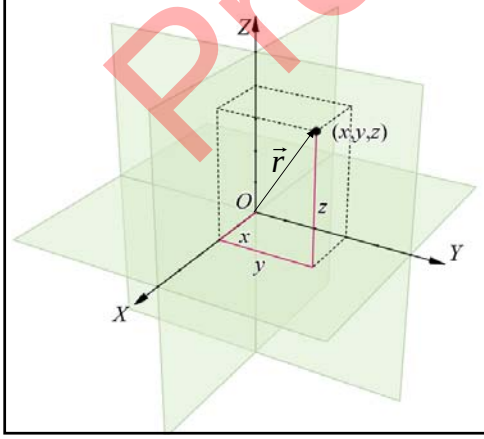
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$ (electric field of a point charge)

Sistemas de coordenadas

Cartesiano

3 eixos perpendiculares, X, Y, Z. Varrem todo o espaço 3D.

- *Vetor unitário (versor) na direção x :* $\hat{\imath}$
- *Vetor unitário (versor) na direção y :* $\hat{\jmath}$
- *Vetor unitário (versor) na direção z :* $\hat{k}$



Em uma dada posição $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

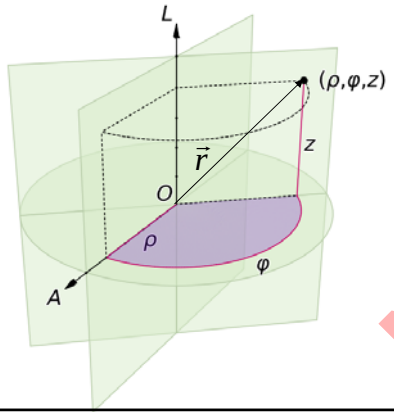
Lecture Notes Prof. Cristiano

Sistemas de coordenadas

Cilíndrico

Três coordenadas (ρ , φ, z) em ponto *P* definidos como:

- *Distancia radial (perpendicular) ρ do eixo z para o ponto P.*
- *Angulo azimutal φ definido entre uma direção de referencia no plano escolhido e a linha a partir da origem para a projeção de P neste plano*
- *A altura z, do plano de referencia escolhido até o ponto P.*



Em uma dada posição $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}(\rho, \varphi, z)$$

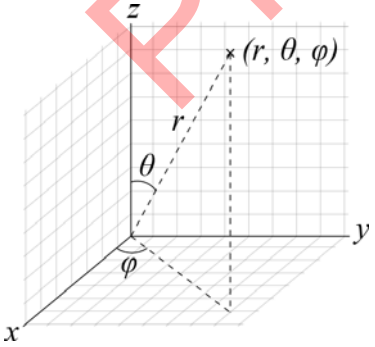
$$d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$$

Sistemas de coordenadas

Esférico

Três coordenadas (r ,θ, φ) definem um ponto *P* no espaço:

- O raio ou distancia radial ***r*** é a distancia linear da origem O ao ponto P
- A inclinação, ou Angulo polar θ é o Angulo entre a direção zenital e o segmento *OP*.
- O azimute, ou Angulo azimutal é medido entre a referencia azimutal e a projeção ortogonal do segmento *OP* no plano de referencia.



Em uma dada posição $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \varphi)$$

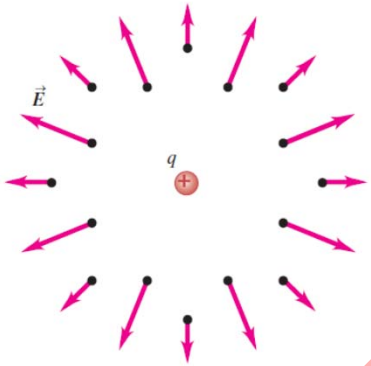
$$d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$$

Lecture Notes Prof. Cristiano

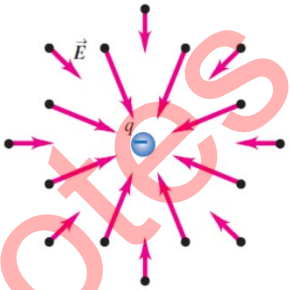
Campo Elétrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

(a) The field produced by a positive point charge points *away from* the charge.

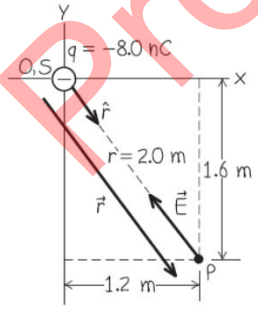


(b) The field produced by a negative point charge points *toward* the charge.



Example 21.6 **Electric-field vector for a point charge**

A point charge $q = -8.0$ nC is located at the origin. Find the electric-field vector at the field point $x = 1.2$ m, $y = -1.6$ m.

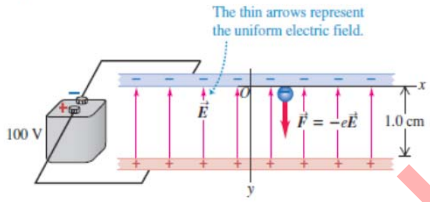


Lecture Notes Prof. Cristiano

Example 21.7 **Electron in a uniform field**

When the terminals of a battery are connected to two parallel conducting plates with a small gap between them, the resulting charges on the plates produce a nearly uniform electric field $\vec{E}$ between the plates. (In the next section we'll see why this is.) If the plates are 1.0 cm apart and are connected to a 100-volt battery as shown in Fig. 21.20, the field is vertically upward and has magnitude $E = 1.00 \times 10^4$ N/C. (a) If an electron (charge $-e = -1.60 \times 10^{-9}$ C, mass $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) is released from rest at the upper plate, what is its acceleration? (b) What speed and kinetic energy does it acquire while traveling 1.0 cm to the lower plate? (c) How long does it take to travel this distance?

21.20 A uniform electric field between two parallel conducting plates connected to a 100-volt battery. (The separation of the plates is exaggerated in this figure relative to the dimensions of the plates.)



Lecture Notes Prof. Cristiano

Cálculo de Campo Elétrico

Em casos práticos teremos cargas distribuídas ao longo de um corpo. Sendo assim, é necessário levar em conta esta distribuição de cargas na geometria do corpo.

Para compreender como fazer isso, podemos partir de um caso mais simples: uma distribuição de cargas puntiformes q_1, q_2, q_3. Para um dado ponto P no espaço cada carga puntiforme irá gerar seu respectivo campo elétrico $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2, \vec{E}_3$ ...

Assim, se colocarmos uma carga de teste q_0, ela sofre a ação de uma força resultante da ação de todos estes campos elétricos:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = q_0\vec{E}_1 + q_0\vec{E}_2 + q_0\vec{E}_3 + \cdots$$

Essa força combinada pode ser então descrita pela ação de um campo elétrico total:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

Ou seja, podemos impor o *principio da* ***superposição dos campos elétricos***.

Cálculo de Campo Elétrico

Talvez este resultado pareça óbvio, mas ele contem uma consequência muito importante. Para um corpo continuo, podemos assumir que cada elemento de volume do mesmo funcione como uma fonte pontual de carga, ou seja, teremos um elemento diferencial de campo elétrico para esse elemento de volume com carga dq na direção radial $\hat{r}$:

$$d\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Logo, para obtermos o campo elétrico

$$\vec{E}(r) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} dq$$

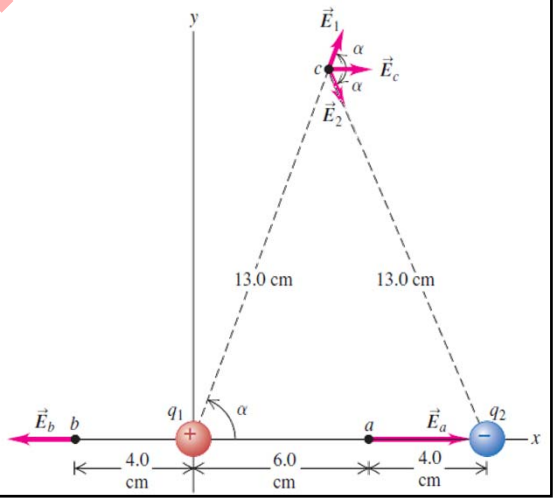
A resolução desta integral pode ser bastante complexa pois teremos uma distribuição do elemento de carga *dq* no volume do corpo. Assim, esta integral se transformará em uma integral de volume em um dado sistema de coordenadas conveniente.

Posteriormente veremos formas mais simples de calcular o campo elétrico, com a chamada ***Lei de Gauss*** bem como com o conceito de ***Potencial***.

Lecture Notes
Prof. Cristiano

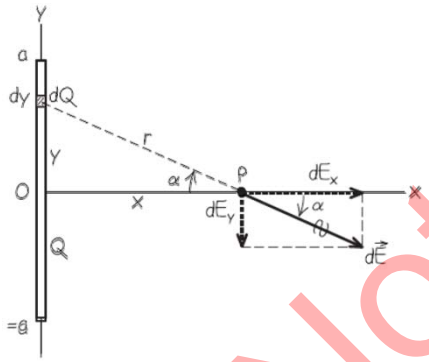
Example 21.8 **Field of an electric dipole**

Point charges $q_1 = +12$ nC and $q_2 = -12$ nC are 0.100 m apart (Fig. 21.22). (Such pairs of point charges with equal magnitude and opposite sign are called *electric dipoles*.) Compute the electric field caused by q_1, the field caused by q_2, and the total field (a) at point *a*; (b) at point *b*; and (c) at point *c*.



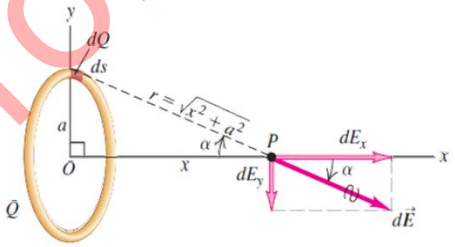
Example 21.10 **Field of a charged line segment**

Positive charge Q is distributed uniformly along the y-axis between $y = -a$ and $y = +a$. Find the electric field at point P on the x-axis at a distance x from the origin.



Example 21.9 **Field of a ring of charge**

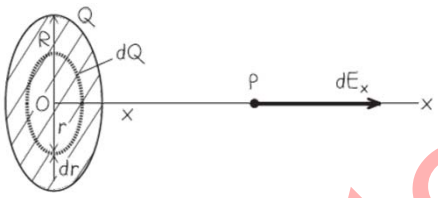
Charge Q is uniformly distributed around a conducting ring of radius a (Fig. 21.23). Find the electric field at a point P on the ring axis at a distance x from its center.



Lecture Notes
Prof. Cristiano

Example 21.11 **Field of a uniformly charged disk**

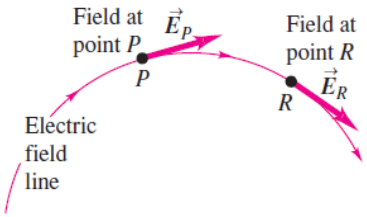
A nonconducting disk of radius R has a uniform positive surface charge density σ. Find the electric field at a point along the axis of the disk a distance x from its center. Assume that x is positive.



Linhas de Força de um Campo Elétrico

O conceito de campo pode ser bastante abstrato a primeira vista. A introdução de *linhas de campo* podem ajudar na sua compreensão.

Uma ***linha de campo elétrico*** é uma linha reta ou curva imaginária desenhada passando por uma região do espaço de modo que sua tangente em qualquer ponto forneça a direção e o sentido do campo elétrico no ponto considerado.



Lecture Notes Prof. Cristiano

Linhas de Força de um Campo Elétrico

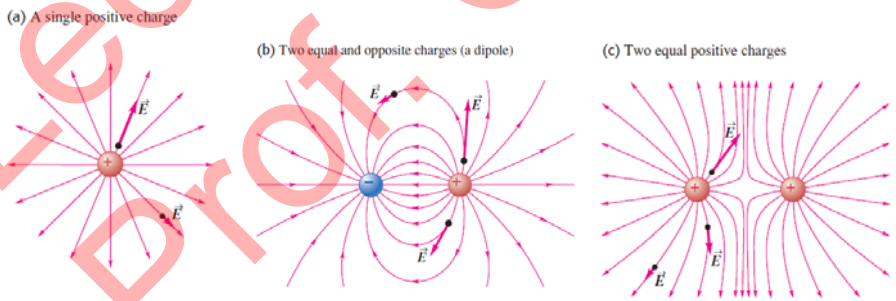
Propriedades das Linhas de Campo Elétrico:

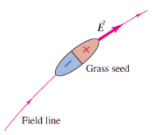
- Iniciam em uma carga positiva e finalizam em uma carga negativa
- Nunca se cruzam (*campo elétrico é único em cada ponto*)
- Estão mais próximas em regiões onde o campo é mais intenso e distanciadas onde o campo é mais fraco
- Iniciam e terminam perpendicularmente à superfície carregada (*se não fosse assim, deveria haver uma componente lateral do campo agindo*)

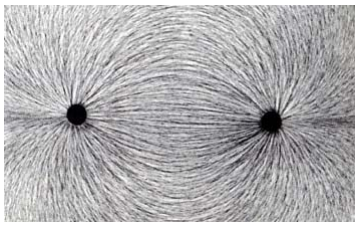
As linhas de campo são ***tridimensionais,*** mas visualizamos cortes em 2D para fins didáticos.

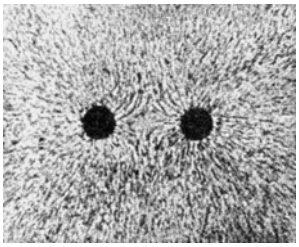
Lecture Notes Prof. Cristiano

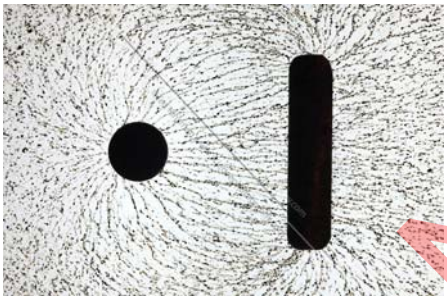
Linhas de Força de um Campo Elétrico







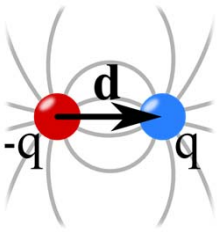




Lecture Notes
Prof. Cristiano

Dipolo Elétrico

Um caso particular muito importante é o chamado ***dipolo elétrico.*** Neste caso um par de cargas puntiformes com sinais contrários (uma carga positiva q e outra carga negativa -q) separadas por uma distância *d*



Dois pontos interessantes a considerarmos sobre dipolos elétricos são:

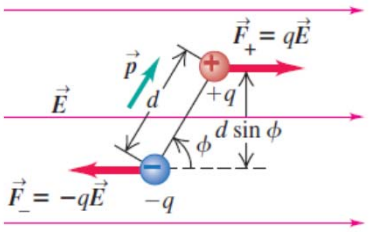
1) Qual é a força resultante e o torque exercido quando este dipolo é colocado em um campo elétrico externo?

2) Qual é o campo elétrico produzido pelo próprio dipolo?

Dipolo Elétrico

Colocamos o dipolo em um campo elétrico *uniforme* $\vec{E}$.

Ambas as forças $\vec{F}_+$e $\vec{F}_-$ possuem módulo ***qE*** e portanto, a *força resultante sobre um dipolo elétrico em um campo elétrico uniforme é zero.*



No entanto, como as forças atuam na mesma linha reta, o *torque* resultante não é zero.

Seja ϕ o ângulo entre o campo elétrico $\vec{E}$ e o eixo do dipolo. O braço da alavanca tanto para $\vec{F}_+$e $\vec{F}_-$é igual a *(d/2) sen* ϕ.

O modulo do torque tanto para $\vec{F}_+$e $\vec{F}_-$ é (qE)*(d/2) sen* ϕ. É fácil ver que ambos os torques fazem o dipolo girar no mesmo sentido. Usando a regra da mão direita, vemos que o sentido do torque é *entrando perpendicularmente na página.* Logo o módulo do torque final é o dobro dos torques individuais:

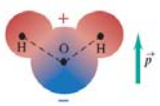
$$\tau = (qE)(d \sin \phi)$$

Lecture Notes Prof. Cristiano

Dipolo Elétrico

O produto da carga *q* pela distancia *d* é uma grandeza chamada *momento de dipolo elétrico p :*

$$p = qd$$



Unidade de p : (C.m) . p_{H20} = 6.13x10^{-20} (C.m)

Substituindo na equação anterior obtemos o módulo do torque:

$$\tau = pE \sin \phi$$ (magnitude of the torque on an electric dipole)

A distancia *d* na verdade é um vetor unindo o centro das duas cargas, $\vec{d}$.
Sendo assim, o *momento de dipolo também é um vetor* $\vec{p} = q\vec{d}$

Esta definição é extremamente útil pois permite definir o vetor torque exercido pelo campo elétrico em um dipolo pelo produto vetorial entre o momento de dipolo elétrico e o campo elétrico externo:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$ (torque on an electric dipole, in vector form)

Dipolo Elétrico – Energia Potencial

Quando o dipolo muda de direção em um campo elétrico, o torque do campo elétrico realiza um ***trabalho*** no dipolo, com uma energia potencial correspondente.

O elemento de trabalho dW feito pelo torque τ durante um deslocamento angular infinitesimal $d\phi$ é dado por $dW = \tau\, d\phi$

No nosso caso, o torque tende a ***diminuir*** o ângulo ϕ devemos escrever o torque como $\tau = -pE\ \text{sen}\ \phi$; logo

$$dW = \tau\, d\phi = -pE\sin\phi\, d\phi$$

Assim, em um deslocamento finito de ϕ_1 até ϕ_2, o trabalho total realizado sobre o dipolo será:

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE\sin\phi)\, d\phi = pE\cos\phi_2 - pE\cos\phi_1$$

Para forças conservativas, o trabalho pode ser escrito como o negativo da variação de uma energia potencial, W = U_1 – U_2 . Assim, uma definição apropriada para a energia potencial U para esse sistema é:

$$U(\phi) = -pE\cos\phi$$

Lecture Notes Prof. Cristiano

Dipolo Elétrico – Energia Potencial

$$U(\phi) = -pE\cos\phi$$

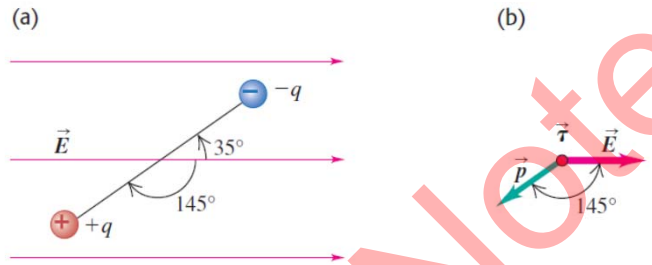
Tanto o dipolo elétrico ***p*** quanto o campo elétrico ***E*** são vetores. O resultado anterior, envolvendo os módulos destes vetores e o cosseno do ângulo entre eles nos permite utilizar o conceito de *produto escalar* $\vec{p}\cdot\vec{E} = pE\cos\phi$:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$ (potential energy for a dipole in an electric field)

Nesta equação, U tem valor mínimo U = – p E, isto é, o negativo com maior módulo, e acontece quando ϕ =0, ou seja, quando ***p*** e ***E*** são paralelos. Possui valor máximo U = + p E, uma posição de equilíbrio instável, para ϕ =π (180º). Quando ϕ =π/2 (90º) ***p*** e ***E*** são perpendiculares e U = 0.

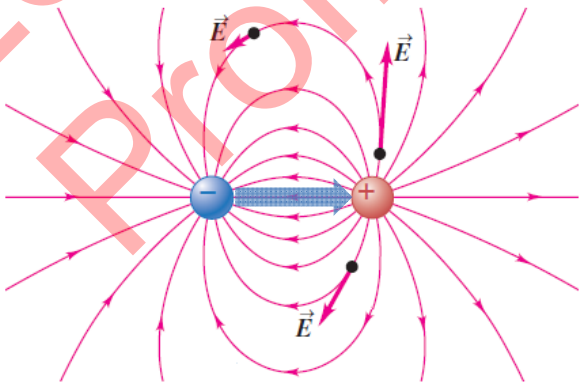
Example 21.13 **Force and torque on an electric dipole**

Figure 21.32a shows an electric dipole in a uniform electric field of magnitude 5.0×10^5 N/C that is directed parallel to the plane of the figure. The charges are $\pm 1.6 \times 10^{-19}$ C; both lie in the plane and are separated by 0.125 nm $= 0.125 \times 10^{-9}$ m. Find (a) the net force exerted by the field on the dipole; (b) the magnitude and direction of the electric dipole moment; (c) the magnitude and direction of the torque; (d) the potential energy of the system in the position shown.



Dipolo Elétrico – Campo Gerado

(b) Two equal and opposite charges (a dipole)



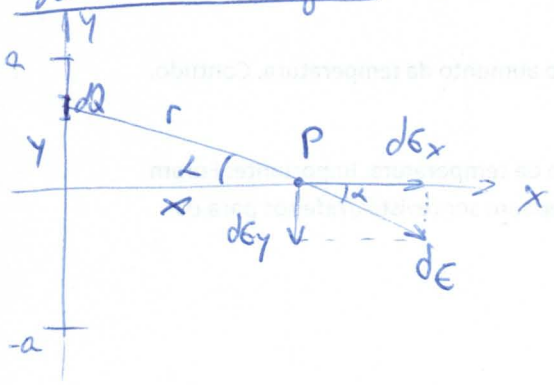
Longe do dipolo

$E \propto 1/r^3$

Lecture Notes Prof. Cristiano

Campo elétrico

Linha de carga. Q, distribuída uniformemente



densidade linear de carga λ:

$$\lambda = \frac{Q}{2a}$$

$$Q = \lambda . 2a$$

para um trecho dy, temos uma carga dQ:

$$dQ = \lambda dy = \frac{Q}{2a} dy \quad (1)$$

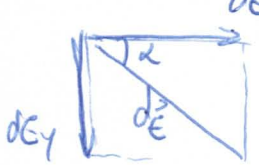
Para o elemento de carga dQ, temos no ponto P:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2}$$

a distância entre dQ e o ponto P, $r^2 = x^2 + y^2$. Logo

$$dE = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dy}{2a(x^2+y^2)}$$

Para resolvermos é preciso projetar $d\vec{E}$ nas componentes dE_y e dE_y



$$dE_x = dE \cos\alpha$$

$$dE_y = dE \operatorname{sen}\alpha$$

Da figura vemos que,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim,

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x\,dy}{2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad dE_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y\,dy}{2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para obtermos as componentes E_x e E_y devemos integrar os lados de y de $-a$ até a.

E_x

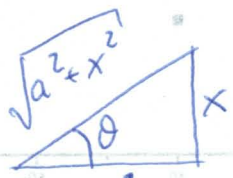
$$E_x = \int_{-a}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x\,dy}{2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{2a}\frac{1}{} \int_{-a}^{a} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

tabela integrais:

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + cte$$

Demonstração:

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = I$$



$x = a\,tg\theta$

$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$$

$$\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^3 = a^3\sec^3\theta$$

$$\int \frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{a^3\sec^3\theta\,d\theta} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta + cte$$

mas $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow I = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + cte$

aplicando em (1)

$a \to x$; $x \to y$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{2a}\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{1}{2a}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\underbrace{\left(a-(-a)\right)}_{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (3)

Tabela integrais $\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + cte$

Demonstração

$\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad u = a^2+x^2$

$du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{1}\right)u^{-1/2} + cte$

$= -\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} + cte = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + cte$

aplicando em (3)

$a \to x$; $x \to y$

$E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)(a-a) = 0$

Logo só temos campo em "x"

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,\hat{i}$$

$x >> a \to E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}$

(carga pontual)

$Q = 2a\lambda \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda 2a}{x\sqrt{x^2+a^2}}\hat{i} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{x\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}\hat{i}$ (4)

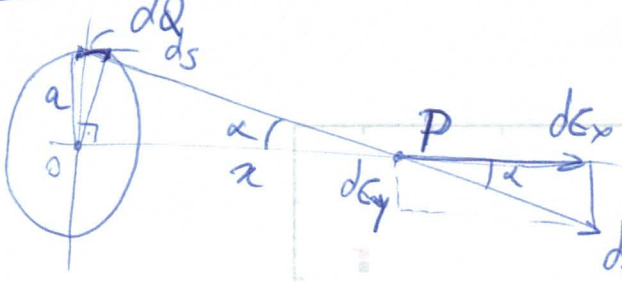
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}\hat{i}$$

p/ $a \to \infty$ (fio infinito!) $\vec{E} \to \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{i}$

pela simetria do fio, qualquer ponto à mesma distância perpendicular do fio tem o mesmo campo. Logo,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ fio infinito

Anel Carregado



$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Pela simetria do anel, vemos que as componentes de $\vec{E}$ que não são ao long de "x" se cancelam, pois sempre teremos dois pontos diametralmente opostos que fornecem componentes de $\vec{E}$ opostas. Assim, somente teremos campo ao longo de $x(\hat{i})$.

A distância do elemento de carga dQ ao ponto "P" no eixo "x" será: $r = \sqrt{a^2+x^2}$.

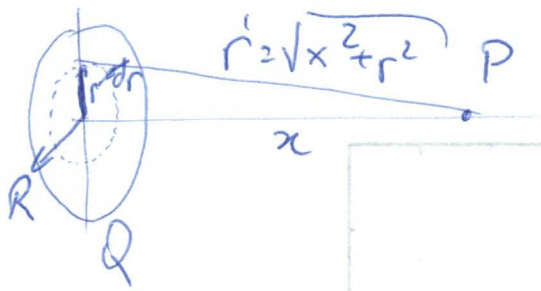
O anel tem carga Q e densidade de carga $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$
$\Rightarrow Q = \lambda \cdot 2\pi a$. O elemento de carga seria $dQ = \lambda ds$,
sendo ds o arco ao longo do anel. assim

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ\cos\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{x^2+a^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi a} ds = \frac{x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\lambda\cdot 2\pi a}\frac{}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

se $x \gg a$ $\vec{E}_x \to \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{i}$ — carga pontiforme.

Disco carregado



Disco de carga Q.

Densidade sup. de carga σ.

$$Q = \pi R^2 \sigma$$

Vamos construir o disco usando anéis concentricos. O elemento de carga em um anel de raio r e espessura dr será

$$dQ = 2\pi r \sigma dr$$

Mesmo argumento, "E" ao longo de "x"

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(2\pi\sigma r\, dr)\, x}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integramos de 0 a R

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\sigma x \int_0^R \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \left| \int \frac{x\, dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \text{cte.} \right.$$

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) \Bigg|_0^R = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \left(-\frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$$

se $R \to \infty$ (plano infinito)

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} \to 0 \quad \therefore \quad \boxed{\vec{E}_x \to \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

independente de x, ou seja, do distância ao plano.

---

2 planos infinitos

$\downarrow E_2 \mid \sigma_2 \quad E_T = 0$

$-\sigma \quad P_2$

$\mid E_1 \mid E_2 \quad E_T = E_1 + E_2$

$+\sigma \quad P_1$

$\downarrow E_3 \mid E_2 \quad E_T = 0$

$$E_T = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Logo, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} 0 & \text{acima do plano sup} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{j} & \text{entre os planos} \\ 0 & \text{abaixo do plano inf.} \end{cases}$