Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" Universidade de São Paulo

LCE0130 – Cálculo Diferencial e Integral

Taciana Villela Savian
Sala 304, pav. Engenharia, ramal 237
tvsavian@usp.br
tacianavillela@gmail.com

Funções

- **Função:** uma função f, definida em um conjunto X e tomando valores em Y, é uma correspondência que associa a cada elemento x de X um único elemento y de Y.
- O elemento y é denominado de **imagem** de x pela função f, e se denota por f(x), y=f(x).
- O conjunto X é denominado **domínio** da função.
- O conjunto de todas as possíveis imagens de elementos de X é denominado **contradomínio**.

Tipos de Funções

- Função Constantes;
- Função Linear;
- Função Afim;
- Função Quadrática;
- Função Exponencial;
- Função Logarítmica;
- Funções Trigonométricas;
- Função Modular.

Tipos de Funções

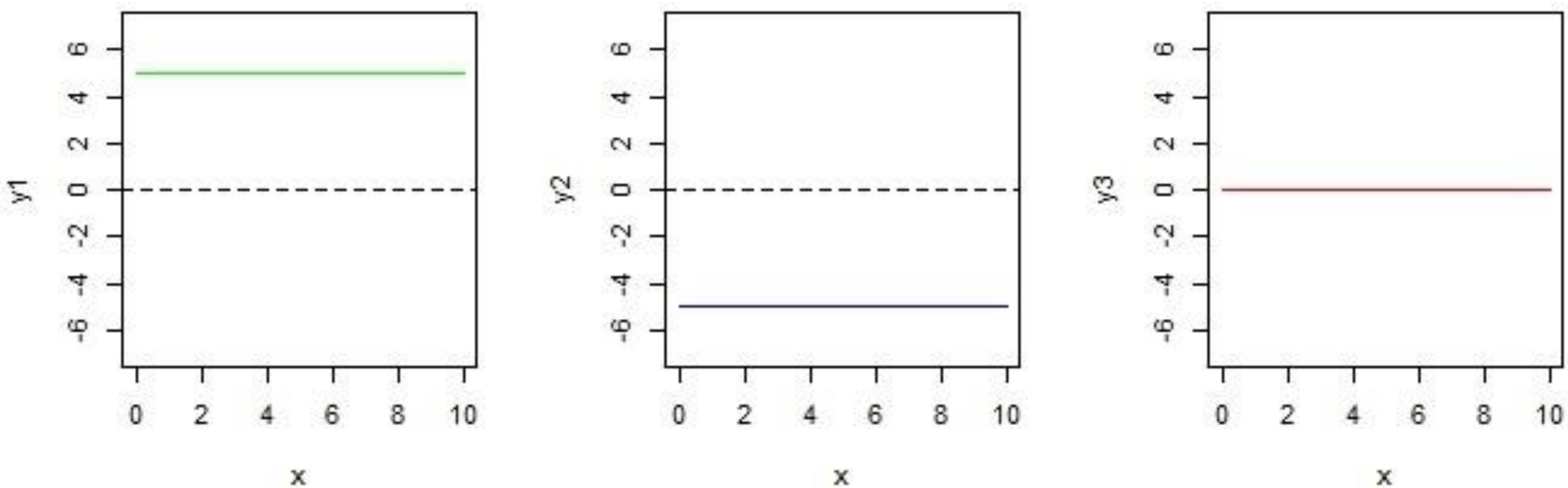
- Função Constantes $(f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R})$

Domínio da Função

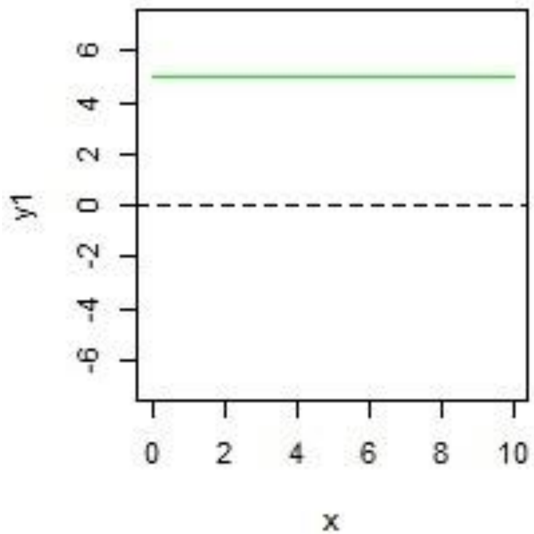
Contradomínio da Função

$$f(x) = k \quad \text{em que:} \quad k \in \mathcal{R}$$

Possibilidades: $k > 0; k < 0$ ou $k = 0$

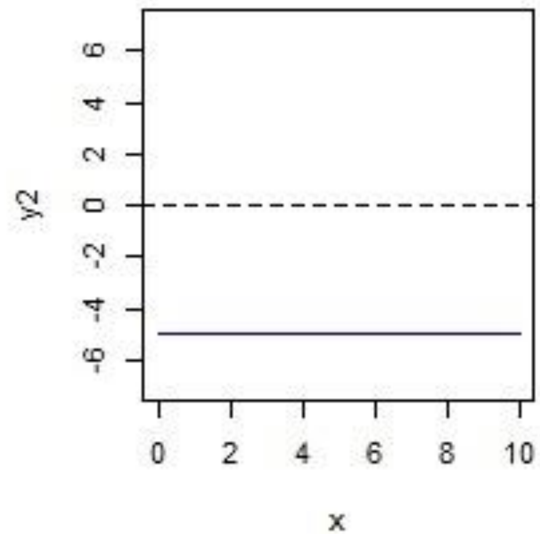


Tipos de Funções



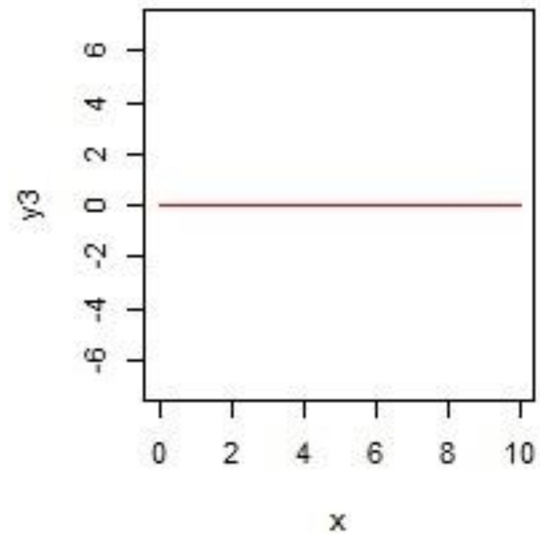
$f(x) = 5$

$D = \{\mathcal{R}\}$
$CD = \{\mathcal{R}\}$
$Im = \{5\}$
"Não admite inversa"



$f(x) = -5$

$D = \{\mathcal{R}\}$
$CD = \{\mathcal{R}\}$
$Im = \{-5\}$
"Não admite inversa"



$f(x) = 0$

$D = \{\mathcal{R}\}$
$CD = \{\mathcal{R}\}$
$Im = \{0\}$
"Não admite inversa"

Imagem = Contradomínio → Sobrejetora
$x_1 \neq x_2 \;\rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ → Injetora

Bijetora →Inversível

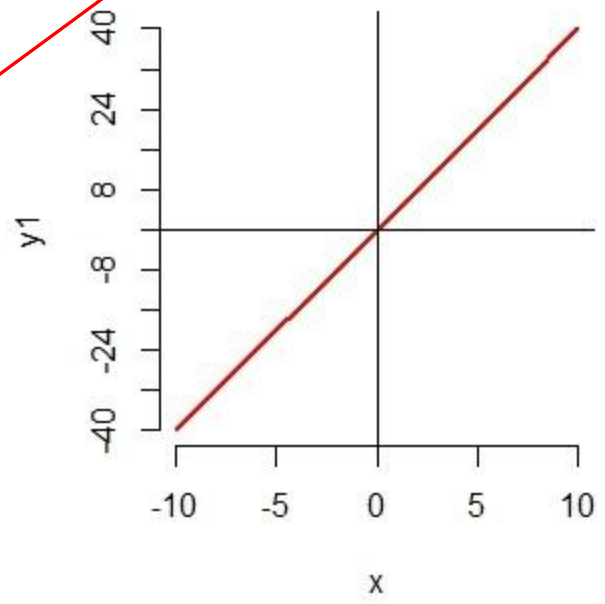
Tipos de Funções

- Função Linear ($f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$)

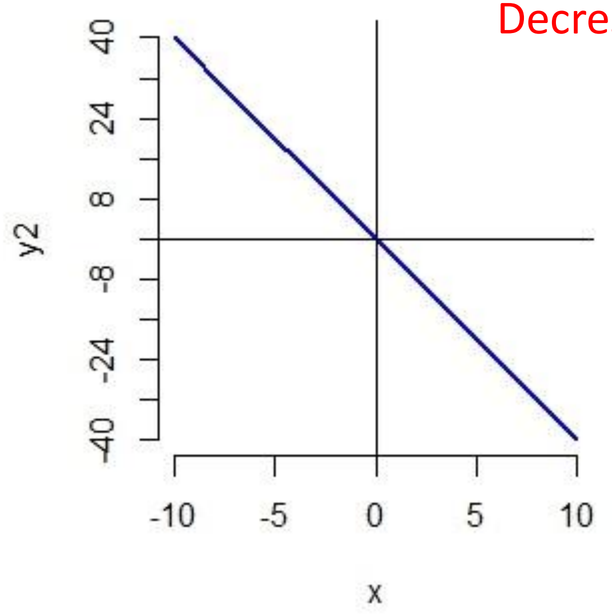
$$f(x) = kx \quad \text{em que:} \quad k \in \mathcal{R}^* = \mathcal{R} - \{0\}$$

Possibilidades: $k > 0$ ou $k < 0$

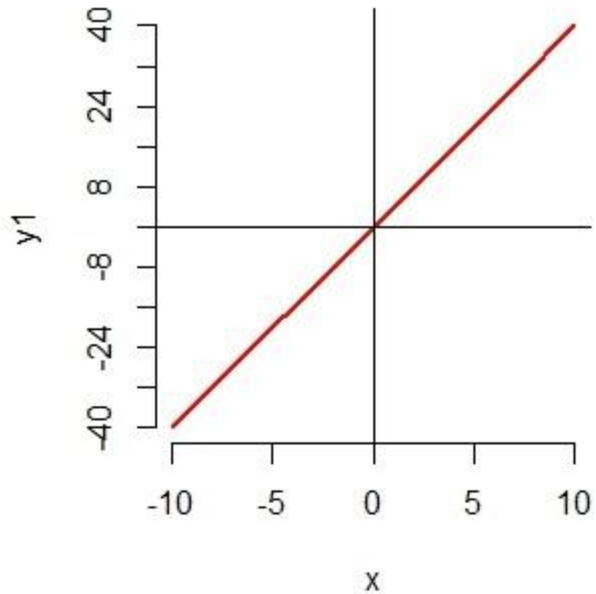
Função Crescente



Função Decrescente



Tipos de Funções



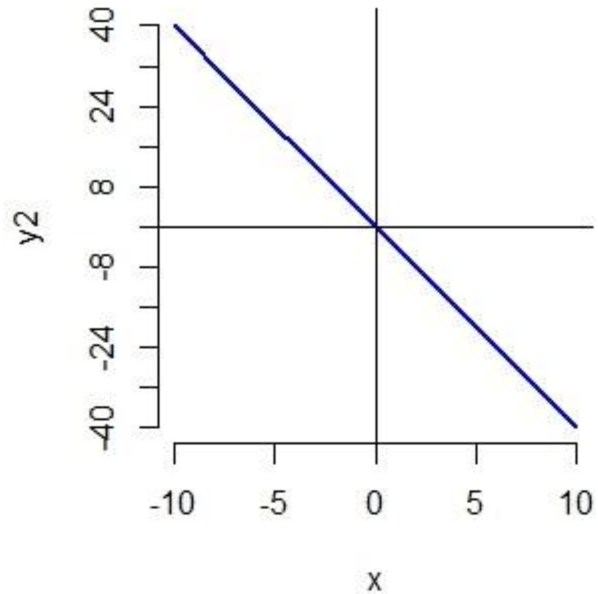
$$f(x) = 4x$$

$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\mathrm{Im} = \{R\}$$

Função Inversível



$$f(x) = -4x$$

$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\mathrm{Im} = \{R\}$$

Função Inversível

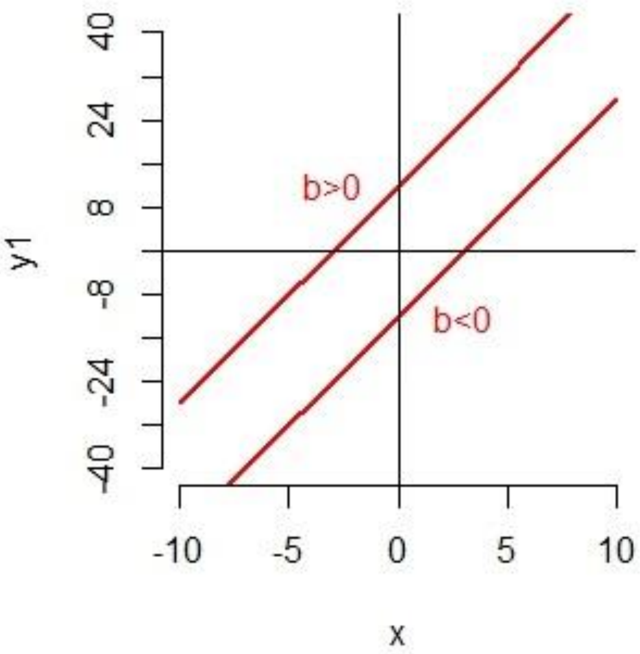
Tipos de Funções

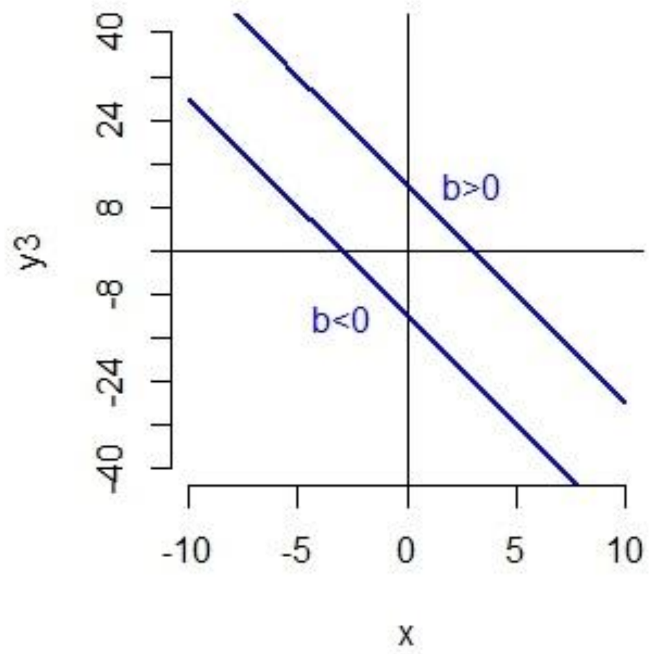
- Função Afim $\left(f : R \to R\right)$

$$f\left(x\right) = ax + b, \quad a \in R, \; b \in R, \; a \neq 0, \; b \neq 0$$

Possibilidades: **a>0 e b>0; a>0 e b<0**; **a<0 e b>0; a<0 e b<0**

a>0

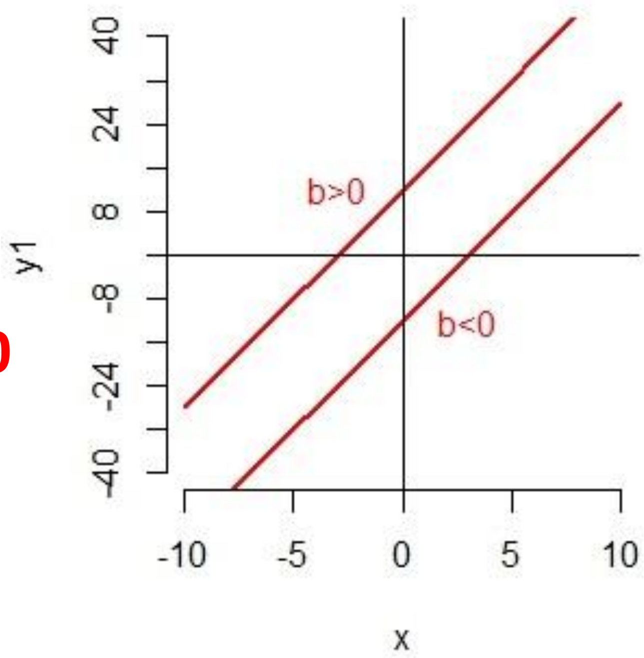


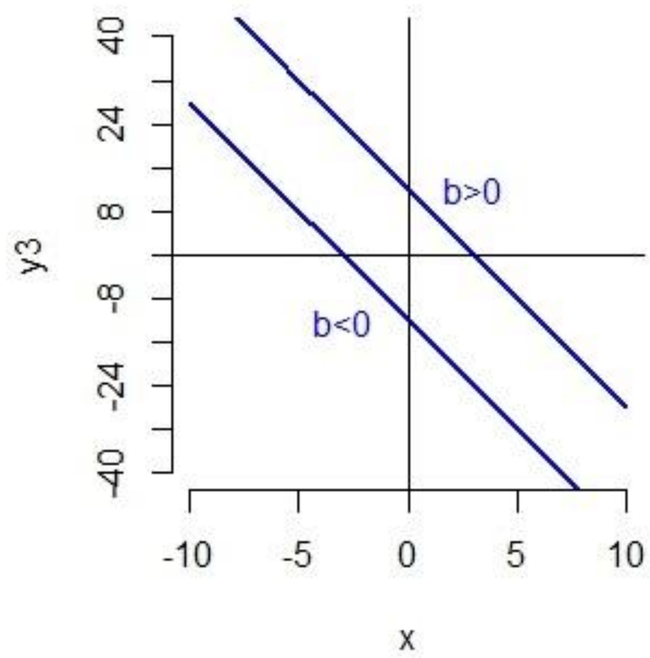


a<0

Tipos de Funções

a>0





a<0

$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\mathrm{Im} = \{R\}$$

São funções Inversíveis

Tipos de Funções

- Exemplo: Considere a função $f(x) = 5x + 3$

a=5 (função crescente, a>0)

b=3 (intercepto-y é o próprio b da função, b>0)

<u>E o intercepto-x?</u> (Qual valor de x quando y=0?)

$$f(x) = 5x + 3$$

$$0 = 5x + 3$$

$$-3 = 5x$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

Intercepto-y: P1 (0;3)

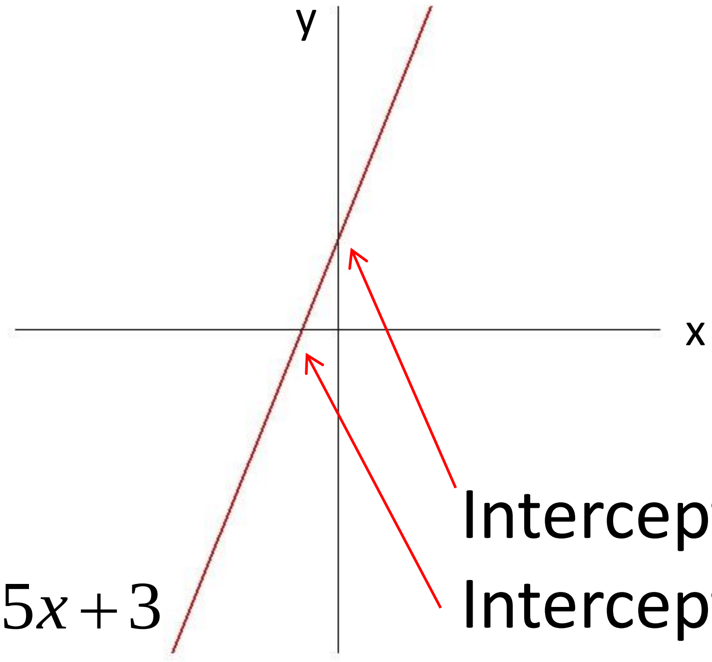
Intercepto-x: P2 (-3/5;0)

Tipos de Funções

- Exemplo: Considere a função $f(x) = 5x + 3$

a=5 (função crescente, a>0)

b=3 (intercepto-y é o próprio b da função, b>0)



Intercepto-y: P1 (0;3)

Intercepto-x: P2 (-3/5;0)

$f(x) = 5x + 3$

Tipos de Funções

- Exemplo: Considere a função $f\left(x\right) = -10x + 5$

- Identifique os coeficientes a e b;
- Obtenha os interceptos x e y;
- Faça um esboço do gráfico.

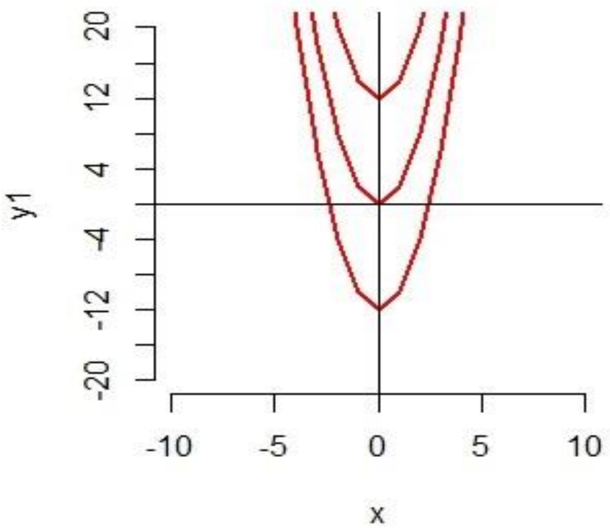
Tipos de Funções

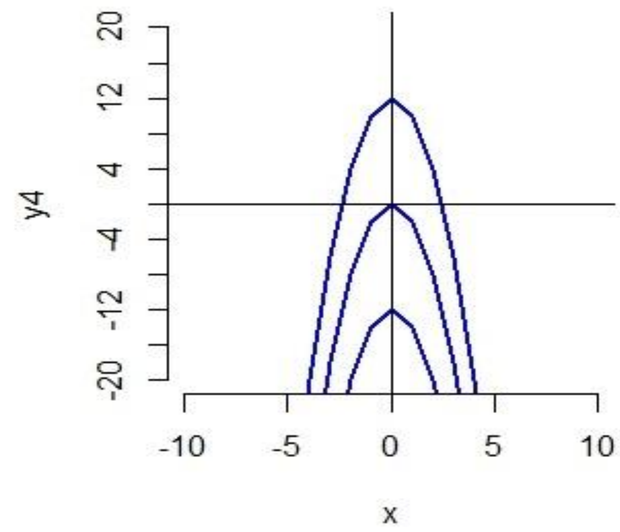
- Função Quadrática $\left(f: R \rightarrow R\right)$

$$f\left(x\right)=ax^2+bx+c,\quad a\in R,\ b\in R,\ c\in R,\ a\neq 0$$

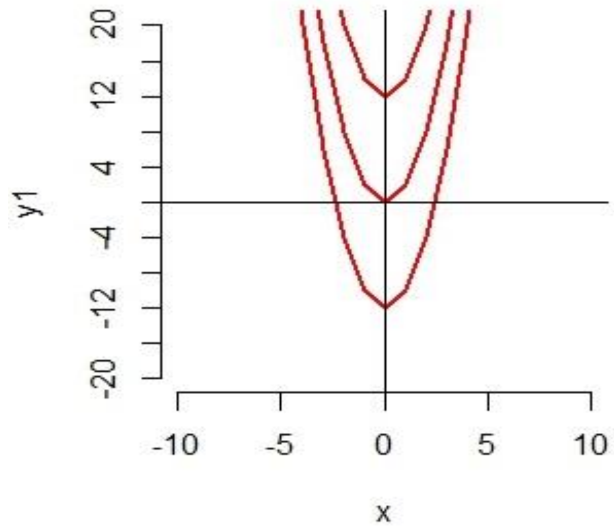
Possibilidades: **a>0 e Delta>0; Delta=0 e Delta<0**

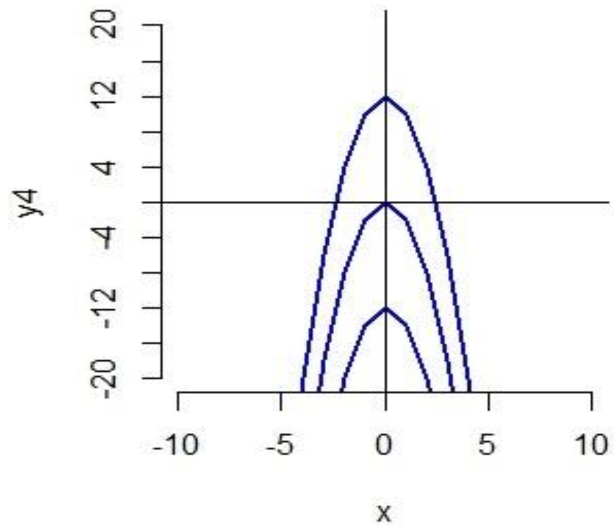
a<0 e Delta>0; Delta=0 e Delta<0





Tipos de Funções

- 



$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\text{Im} = \{depende\ y_v\}$$

São funções não Inversíveis

Tipos de Funções

- **Exemplo: Considere a função** $f(x) = x^2 - 9x + 18$

a=1 (Concavidade voltada para cima, a>0)

c=18 (Intercepto-y, quando x=0 → y=18)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 18$$

$$\Delta = 81 - 72 = 9$$ ⟶ Duas raízes (interceptos-x) → delta>0

Quem são os interceptos-x (raízes)? →Báskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{9-3}{2} = 3$$

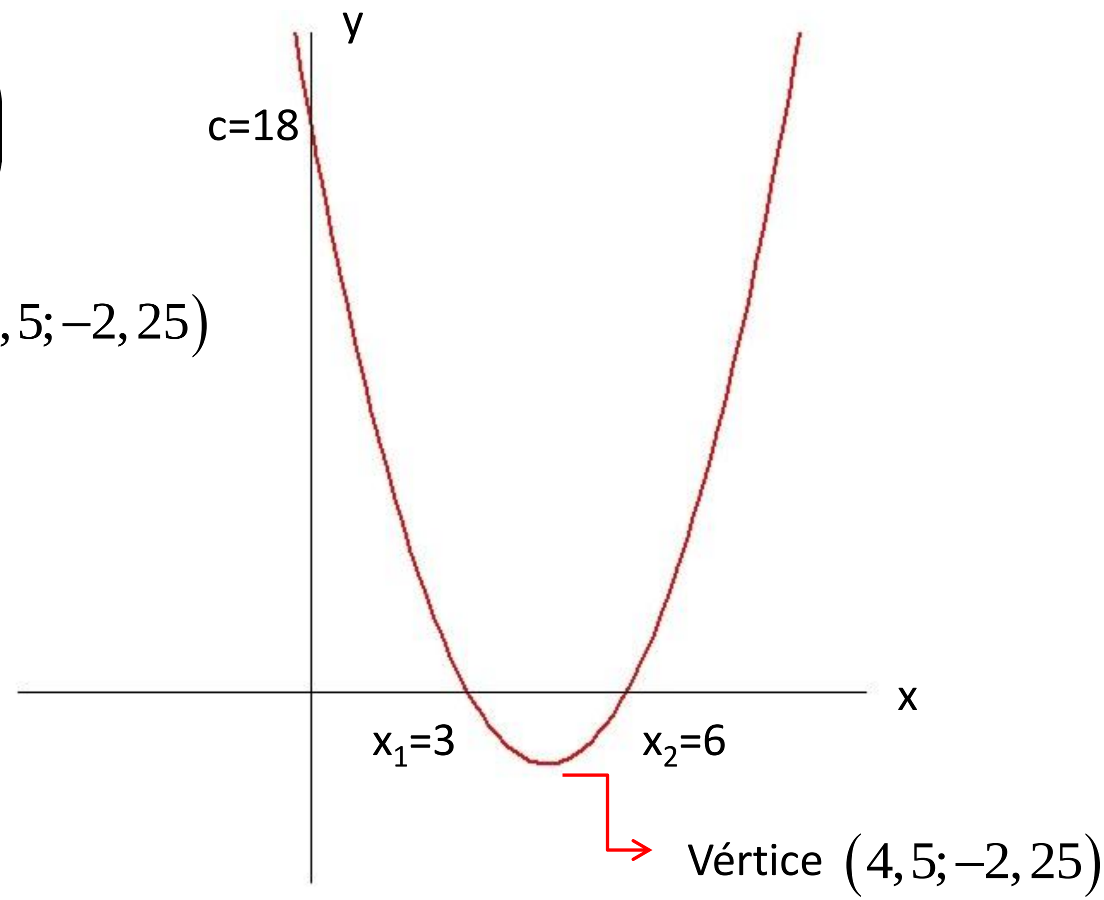
$$x_2 = \frac{9+3}{2} = 6$$

Tipos de Funções

- **Exemplo: Considere a função** $f(x) = x^2 - 9x + 18$

Vértice $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

$$\left(-\frac{-9}{2\times 1}; -\frac{9}{4\times 1}\right) = (4,5; -2,25)$$



Tipos de Funções

- **Exemplo: Considere as seguintes funções**

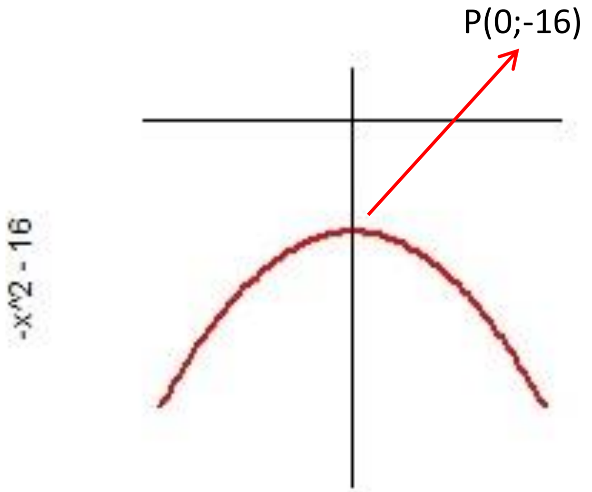
$$f(x) = -x^2 - 16$$

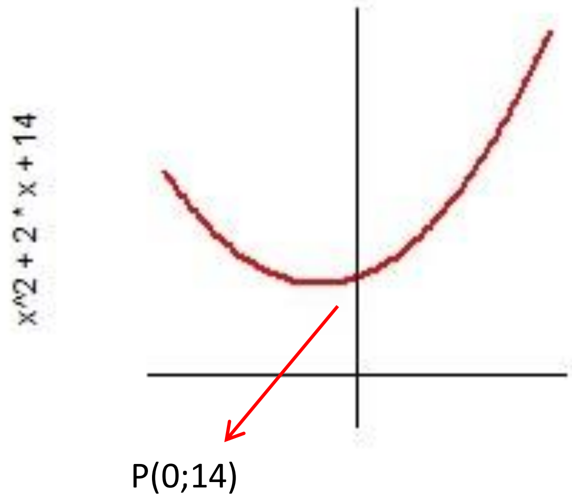
$$f(x) = x^2 + 2x + 14$$

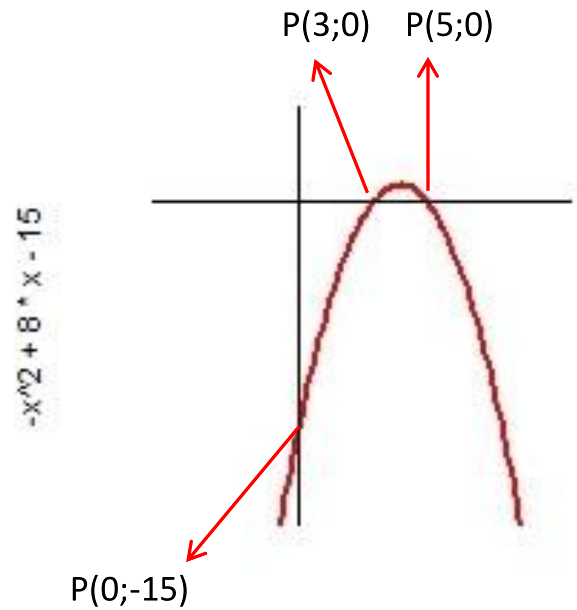
$$f(x) = -x^2 + 8x - 15$$

- **Identifique os coeficientes**
- **Obtenha os interceptos**
- **Obtenha as coordenadas do vértice**
- **Faça um esboço do gráfico**

Resolução







Tipos de Funções

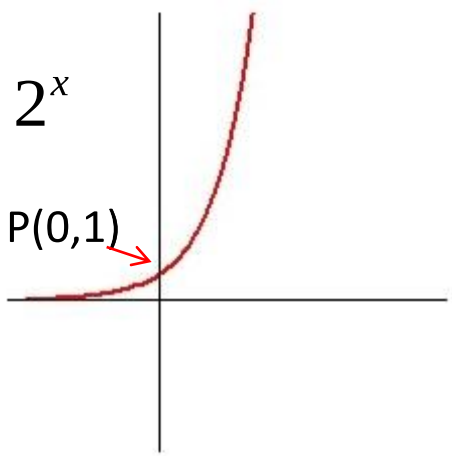
- Função Exponencial $\left(f: R \to R_+^*\right)$

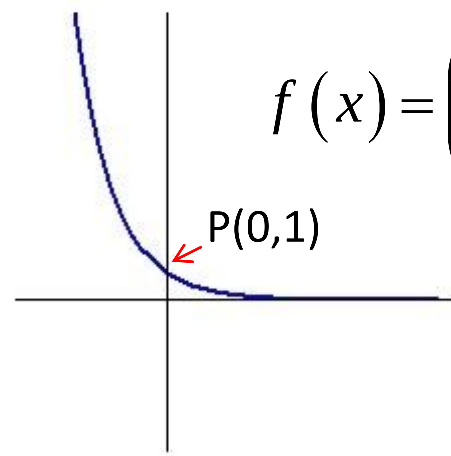
$$f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1$$

Possibilidades: **0<a<1 (função decrescente)**

a>1 (função crescente)

$$f(x) = 2^x$$





$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Tipos de Funções

- Função Exponencial $\left(f : R \to R_+^* \right)$

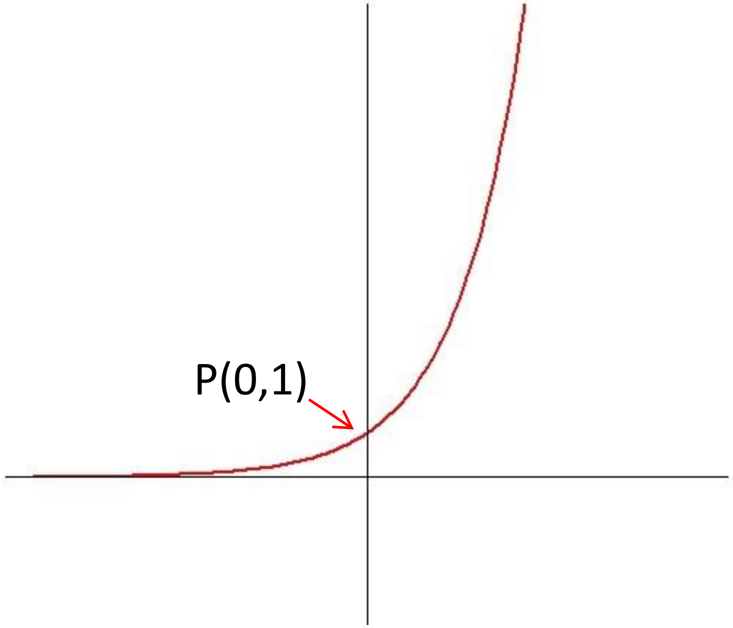
$$f\left(x\right) = a^x, \quad 0 < a \neq 1$$

Caso especial: **a=e ("e" base do logaritmo neperiano)**

a=e=2,718282....

$$f\left(x\right) = e^x = \exp\left(x\right)$$

$$f\left(x\right) = e^0 = \exp\left(0\right) = 1$$



Tipos de Funções

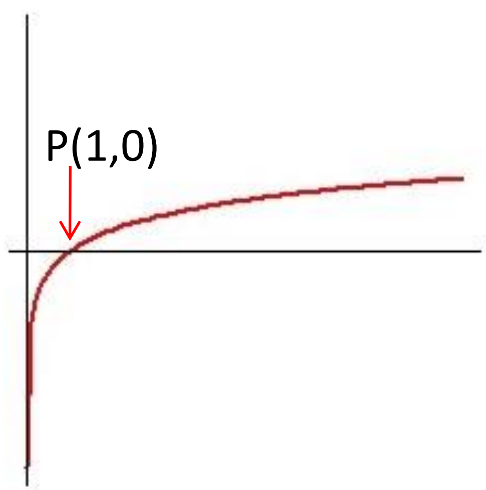
- Função Logarítmica $\left(f : R_{+}^{*} \rightarrow R \right)$

$$f\left(x\right) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

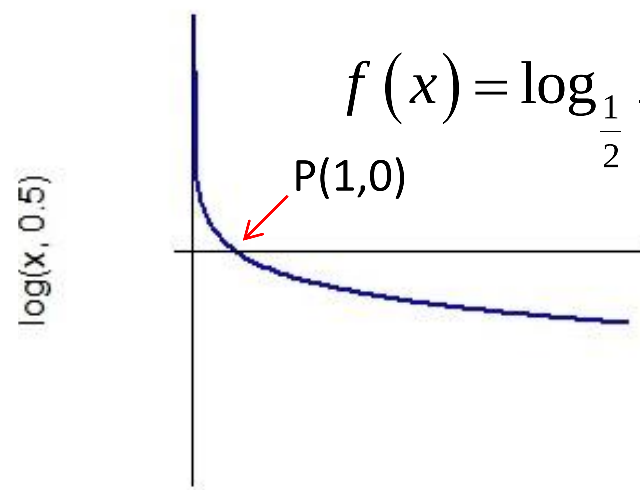
Possibilidades: **0<a<1 (função decrescente)**

a>1 (função crescente)

$$f\left(x\right) = \log_2 x$$



$$f\left(x\right) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



Tipos de Funções

- Função Logarítmica $\left(f : R_{+}^{*} \rightarrow R \right)$

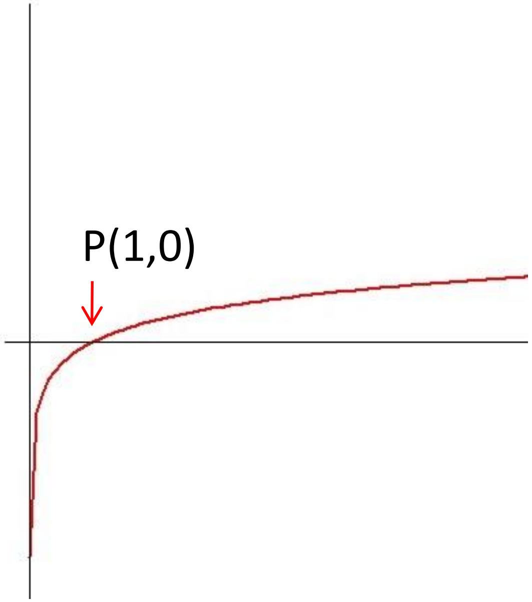
$$f\left(x\right) = \log_{a}\mathrm{x}, \quad 0 < a \neq 1$$

Caso especial: **a=e ("e" base do logaritmo neperiano)**

a=e=2,718282....

$$f\left(x\right) = \log_{e} x = \ln\left(x\right)$$

$$f\left(x\right) = \ln(1) = 0$$



Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

- As funções exponenciais são bastante utilizadas para descrever, entre outros fenômenos, o crescimento (ou decrescimento) de populações.
- A tabela a seguir contém os dados sobre a população do México no início da década de 1980.

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75 →69,13-67,38
1981	69,13	1,80 →70,93-69,13
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75 →69,13-67,38
1981	69,13	1,80 →70,93-69,13
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais. No entanto, populações habitualmente crescem mais rápido à medida que vão se tornando maiores.

Quando dividimos a população de cada ano pela população do ano anterior, obtemos:

$$\boxed{\frac{Pop.\ 1981}{Pop.\ 1980}=\frac{69{,}13}{67{,}38}=1{,}026}$$

$$\boxed{\frac{Pop.\ 1982}{Pop.\ 1981}=\frac{70{,}93}{69{,}13}=1{,}026}$$

$$\boxed{\frac{Pop.\ 1983}{Pop.\ 1982}=\frac{72{,}77}{70{,}93}=1{,}026}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75
1981	69,13	1,80
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

O fato das contas fornecerem o fator 1,026 constante mostra que a população cresce aproximadamente 2,6% entre os anos.

Quando este fator é constante dizemos que o **crescimento populacional é exponencial** e pode ser descrito por uma função do tipo:

$$\boxed{P = P_0 a^x}$$

em que: P_0 é o tamanho populacional inicial (x=0); "a" é a base da função exponencial (fator segundo a qual a população cresce quando o x cresce uma unidade; a=1,026) e x é o número de anos a partir do início das medidas (x=1 → 1981, já que x=0 → 1980).

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75
1981	69,13	1,80
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

$$a = 1 + r$$

$$a = 1 + 0,026$$

O fato das contas fornecerem o fator 1,026 constante mostra que a população cresce aproximadamente 2,6% entre os anos.

O fator a=1,026 é dado por:

$$\boxed{a = 1 + r}$$

r é a representação decimal da taxa de variação percentual.

Se r>0 temos crescimento exponencial

Se r<0 temos decrescimento exponencial.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75
1981	69,13	1,80
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

No exemplo, temos:

$$\boxed{P = P_0 a^x}$$

$$P = 67,38(1,026)^x$$

$$(\text{Pop.}1980)\ \ x = 0 \rightarrow P = 67,38(1,026)^0 = 67,38$$

$$(\text{Pop.}1981)\ \ x = 1 \rightarrow P = 67,38(1,026)^1 = 69,13$$

$$(\text{Pop.}1982)\ \ x = 2 \rightarrow P = 67,38(1,026)^2 = 70,93$$

$$\boxed{(\text{Pop.}2030)\ \ x = 50 \rightarrow P = 67,38(1,026)^{50} = 243,16}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75 →69,13-67,38
1981	69,13	1,80 →70,93-69,13
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

Em que: P_0 é o tamanho populacional inicial (x=0); *m* é a taxa de variação populacional (coeficiente angular=inclinação da reta); x é o número de anos a partir do início das medidas.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 →55,30-50,10
1981	55,30	5,20 →60,50-55,30
1982	60,50	5,20 →65,70-60,50
1983	65,70	5,20 →70,90-65,70
1984	70,90	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

Em que: P0 é o tamanho populacional inicial (x=0); m é a taxa de variação populacional (coeficiente angular=inclinação da reta); x é o número de anos a partir do início das medidas.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 →55,30-50,10
1981	55,30	5,20 →60,50-55,30
1982	60,50	5,20 →65,70-60,50
1983	65,70	5,20 →70,90-65,70
1984	70,90	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

$$\boxed{P = 50,10 + 5,2x}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 →55,30-50,10
1981	55,30	5,20 →60,50-55,30
1982	60,50	5,20 →65,70-60,50
1983	65,70	5,20 →70,90-65,70
1984	70,90	---

Admitindo que esse comportamento possa ser extrapolado ao longo dos anos, qual seria o tamanho dessa população nos dias de hoje?

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

$$\boxed{P = 50{,}10 + 5{,}2x}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 → 55,30-50,10
1981	55,30	5,20 → 60,50-55,30
1982	60,50	5,20 → 65,70-60,50
1983	65,70	5,20 → 70,90-65,70
1984	70,90	---

Admitindo que esse comportamento possa ser extrapolado ao longo dos anos, qual seria o tamanho dessa população nos dias de hoje?

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

$$\boxed{\begin{aligned} P &= 50{,}10 + 5{,}2(37) \\ P &= 242{,}5\ \ milhões \end{aligned}}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Vimos que a população do México (em milhões de habitantes) foi aproximada pela função $P=67,38(1,026)^x$, em que x é o número de anos desde 1980.

Suponha agora que, em vez de calcular a população no instante x, desejamos saber quando a população atingirá 200 milhões de habitantes, ou seja, queremos encontrar o valor de x tal que,

$$200=67,38(1,026)^x$$

Vimos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Logo, para obter x temos que usar as propriedades da função log (ou ln).

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\boxed{\begin{aligned}
&\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \\
&\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B) \\
&\ln\left(A^B\right) = B\ln(A) \\
&\ln e^x = x \\
&e^{\ln x} = x
\end{aligned}}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$\ln\left(A^B\right) = B\ln(A)$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\boxed{200 = 67{,}38(1{,}026)^x}$$

$$\frac{200}{67{,}38} = (1{,}026)^x$$

$$\ln\left(\frac{200}{67{,}38}\right) = \ln(1{,}026)^x$$

$$1{,}0879 = x\ln(1{,}026)$$

$$1{,}0879 = 0{,}0257x$$

$$x = 42 \;\; anos$$

Em 2022 (1980+42) a população do México será de aproximadamente 200 milhões de habitantes.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$\ln\left(A^B\right) = B\ln(A)$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Vamos supor que um país seja classificado como populoso quando ele ultrapassa a marca de 100 milhões de habitantes?

Quando foi (ou será) essa festa de "arromba" no México?

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$\ln\left(A^B\right) = B\ln(A)$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Vamos supor que um país seja classificado como populoso quando ele ultrapassa a marca de 100 milhões de habitantes?

Quando foi (ou será) essa festa de "arromba" no México?

Perdemos! A festa foi em 1996.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Uma função exponencial com base "a" tem a fórmula $P=P_0a^x$.

Qualquer que seja o número positivo "a" (vimos que $0 < a \neq 1$), podemos escrever como:

$$a = e^k$$

onde:

$$\ln(a) = \ln(e^k)$$

$$\ln(a) = k$$

Portanto, a função exponencial pode ser escrita como,

$$\boxed{P = P_0 a^x = P_0\left(e^k\right)^x = P_0 e^{kx}}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Portanto, a função exponencial pode ser escrita como,

$$\boxed{P = P_0 a^x = P_0 \left(e^k\right)^x = P_0 e^{kx}}$$

Se a>1 a função é crescente → k é positivo
Se 0<a<1 a função é decrescente → k é negativo

K é chamada de taxa de crescimento (ou decrescimento) contínua.

No exemplo (México) escrever a função na forma: $P = P_0 e^{kx}$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

No exemplo (México), temos:

$$P = 67,38(1,026)^x$$

Como

$$P_0 = 67,38$$

Desejamos calcular k tal que,

$$67,38(1,026)^x = 67,38(e^k)^x$$

$$1,026 = e^k$$

$$\ln(1,026) = \ln(e^k)$$

$$k = 0,0257$$

$$\boxed{P = 67,38e^{0,0257x}}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

No exemplo (México), temos:

$$\boxed{P = 67,38(1,026)^{x}}$$

Equação 1

$$\boxed{P = 67,38e^{0,0257x}}$$

Equação 2

Portanto, a taxa de crescimento anual (por unidade de tempo) de 2,6% (da equação 1, r=0,026) é equivalente à taxa de crescimento contínua de 2,57% (da equação 2).

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Exercício

A população de uma cidade é de 1.000 habitantes e cresce 5% ao ano

a) Encontre uma equação para descrever o crescimento populacional no instante t anos a partir de ano atual (2017), supondo que a taxa de 5% seja
   i. Taxa anual
   ii. Taxa anual contínua
b) Para cada um dos casos do item "a" dê uma estimativa da população da cidade daqui a 10 anos;
c) Quando a população dessa cidade atingirá a marca de 10 mil habitantes?

Resolução

A)

i) $P = P_0(a)^x = 1.000(1{,}05)^x$

ii) $P = P_0 e^{kx} = 1.000e^{0{,}05x}$

B)

i) $P = 1.000(1{,}05)^{10} = 1.629$

ii) $P = 1.000e^{0{,}05(10)} = 1.648$

C) Usando ii)

$$P = 1.000e^{0{,}05x}$$
$$10.000 = 1.000e^{0{,}05x}$$
$$x = 46$$

Em 2017+46=2063 a população atingirá a marca de 10.000 hab.