



***Escola Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo***

LCE0130 – Cálculo Diferencial e Integral

Taciana Villela Savian
Sala 304, pav. Engenharia, ramal 237
tvsvavian@usp.br
tacianavillela@gmail.com

Funções

- **Função:** uma função f , definida em um conjunto X e tomando valores em Y , é uma correspondência que associa a cada elemento x de X um único elemento y de Y .
- O elemento y é denominado de **imagem** de x pela função f , e se denota por $f(x)$, $y=f(x)$.
- O conjunto X é denominado **domínio** da função.
- O conjunto de todas as possíveis imagens de elementos de X é denominado **contradomínio**.

Tipos de Funções

- Função Constantes;
- Função Linear;
- Função Afim;
- Função Quadrática;
- Função Exponencial;
- Função Logarítmica;
- Funções Trigonométricas;
- Função Modular.

Tipos de Funções

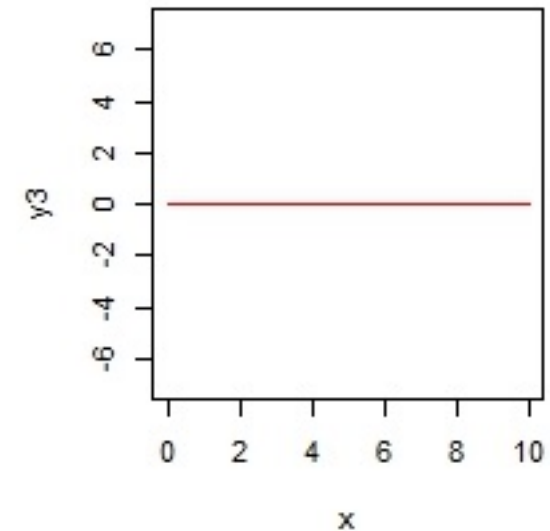
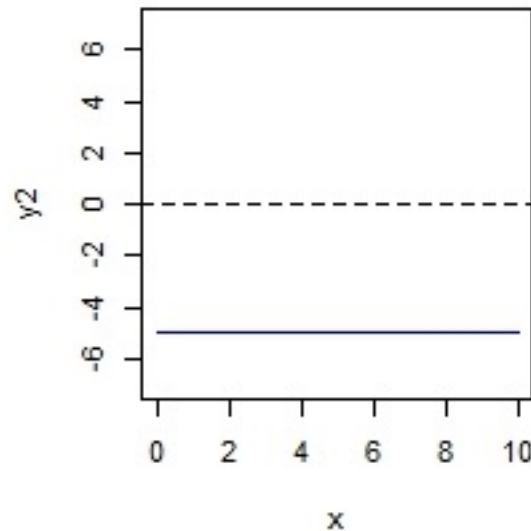
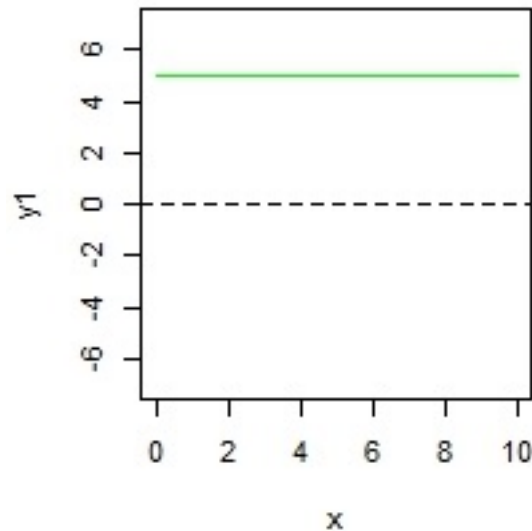
- Função Constantes ($f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$)

Domínio da
Função

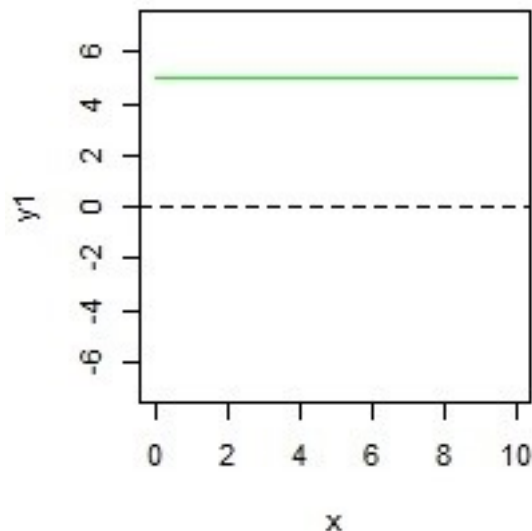
Contradomínio
da Função

$$f(x) = k \text{ em que: } k \in \mathcal{R}$$

Possibilidades: $k > 0$; $k < 0$ ou $k = 0$



Tipos de Funções



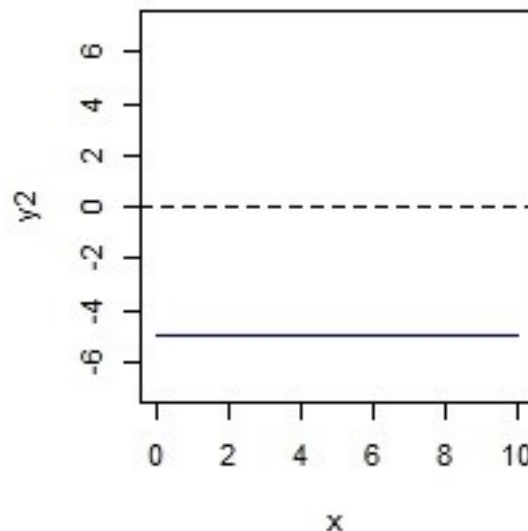
$$f(x) = 5$$

$$D = \{\mathcal{R}\}$$

$$CD = \{\mathcal{R}\}$$

$$Im = \{5\}$$

“Não admite inversa”



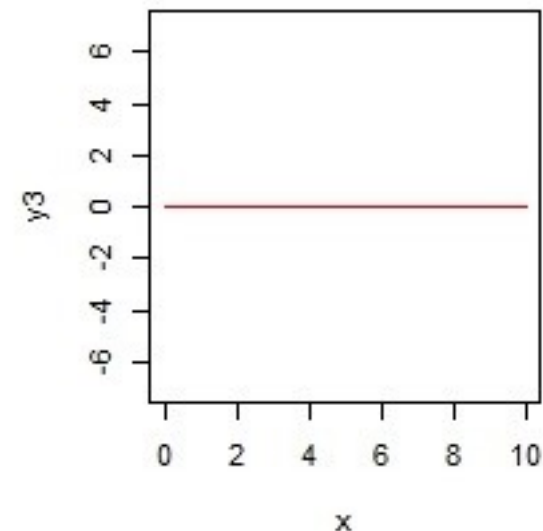
$$f(x) = -5$$

$$D = \{\mathcal{R}\}$$

$$CD = \{\mathcal{R}\}$$

$$Im = \{-5\}$$

“Não admite inversa”



$$f(x) = 0$$

$$D = \{\mathcal{R}\}$$

$$CD = \{\mathcal{R}\}$$

$$Im = \{0\}$$

“Não admite inversa”

Imagem = Contradomínio $\rightarrow$ Sobrejetora

$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow$ Injetora

Bijetora $\rightarrow$ Inversível

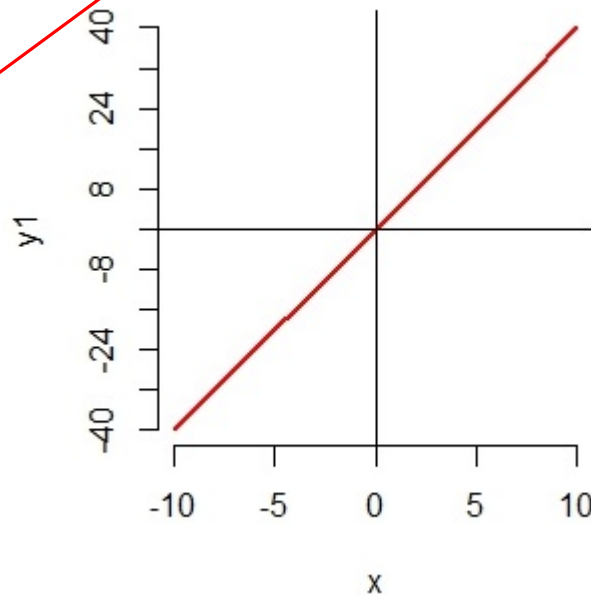
Tipos de Funções

- Função Linear ($f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$)

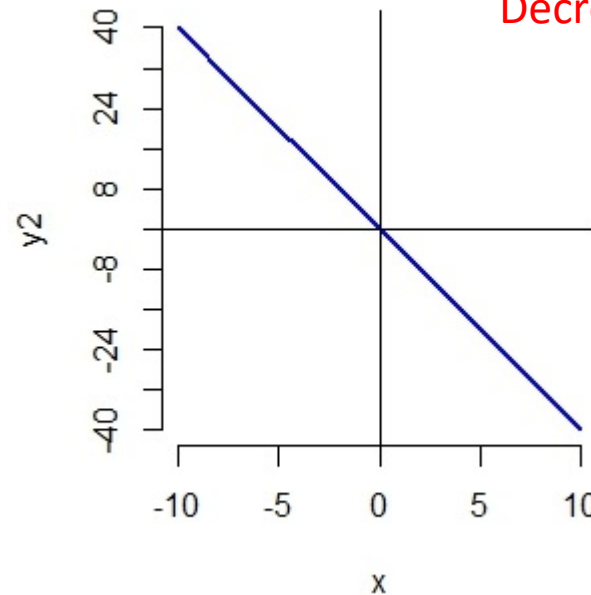
$$f(x) = kx \text{ em que: } k \in \mathcal{R}^* = \mathcal{R} - \{0\}$$

Possibilidades: $k > 0$ ou $k < 0$

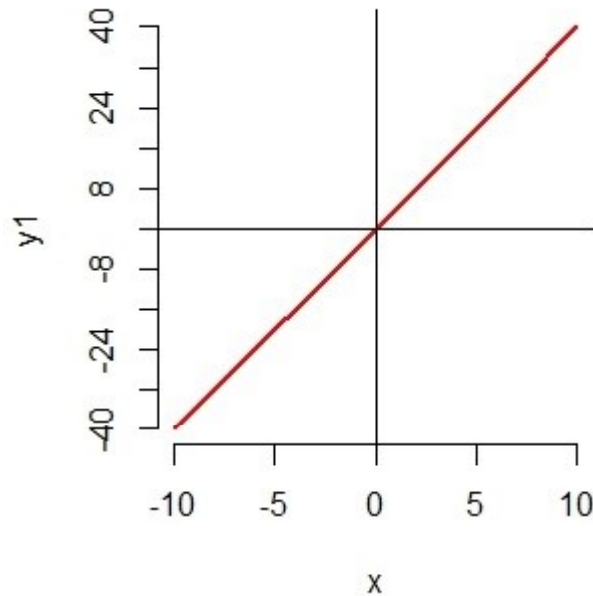
Função
Crescente



Função
Decrescente



Tipos de Funções



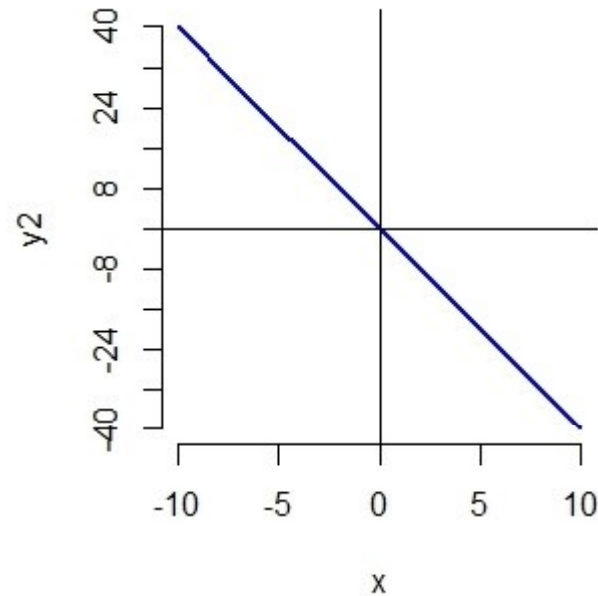
$$f(x) = 4x$$

$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\text{Im} = \{R\}$$

Função Inversível



$$f(x) = -4x$$

$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\text{Im} = \{R\}$$

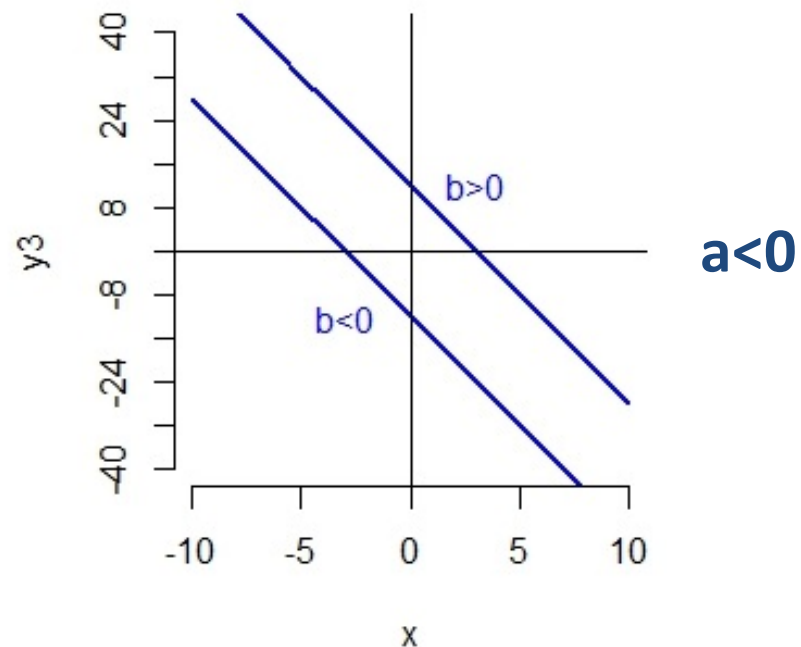
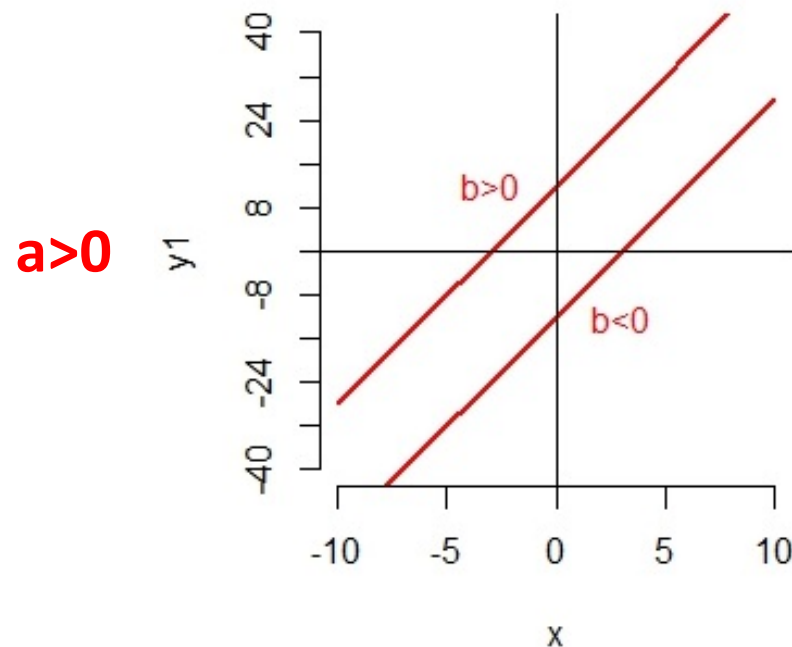
Função Inversível

Tipos de Funções

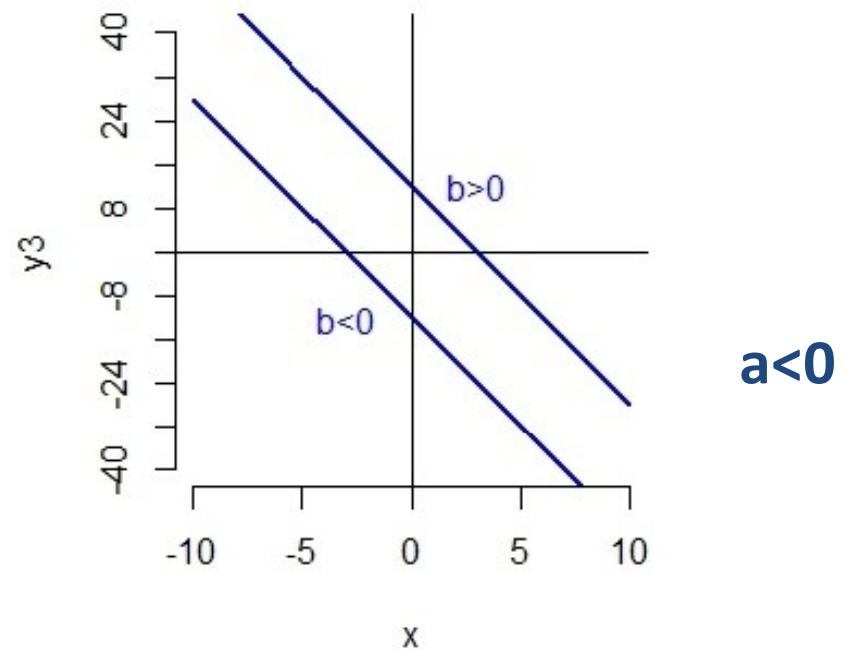
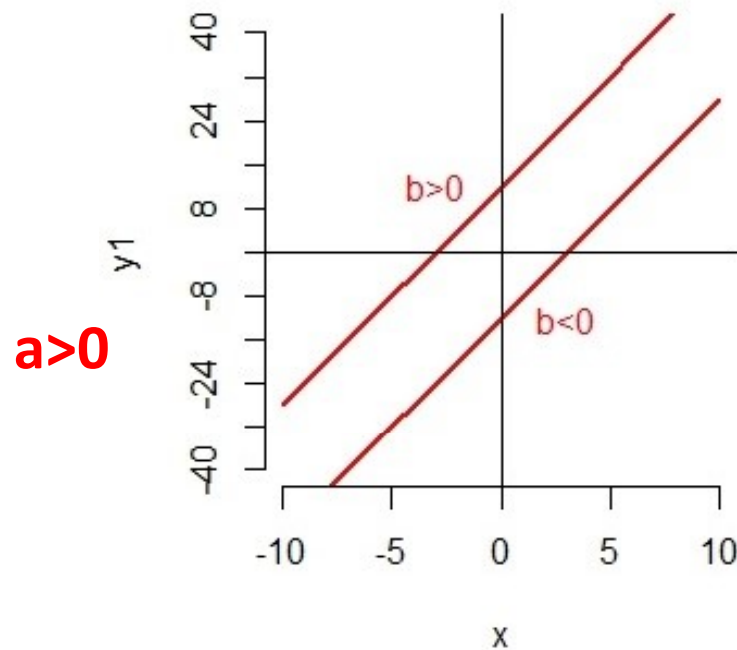
- Função Afim ($f : R \rightarrow R$)

$$f(x) = ax + b, \quad a \in R, \quad b \in R, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

Possibilidades: $a > 0$ e $b > 0$; $a > 0$ e $b < 0$; $a < 0$ e $b > 0$; $a < 0$ e $b < 0$



Tipos de Funções



$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\text{Im} = \{R\}$$

São funções Inversíveis

Tipos de Funções

- Exemplo: Considere a função $f(x) = 5x + 3$

$a=5$ (função crescente, $a>0$)

$b=3$ (intercepto-y é o próprio b da função, $b>0$)

E o intercepto-x? (Qual valor de x quando $y=0$?)

$$f(x) = 5x + 3$$

$$0 = 5x + 3$$

$$-3 = 5x$$

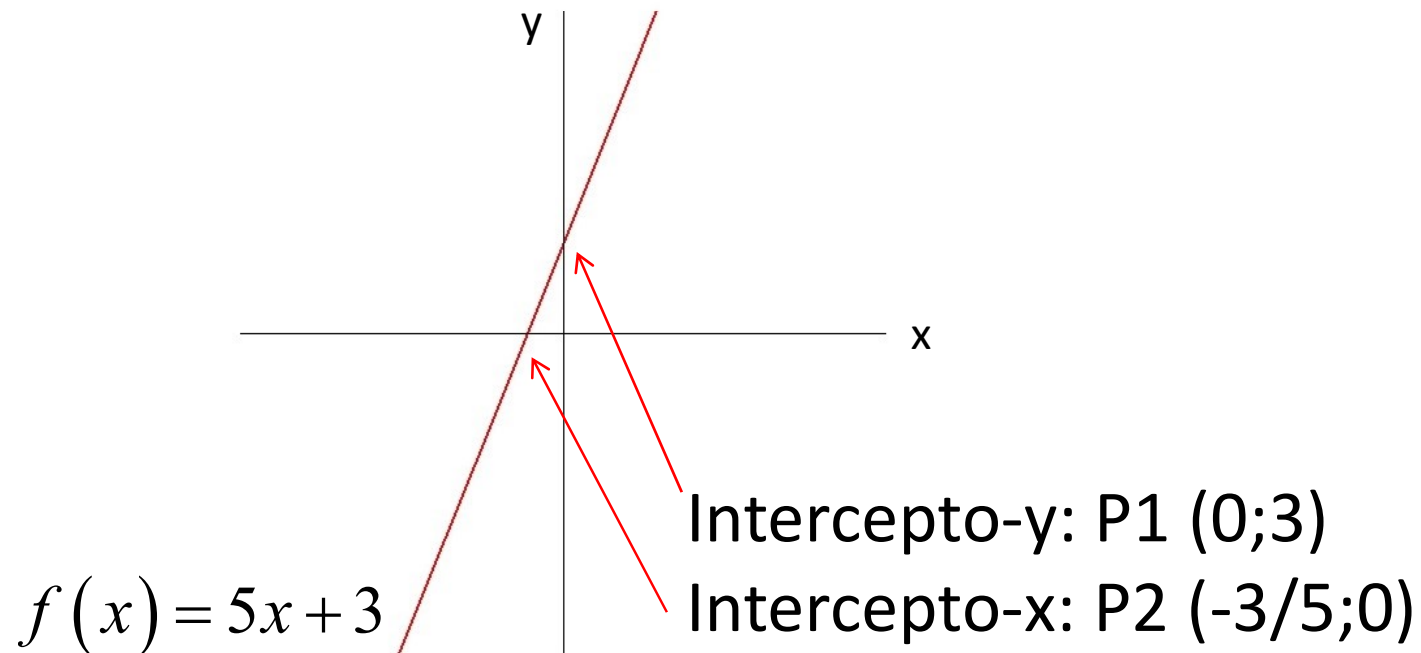
$$x = -\frac{3}{5}$$

Intercepto-y: P1 (0;3)

Intercepto-x: P2 (-3/5;0)

Tipos de Funções

- Exemplo: Considere a função $f(x) = 5x + 3$
 $a=5$ (função crescente, $a>0$)
 $b=3$ (intercepto-y é o próprio b da função, $b>0$)



Tipos de Funções

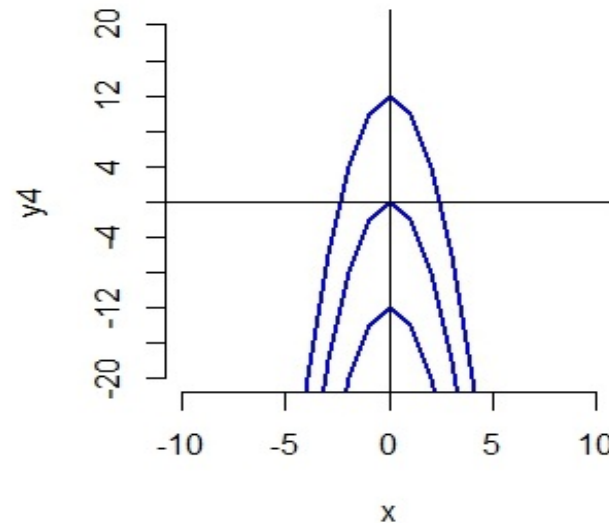
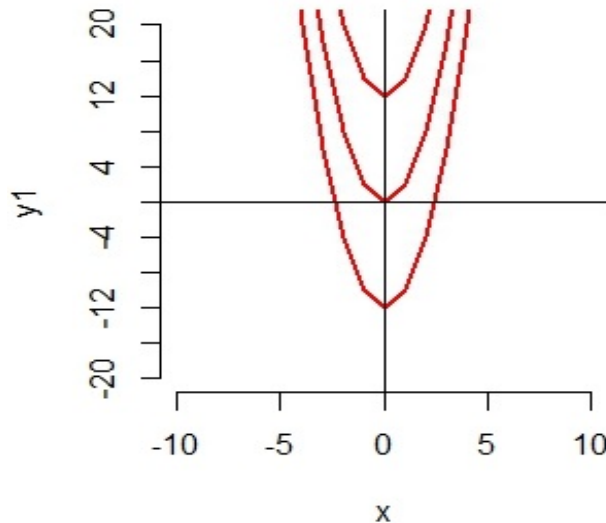
- Exemplo: Considere a função $f(x) = -10x + 5$
 - Identifique os coeficientes a e b;
 - Obtenha os interceptos x e y;
 - Faça um esboço do gráfico.

Tipos de Funções

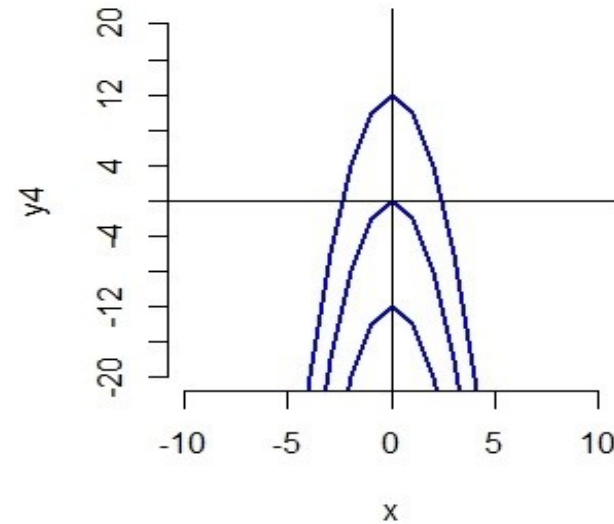
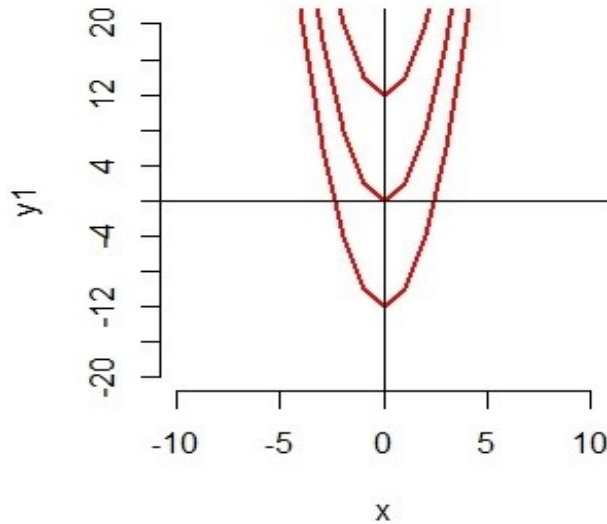
- Função Quadrática ($f : R \rightarrow R$)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \in R, \quad b \in R, \quad c \in R, \quad a \neq 0$$

Possibilidades: **$a > 0$ e $\Delta > 0$; $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$**
 $a < 0$ e $\Delta > 0$; $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$



Tipos de Funções



$$D = \{R\}$$

$$CD = \{R\}$$

$$\text{Im} = \{\text{depende } y_v\}$$

São funções não
Inversíveis

Tipos de Funções

- **Exemplo: Considere a função** $f(x) = x^2 - 9x + 18$

a=1 (Concavidade voltada para cima, a>0)

c=18 (Intercepto-y, quando x=0 → y=18)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 18$$

$$\Delta = 81 - 72 = 9 \longrightarrow \text{Duas raízes (interceptos-x) } \rightarrow \text{delta} > 0$$

Quem são os interceptos-x (raízes)? → Báskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{9-3}{2} = 3$$

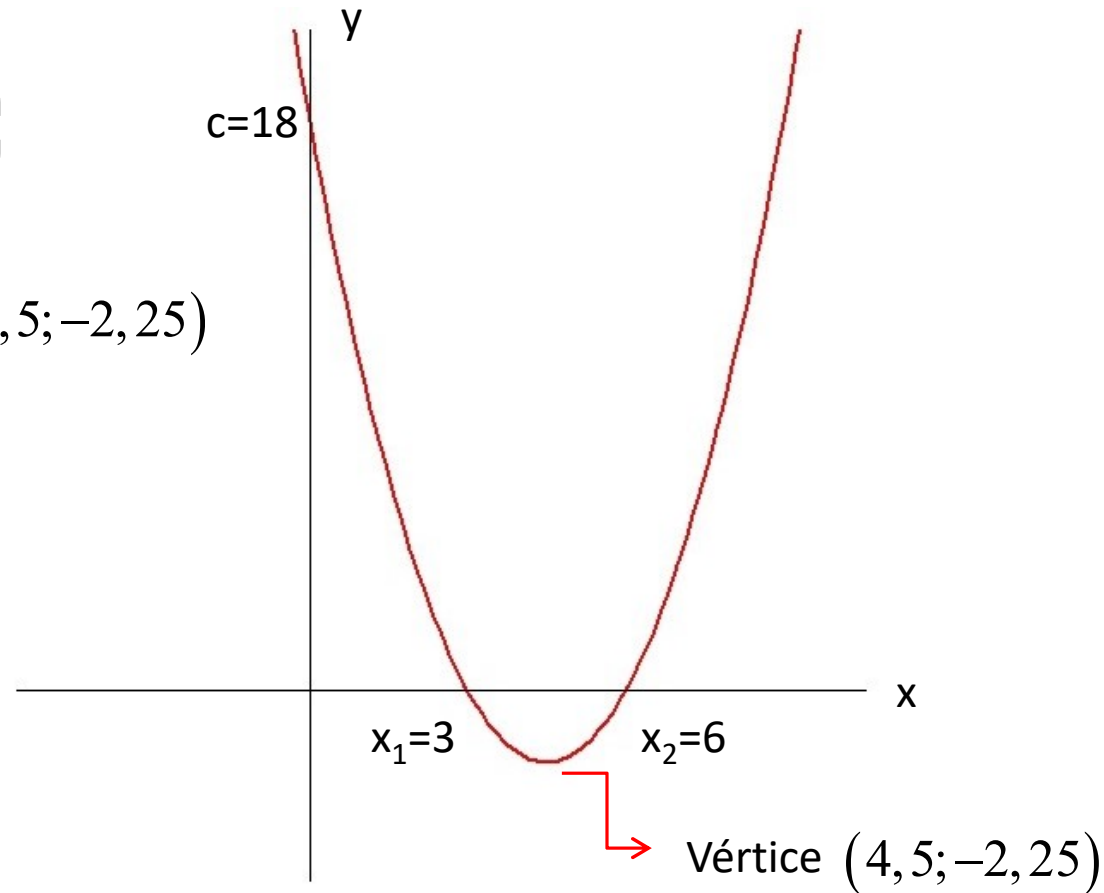
$$x_2 = \frac{9+3}{2} = 6$$

Tipos de Funções

- Exemplo: Considere a função $f(x) = x^2 - 9x + 18$

$$\text{Vértice} \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$\left(-\frac{-9}{2 \times 1}; -\frac{9}{4 \times 1} \right) = (4,5; -2,25)$$



Tipos de Funções

- **Exemplo: Considere as seguintes funções**

$$f(x) = -x^2 - 16$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 14$$

$$f(x) = -x^2 + 8x - 15$$

- **Identifique os coeficientes**
- **Obtenha os interceptos**
- **Obtenha as coordenadas do vértice**
- **Faça um esboço do gráfico**

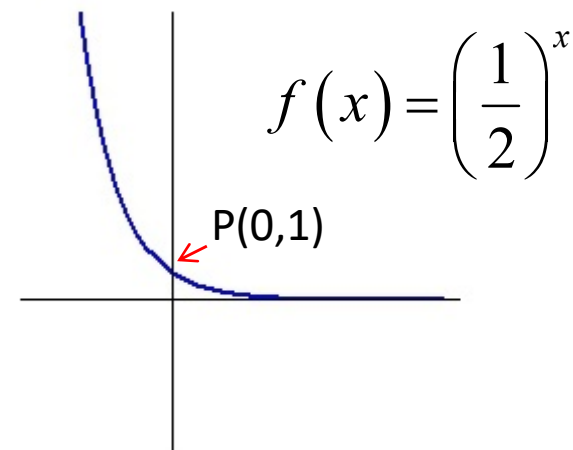
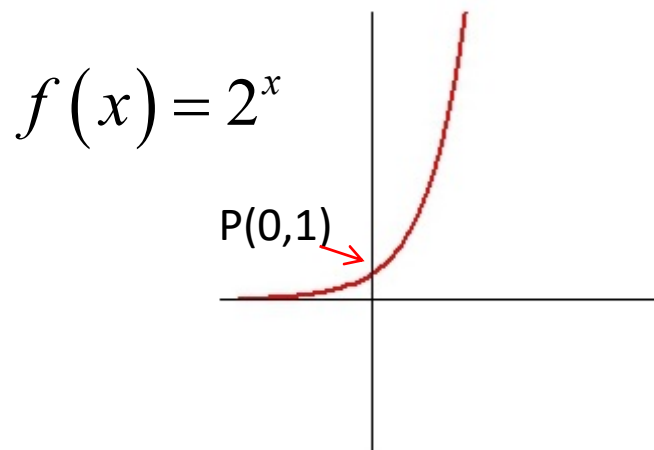
Tipos de Funções

- Função Exponencial $(f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1$$

Possibilidades: **$0 < a < 1$ (função decrescente)**

$a > 1$ (função crescente)



Tipos de Funções

- Função Exponencial $(f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$

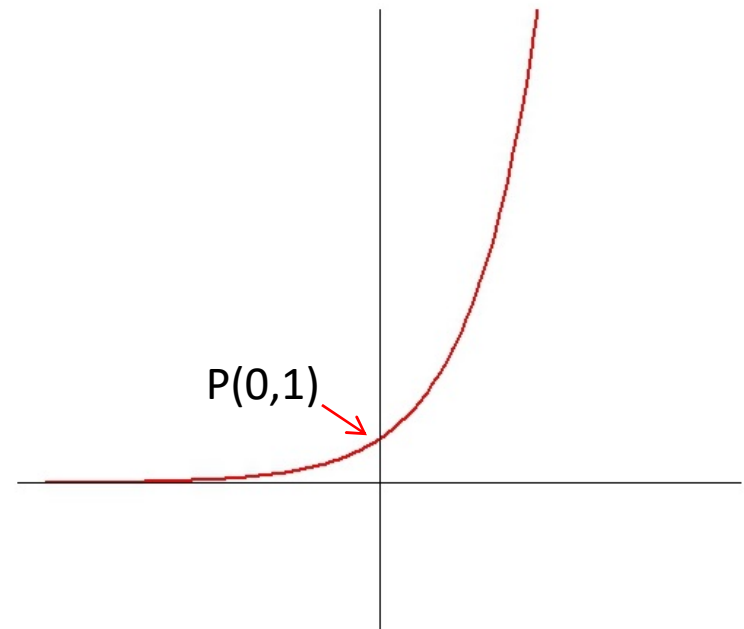
$$f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1$$

Caso especial: **a=e (“e” base do logaritmo neperiano)**

$$\mathbf{a=e=2,718282....}$$

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

$$f(x) = e^0 = \exp(0) = 1$$



Tipos de Funções

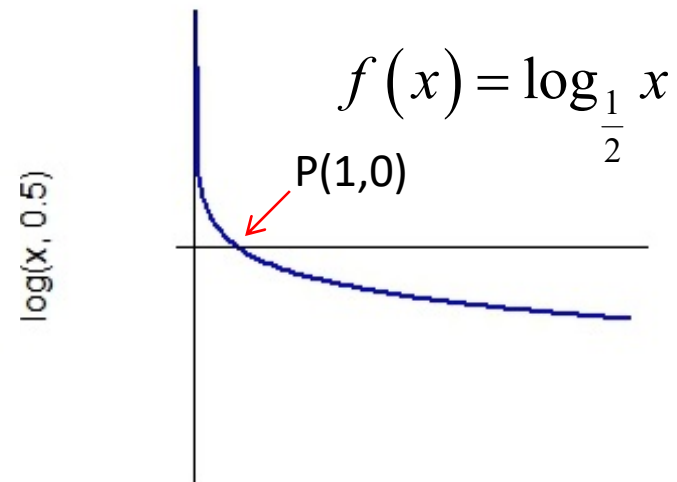
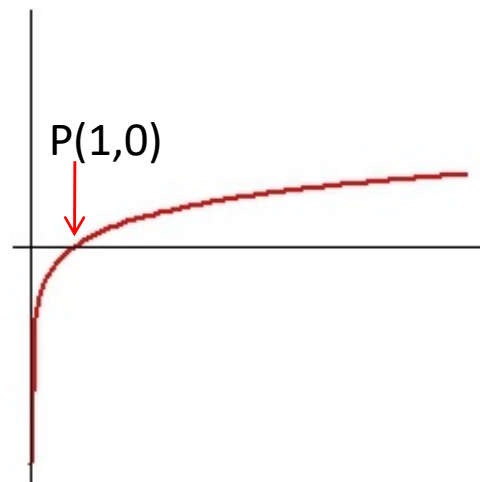
- Função Logarítmica $(f : R_+^* \rightarrow R)$

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

Possibilidades: **$0 < a < 1$ (função decrescente)**

$a > 1$ (função crescente)

$$f(x) = \log_2 x$$



Tipos de Funções

- Função Logarítmica $(f : R_+^* \rightarrow R)$

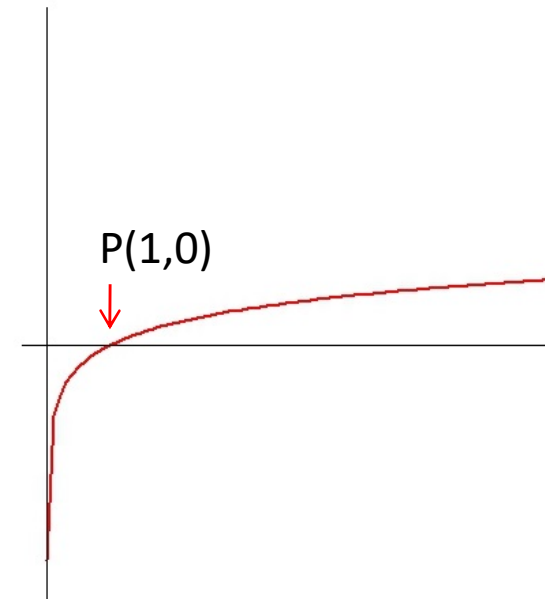
$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1$$

Caso especial: **a=e (“e” base do logaritmo neperiano)**

$$\mathbf{a=e=2,718282....}$$

$$f(x) = \log_e x = \ln(x)$$

$$f(x) = \ln(1) = 0$$



Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

- As funções exponenciais são bastante utilizadas para descrever, entre outros fenômenos, o crescimento (ou decrescimento) de populações.
- A tabela a seguir contém os dados sobre a população do México no início da década de 1980.

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75 → 69,13-67,38
1981	69,13	1,80 → 70,93-69,13
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75 → 69,13-67,38
1981	69,13	1,80 → 70,93-69,13
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais. No entanto, populações habitualmente crescem mais rápido à medida que vão se tornando maiores.

Quando dividimos a população de cada ano pela população do ano anterior, obtemos:

$$\frac{Pop. 1981}{Pop. 1980} = \frac{69,13}{67,38} = 1,026$$

$$\frac{Pop. 1982}{Pop. 1981} = \frac{70,93}{69,13} = 1,026$$

$$\frac{Pop. 1983}{Pop. 1982} = \frac{72,77}{70,93} = 1,026$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75
1981	69,13	1,80
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

O fato das contas fornecerem o fator 1,026 constante mostra que a população cresce aproximadamente 2,6% entre os anos.

Quando este fator é constante dizemos que o **crescimento populacional é exponencial** e pode ser descrito por uma função do tipo:

$$P = P_0 a^x$$

em que: P_0 é o tamanho populacional inicial ($x=0$); “a” é a base da função exponencial (fator segundo a qual a população cresce quando o x cresce uma unidade; $a=1,026$) e x é o número de anos a partir do início das medidas ($x=1 \rightarrow 1981$, já que $x=0 \rightarrow 1980$).

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75
1981	69,13	1,80
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

$$a = 1 + r$$

$$a = 1 + 0,026$$

O fato das contas fornecerem o fator 1,026 constante mostra que a população cresce aproximadamente 2,6% entre os anos.

O fator $a=1,026$ é dado por:

$$a = 1 + r$$

r é a representação decimal da taxa de variação percentual.

Se $r > 0$ temos crescimento exponencial

Se $r < 0$ temos decrescimento exponencial.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75
1981	69,13	1,80
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

No exemplo, temos:

$$P = P_0 a^x$$

$$P = 67,38(1,026)^x$$

$$(\text{Pop.1980}) \ x = 0 \rightarrow P = 67,38(1,026)^0 = 67,38$$

$$(\text{Pop.1981}) \ x = 1 \rightarrow P = 67,38(1,026)^1 = 69,13$$

$$(\text{Pop.1982}) \ x = 2 \rightarrow P = 67,38(1,026)^2 = 70,93$$

$$(\text{Pop.2030}) \ x = 50 \rightarrow P = 67,38(1,026)^{50} = 243,16$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	67,38	1,75 → 69,13-67,38
1981	69,13	1,80 → 70,93-69,13
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

Em que: P_0 é o tamanho populacional inicial ($x=0$); m é a taxa de variação populacional (coeficiente angular=inclinação da reta); x é o número de anos a partir do início das medidas.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 → 55,30-50,10
1981	55,30	5,20 → 60,50-55,30
1982	60,50	5,20 → 65,70-60,50
1983	65,70	5,20 → 70,90-65,70
1984	70,90	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

Em que: P_0 é o tamanho populacional inicial ($x=0$); m é a taxa de variação populacional (coeficiente angular=inclinação da reta); x é o número de anos a partir do início das medidas.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 → 55,30-50,10
1981	55,30	5,20 → 60,50-55,30
1982	60,50	5,20 → 65,70-60,50
1983	65,70	5,20 → 70,90-65,70
1984	70,90	---

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

$$P = 50,10 + 5,2x$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 → 55,30-50,10
1981	55,30	5,20 → 60,50-55,30
1982	60,50	5,20 → 65,70-60,50
1983	65,70	5,20 → 70,90-65,70
1984	70,90	---

Admitindo que esse comportamento possa ser extrapolado ao longo dos anos, qual seria o tamanho dessa população nos dias de hoje?

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

$$P = 50,10 + 5,2x$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

População fictícia

Ano	População (milhões)	Incrementos (milhões)
1980	50,10	5,20 → 55,30-50,10
1981	55,30	5,20 → 60,50-55,30
1982	60,50	5,20 → 65,70-60,50
1983	65,70	5,20 → 70,90-65,70
1984	70,90	---

Admitindo que esse comportamento possa ser extrapolado ao longo dos anos, qual seria o tamanho dessa população nos dias de hoje?

Se a população estivesse crescendo linearmente, todos os números na 3ª coluna (incrementos) seriam iguais.

A função de crescimento seria dada por:

$$P = P_0 + mx$$

$$P = 50,10 + 5,2(37)$$

$$P = 242,5 \text{ milhões}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Vimos que a população do México (em milhões de habitantes) foi aproximada pela função $P=67,38(1,026)^x$, em que x é o número de anos desde 1980.

Suponha agora que, em vez de calcular a população no instante x , desejamos saber quando a população atingirá 200 milhões de habitantes, ou seja, queremos encontrar o valor de x tal que,

$$200=67,38(1,026)^x$$

Vimos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Logo, para obter x temos que usar as propriedades da função $\log$ (ou $\ln$).

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\ln (AB) = \ln (A) + \ln (B)$$

$$\ln \left(\frac{A}{B} \right) = \ln (A) - \ln (B)$$

$$\ln (A^B) = B \ln (A)$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$\ln(A^B) = B \ln(A)$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$200 = 67,38(1,026)^x$$

$$\frac{200}{67,38} = (1,026)^x$$

$$\ln\left(\frac{200}{67,38}\right) = \ln(1,026)^x$$

$$1,0879 = x \ln(1,026)$$

$$1,0879 = 0,0257x$$

$$x = 42 \text{ anos}$$

Em 2022 (1980+42) a população do México será de aproximadamente 200 milhões de habitantes.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$\ln(A^B) = B \ln(A)$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Vamos supor que um país seja classificado como populoso quando ele ultrapassa a marca de 100 milhões de habitantes?

Quando foi (ou será) essa festa de “arromba” no México?

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função log (ou ln):

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$\ln(A^B) = B \ln(A)$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Vamos supor que um país seja classificado como populoso quando ele ultrapassa a marca de 100 milhões de habitantes?

Quando foi (ou será) essa festa de “arromba” no México?

Perdemos! A festa foi em 1996.

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Uma função exponencial com base “a” tem a fórmula $P=P_0a^x$.

Qualquer que seja o número positivo “a” (vimos que $0 < a \neq 1$), podemos escrever como:

$$a = e^k$$

onde:

$$\ln(a) = \ln(e^k)$$

$$\ln(a) = k$$

Portanto, a função exponencial pode ser escrita como,

$$P = P_0a^x = P_0 \left(e^k \right)^x = P_0e^{kx}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Portanto, a função exponencial pode ser escrita como,

$$P = P_0 a^x = P_0 \left(e^k \right)^x = P_0 e^{kx}$$

Se $a > 1$ a função é crescente $\rightarrow k$ é positivo

Se $0 < a < 1$ a função é decrescente $\rightarrow k$ é negativo

k é chamada de taxa de crescimento (ou decrescimento) contínua.

No exemplo (México) escrever a função na forma: $P = P_0 e^{kx}$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

No exemplo (México), temos:

$$P = 67,38(1,026)^x$$

Como

$$P_0 = 67,38$$

Desejamos calcular k tal que,

$$67,38(1,026)^x = 67,38(e^k)^x$$

$$1,026 = e^k$$

$$\ln(1,026) = \ln(e^k)$$

$$k = 0,0257$$

$$P = 67,38e^{0,0257x}$$

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

No exemplo (México), temos:

$$P = 67,38(1,026)^x$$

Equação 1

$$P = 67,38e^{0,0257x}$$

Equação 2

Portanto, a taxa de crescimento anual (por unidade de tempo) de 2,6% (da equação 1, $r=0,026$) é equivalente à taxa de crescimento contínua de 2,57% (da equação 2).

Mais sobre funções: lineares, exponenciais e logarítmicas

Exercício

A população de uma cidade é de 1.000 habitantes e cresce 5% ao ano

- a) Encontre uma equação para descrever o crescimento populacional no instante t anos a partir de ano atual (2017), supondo que a taxa de 5% seja
 - i. Taxa anual
 - ii. Taxa anual contínua
- b) Para cada um dos casos do item “a” dê uma estimativa da população da cidade daqui a 10 anos;
- c) Quando a população dessa cidade atingirá a marca de 10 mil habitantes?