Mecânica Quântica — 7600022

Segunda Lista — preparação para a prova do dia 27/3/2017

Problemas do Capítulo 2 do livro texto

1. Problema 2.1: Prove os seguintes teoremas

   a) Para soluções renormalizáveis, a constante de separação E deve ser real. *Dica*: escreva E (na equação 2.6) como $E_0 + i\Gamma$ (com E_0 e Γ reais) e mostre que se a equação 1.20 é válida para todo t, Γ deve ser zero.

   b) ψ pode sempre ser tomada como real (diferentemente de Ψ, que é necessariamente complexa). *Observação*: Isso não significa que toda a solução para a equação de Schrodinger dependente do tempo seja real; mas, significa que se encontrada uma solução que não seja real, ela sempre pode ser expressa como uma combinação linear de soluções (com mesma energia) que produz uma solução real. Assim, na equação 2.41 você pode também considerar os ψ's como reais. *Dica*: Se $\psi(x)$ satisfaz a equação de Schrodinger dependente do tempo para uma dada energia E, o mesmo vale para a sua complexa conjugada e ainda para as combinações lineares reais $(\psi + \psi^*)$ e $i(\psi - \psi^*)$.

   c) Se $V(x)$ é uma função par [i.e. $V(-x) = V(x)$], então $\psi(x)$ pode sempre ser tomada como sendo par ou ímpar. *Dica*: Se $\psi(x)$ satisfaz a equação de Schrodinger dependente do tempo para uma dada energia E, o mesmo vale para $\psi(-x)$ e ainda para as combinações pares e ímpares da função de onda $\psi(x) \pm \psi(-x)$.

2. Problema 2.2: Mostre que E deve ser maior que o valor mínimo de $V(x)$ para toda solução normalizável da equação de Schrodinger dependente do tempo. Qual o análogo clássico dessa afirmação? *Dica*: Reescreva a equação 2.4 na forma

   $$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{2m}{\hbar}\left[V(x) - E\right]\psi;$$

   se $E < V_{\min}$, então ψ e sua segunda derivada têm sempre o mesmo sinal - utilize o fato de que essa função não pode ser normalizada.

3. Problema 2.3: Mostre que não há solução (independente do tempo) aceitável para a equação de Schrodinger (para o poço infinito) com $E = 0$ ou $E < 0$. (Esse é um caso especial do teorema geral no problema 2.2, mas desta vez baseie-se na solução explícita da equação de Schrodinger e mostre que não é possível satisfazer às condições de contorno.)

4. Problema 2.4:

   Resolva a equação de Schrodinger dependente do tempo com condições de contorno apropriadas para um poço infinito centrado na origem [$V(x) = 0$, para $-a/2 < x < +a/2$; $V(x) = \infty$ fora desta região]. Confira se as energias permitidas são consistentes com aquelas obtidas na equação 2.23 e confirme que suas ψ's podem ser obtidas a partir da equação 2.24 através da substituição $x \to x - a/2$.

5. Problema 2.5:

   Calcule $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, σ_x e σ_p para o n-ésimo estado estacionário do poço infinito. Verifique se o princípio da incerteza é satisfeito. Qual estado é o mais próximo do limite de incerteza?

6. Problema 2.7:

   Embora a fase *global* constante na função de onda não tenha significado físico (ela se cancela sempre que calculamos uma medida observável), a fase *relativa* dos coeficientes na expansão da equação 2.14 importam. Por exemplo, suponha que mudemos a fase relativa de ψ_1 e ψ_2 no problema 2.6:

   $$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)],$$

   com ϕ sendo uma constante qualquer. Encontre $\Psi(x,t)$, $|\Psi(x,t)|^2$ e $\langle x\rangle$, comparando os seus resultados com os encontrados anteriormente. Analise o caso especial de $\phi = \pi/2$ e $\phi = 0$.

7. Problema 2.8:

   Uma partícula no poço infinito tem a seguinte função de onda no instante inicial $t = 0$

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x).$$

   a) Normalize $\Psi(x, 0)$. Esboce seu gráfico. Qual estado estacionário é o mais parecido? Nesta base, estime o valor esperado da energia.
   b) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ e $\langle H \rangle$ em $t = 0$. (*Observação*: Desta vez você não pode calcular $\langle p \rangle$ tomando a derivada de $\langle x \rangle$, pois $\langle x \rangle$ é conhecido em um único instante de tempo.) Como $\langle H \rangle$ se compara à estimativa obtida em a)?

8. Problema 2.10:

   A função de onda (equação 2.14) foi normalizada; dado que os ψ_n's são ortonormais, o que podemos dizer sobre os coeficientes c_n?