

Experiência 3

Óptica Geométrica - Lentes

As evidências experimentais e o trabalho de J. Clerk Maxwell estabeleceram que a natureza da luz é eletromagnética. A teoria eletrodinâmica clássica descreve a luz como uma transferência contínua de energia através de ondas eletromagnéticas. Entretanto, a visão atual da eletrodinâmica quântica descreve as interações eletromagnéticas e o transporte de energia em termos de partículas de massa zero, os fótons. Contudo, a natureza quântica da luz não é sempre aparente, nem esse tratamento é de utilidade prática na descrição de muitos fenômenos ópticos. Existem situações nas quais os equipamentos de detecção não são sensíveis aos quanta individuais e é desejável que isso ocorra para que se possa estudar fenômenos induzidos por um número enorme de fótons. Nesses casos a representação da luz através de campos eletromagnéticos tem sido e vai continuar a ser de grande utilidade.

Nesse experimento vamos considerar a luz como uma onda eletromagnética sem esquecer que existem situações para as quais essa descrição é inadequada.

A aproximação que permite considerar a propagação da luz como retilínea simplifica tanto o estudo do comportamento da luz, em certos casos, que compensa de sobra as imprecisões que dela decorrem. O domínio da "óptica geométrica" é o conjunto de fenômenos para os quais essa aproximação é válida e é aquela em que os efeitos de difração (ou da natureza ondulatória da luz) podem ser desprezados. Isso ocorre quando o comprimento de onda da energia radiante é pequeno se comparado às dimensões físicas do sistema óptico com o qual ela interage.

Em outras palavras, a óptica geométrica é válida no limite em que o comprimento de onda da luz tende a zero. Além disso, ela permite a descrição da alteração controlada das frentes de onda pela interposição de aparatos que refletem e/ou refratam a luz, de uma

maneira bem mais simplificada, desde que seja possível desprezar efeitos de interferência e difração.

A experiência que está sendo proposta será realizada em três aulas, e se baseia no estudo das principais características de lentes delgadas e grossas, lentes convergentes e divergentes. O relatório deverá ser apresentado uma semana após o término da experiência.

Lentes

A lente é, certamente, o dispositivo óptico mais utilizado em nosso cotidiano. Nós mesmos vemos o mundo através de um sistema de lentes.

A lente é um dispositivo refrator, isto é, que reconfigura a distribuição de energia que transmite, quer se trate de ondas eletromagnéticas (luminosas visíveis, ultravioleta, infravermelho, microonda, ondas de rádio), ou até de ondas sonoras.

A configuração de uma lente é determinada pela mudança que se pretende introduzir na forma da frente de onda.

Existe uma vasta variedade de lentes. Além das lentes para radiação eletromagnéticas (luz visível, ondas de rádio, microondas), há lentes acústicas e lentes para feixes de partículas carregadas. Portanto, lentes podem ter as mais variadas formas que, muitas vezes, podem ser bem diferentes da forma convencional das lentes para luz visível.

As lentes para radiação eletromagnética na faixa de frequência da luz visível têm, em geral, duas ou mais superfícies refratoras com uma ou mais superfícies curvas. As superfícies curvas têm, na grande maioria dos casos, um eixo comum que é chamado de eixo óptico da lente. Nosso estudo estará restrito a lentes ou sistemas de lentes com essa característica, ou seja, para os quais todas as superfícies são simétricas por rotação em torno de um eixo comum, que é o eixo óptico.

O material com que as lentes são feitas é um dielétrico transparente com índice de refração diferente do índice de refração do meio onde a onda vinha se propagando. Nos casos que vamos estudar, esse índice de refração (do dielétrico) será sempre maior que o do meio que é o ar.

As lentes são classificadas segundo várias características e possuem uma nomenclatura convencional:

- lentes que consistem de um único elemento são chamadas de lentes simples e quando possuem mais de um elemento são lentes compostas.

- lentes podem ser grossas ou delgadas. As delgadas são aquelas cuja espessura pode ser desprezada quando se prevê seu comportamento; nas lentes grossas essa espessura deve ser levada em conta.

- lentes também são classificadas quanto à maneira como alteram as frentes de onda que as atravessam: as lentes podem ser divergentes quando fazem com que um feixe incidente de raios paralelos ao eixo óptico, saia das mesmas divergindo; ou convergentes quando atuam de modo a fazer convergir para um ponto um feixe de raios incidentes paralelo ao eixo óptico.

Um estudo mais detalhado sobre lentes, seu funcionamento e usos pode ser encontrado nos **capítulos 5 e 6** do livro **Óptica** de E.Hecht e também, nos livros **Física Básica, volume 4, capítulo 2** de H. Nussenzveig; **Física, volume 2, capítulo 27** de P.A .Tipler ; **Física - Óptica e Física Moderna - volume 4, capítulo 39** de D. Halliday e R. Resnick .

Funcionamento de uma Lente

A superfície de qualquer objeto que seja luminoso ou iluminado externamente comporta-se como se fosse constituído de um número muito grande de fontes radiativas pontuais, **S**, que emitem, cada uma delas, ondas esféricas. À direção em que a energia é transportada, ou seja, à direção do vetor de Poynting, vamos associar linhas que chamaremos de raios (ter em mente que raio não é uma entidade física, mas uma construção matemática que simplifica o estudo de dispositivos ópticos). Nesse caso, então, podemos dizer que raios divergem de cada uma das fontes pontuais, **S**, que compõem a superfície do objeto. O ponto do qual uma porção de uma onda esférica diverge, ou o ponto para o qual ela converge é chamado de foco do conjunto de raios que a representam.

Para ver como uma lente funciona vamos colocar no caminho de uma onda luminosa uma substância transparente na qual a onda vai se propagar com uma velocidade diferente da que possuía antes de penetrar na substância. Vamos supor que a velocidade de propagação da onda nesse meio é menor que a velocidade de propagação no meio onde ela se encontrava, o que quer dizer que o índice de refração, $n_{\text{transp}} = c/v_{\text{transp}}$, do meio transparente é maior que o índice do meio onde a onda se encontrava, $n_{\text{inicial}} = c/v_{\text{inicial}}$ e $n_{\text{transp}} > n_{\text{inicial}}$.

Para facilitar o entendimento, vamos supor que:

- a frente de onda, ao atingir o meio, é esférica, vindo de uma fonte pontual e, portanto, divergente
- a superfície de separação entre os meios é convexa, ou seja, mais espessa no centro que nas bordas).

Vai ocorrer que a área central da frente de onda atinge a superfície do meio antes que as áreas periféricas, e, portanto vai começar a se propagar mais lentamente antes das áreas periféricas da frente de onda. O efeito disso é que as extremidades da onda vão tender a "ultrapassar" a parte central aplainando a frente de onda. Se a interface entre o meio onde a onda se originou e o meio em que

ela vai penetrar, é configurada de maneira apropriada, pode-se transformar uma onda esférica divergente numa onda plana.

O mesmo raciocínio pode ser feito para uma frente de onda esférica, que encontre em seu caminho uma superfície de separação côncava (mais fina no centro que nas bordas): a área periférica da frente de onda atinge a superfície de separação entre os dois meios antes que a parte central, e, portanto vai se propagar mais lentamente que a região central da frente de onda, o efeito disso é que o raio de curvatura da frente de onda diminui, ou seja, ela se torna ainda mais divergente.

A conclusão é que projetando as interfaces entre dois meios de índices de refração diferentes, de maneira adequada, podemos modificar controladamente a frente de onda, fazendo com que os raios que a representam possam convergir para um ponto ou divergir de um ponto, ou ainda se tornarem paralelos. Esses pontos são chamados de pontos focais; para raios paralelos o ponto focal se encontra no infinito.

A **figura 3.1** a seguir mostra graficamente esse comportamento, com os desenhos das frentes de onda e dos raios.

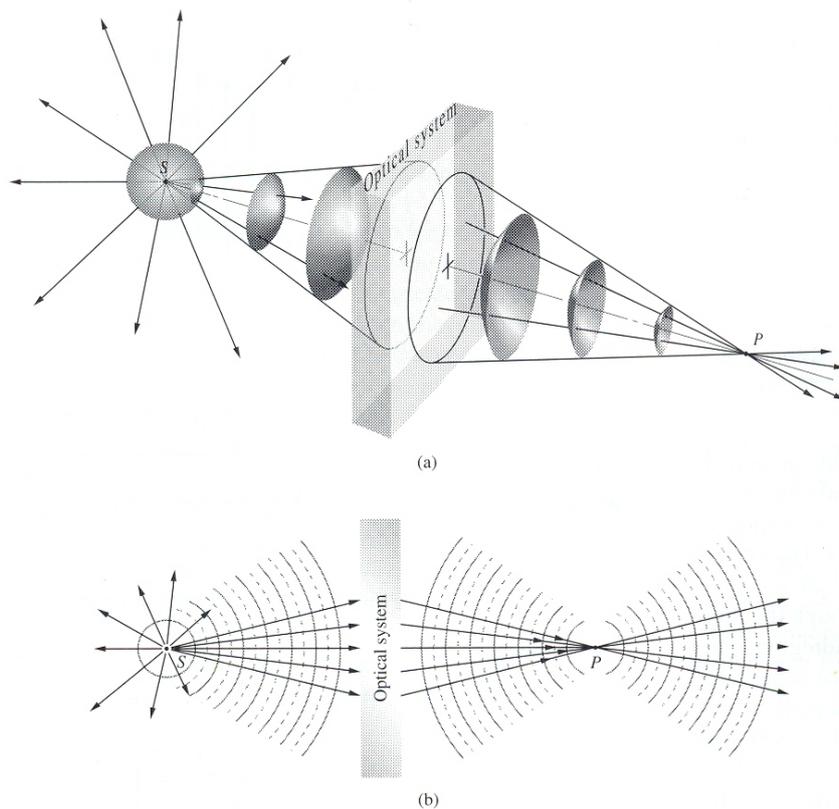


Figura 3.1: Comportamento de uma frente de onda esférica divergente e dos raios que a representam ao passar numa interface ar \rightarrow vidro ($n_{\text{vidro}} > n_{\text{ar}}$) convexa.

Com o raciocínio feito acima é possível verificar que uma **lente é convergente quando ela é mais espessa no centro que nas bordas**, e, uma **lente divergente, pelas mesmas razões é mais fina no centro que nas bordas**.

Vamos estudar o que acontece quando se observa uma fonte pontual através de alguns tipos de lentes. Na **figura 3.2** a seguir, está desenhado o traçado dos raios provenientes da fonte ao atravessar essas lentes. O feixe de raios luminosos emitidos por uma fonte pontual é um feixe divergente.

Na **figura 3.2 (c)** é representada uma lente plano-convexa, que pela definição, é uma lente convergente. Vamos ajustar a distância da fonte pontual à lente de tal maneira que o feixe de raios divergentes que atinge a lente saia dela como um feixe de raios paralelos ao eixo óptico. Quando isso ocorre, a distância da fonte à lente é chamada de distância focal ou foco, f_1 , da lente convergente. Como os raios são reversíveis, se um feixe de raios paralelos ao eixo óptico entra na lente pela direita, eles vão convergir para o ponto focal F_1 , à esquerda da lente. O princípio da reversibilidade dos raios luminosos deriva do princípio de Fermat, para maiores detalhes veja o livro **Óptica** de E. Hecht, **capítulo 4, seção 4.5**.

Na **figura 3.2(b)** temos uma lente convergente construída pela justaposição de duas lentes plano-convexas como a da **figura 3.2 (a)**. A fonte pontual é colocada no ponto P_1 a uma certa distância da lente de maneira que o feixe de raios emergente irá convergir para um ponto do outro lado da lente, P_2 . Esses dois pontos são chamados de pontos conjugados da lente. Como consequência da reversibilidade dos raios luminosos, se a fonte for colocada no ponto P_2 os raios emergentes vão convergir para o ponto P_1 .

Finalmente, na **figura 3.2(a)** é representada uma lente plano-côncava (divergente) e vamos supor que raios paralelos ao eixo óptico atinjam a lente vindos da direita. Eles vão sair da lente divergentes, mas parecem divergir de um ponto situado à direita da lente, F_2 . A distância desse ponto à lente é chamada de distância focal ou foco f_2 da lente divergente.

A posição do objeto em relação à lente é chamada de ponto objeto e a posição da imagem em relação à lente é conhecida como ponto imagem.

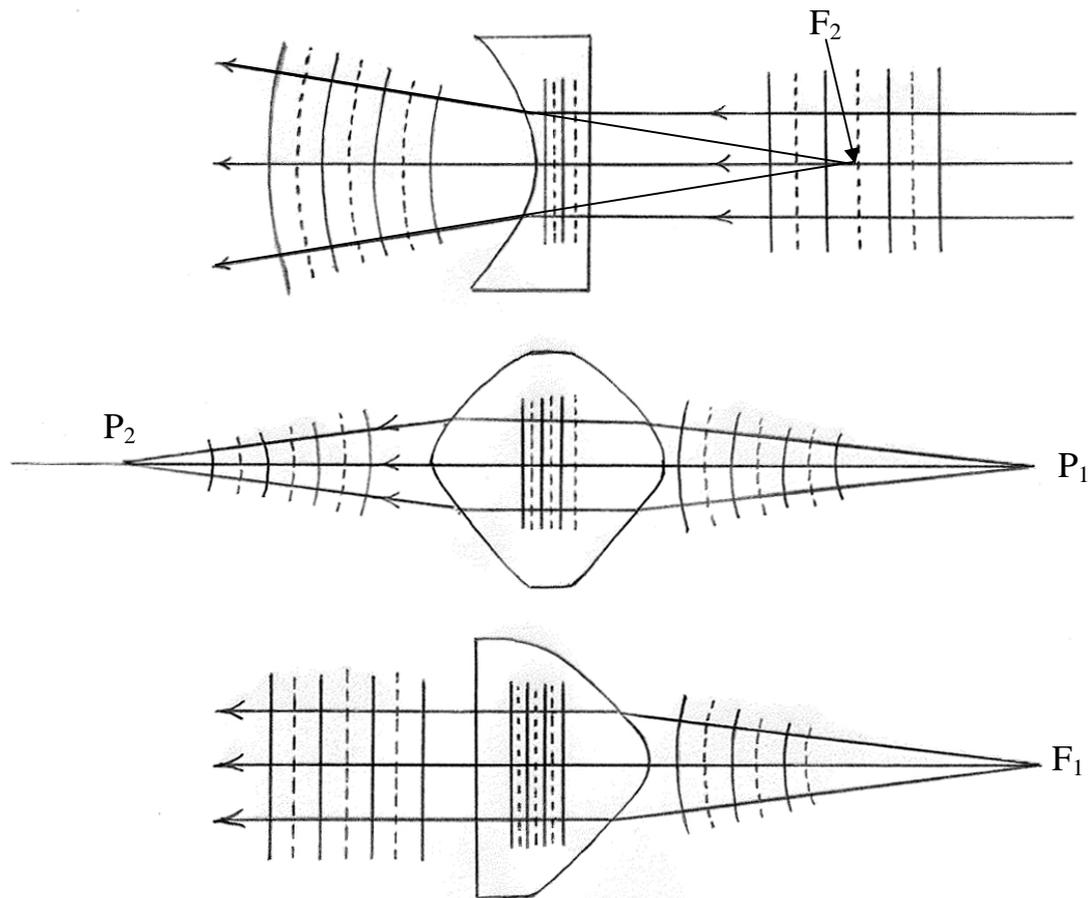


Figura 3.2: Comportamento de uma lente divergente (plano-côncava) (a); de uma lente convergente (bi-convexa) (b); de uma lente convergente (plano-convexa)(c).

O tipo de lente que se pretende estudar é construído de tal maneira que tanto o ponto objeto (posição do objeto em relação à lente), como o ponto imagem (posição da imagem em relação à lente) se encontram fora do meio da lente. Vamos restringir nosso estudo a lentes e sistemas de lentes imersos no ar, cujo índice de refração é considerado igual a **1** (o valor tabelado é igual a $n_{\text{ar}}=1,000293$, a **1 atm** e **0°C**, medida realizada com luz de sódio $\lambda=589,29\text{nm}$, dados obtidos no livro **Optics** de E. Hecht).

Observando mais uma vez a **figura 3.2(b)** vemos que os raios provenientes da fonte pontual em P_1 vão convergir para o ponto chamado conjugado P_2 , então, se for colocado um anteparo no ponto P_2 vai aparecer nesse anteparo uma imagem luminosa da fonte que está em P_1 . Por essa razão a imagem é dita real. **A imagem real pode ser projetada num anteparo.**

Por outro lado na **figura 3.2(c)**, como os raios que chegam à lente são paralelos, ou seja, a fonte está no infinito, os raios que emergem são divergentes, mas parecem se originar num ponto F_2 . Entretanto, se for colocado um anteparo no ponto F_2 , nenhuma imagem luminosa da fonte aparecerá no anteparo, apesar de que essa imagem pode ser percebida através da lente. Essa imagem é dita virtual, como as imagens formadas por espelhos planos. **Imagens virtuais não podem ser projetadas em anteparos.**

Este estudo que estamos propondo se restringirá aos raios que atingem a lente obedecendo a aproximação paraxial. Essa aproximação considera que os raios chegam à lente com ângulos (φ) em relação ao eixo da lente pequenos o suficiente para que a aproximação em primeira ordem, **$\text{sen}\varphi \approx \varphi$** e **$\text{cos}\varphi \approx 1$** (φ em radianos), seja válida (ela é uma aproximação razoável até $\varphi \approx 10^\circ$).

Relembrando que o seno e o cosseno de φ podem ser expandidos em séries de potência:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \quad (3.1)$$

$$\text{sen} \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \quad (3.2)$$

A aproximação paraxial é também chamada de primeira ordem porque ela considera somente o primeiro termo na aproximação

acima. Por essa razão, a teoria que admite essa aproximação é chamada de **Óptica de Primeira Ordem** ou **Óptica Paraxial** ou, ainda, **Óptica Gaussiana**. Este último nome se deve ao fato de ter sido o matemático alemão Karl Friederich Gauss, em 1841, quem primeiro fez uma formulação sistemática da formação de imagens sob essa aproximação.

Lentes Delgadas

A lente delgada é aquela cujo comportamento pode ser previsto desprezando sua espessura. No tratamento que vai ser realizado será considerada válida a aproximação paraxial e vai-se estudar somente o caso em que o índice de refração da lente é maior que o índice de refração do meio onde ela se encontra, que será o ar ($n_{ar}=1$).

Lentes delgadas, divergentes ou convergentes podem ter duas superfícies curvas ou uma curva e uma plana, como se vê na **figura 3.3** a seguir. Cada lente recebe um nome de acordo com sua geometria.

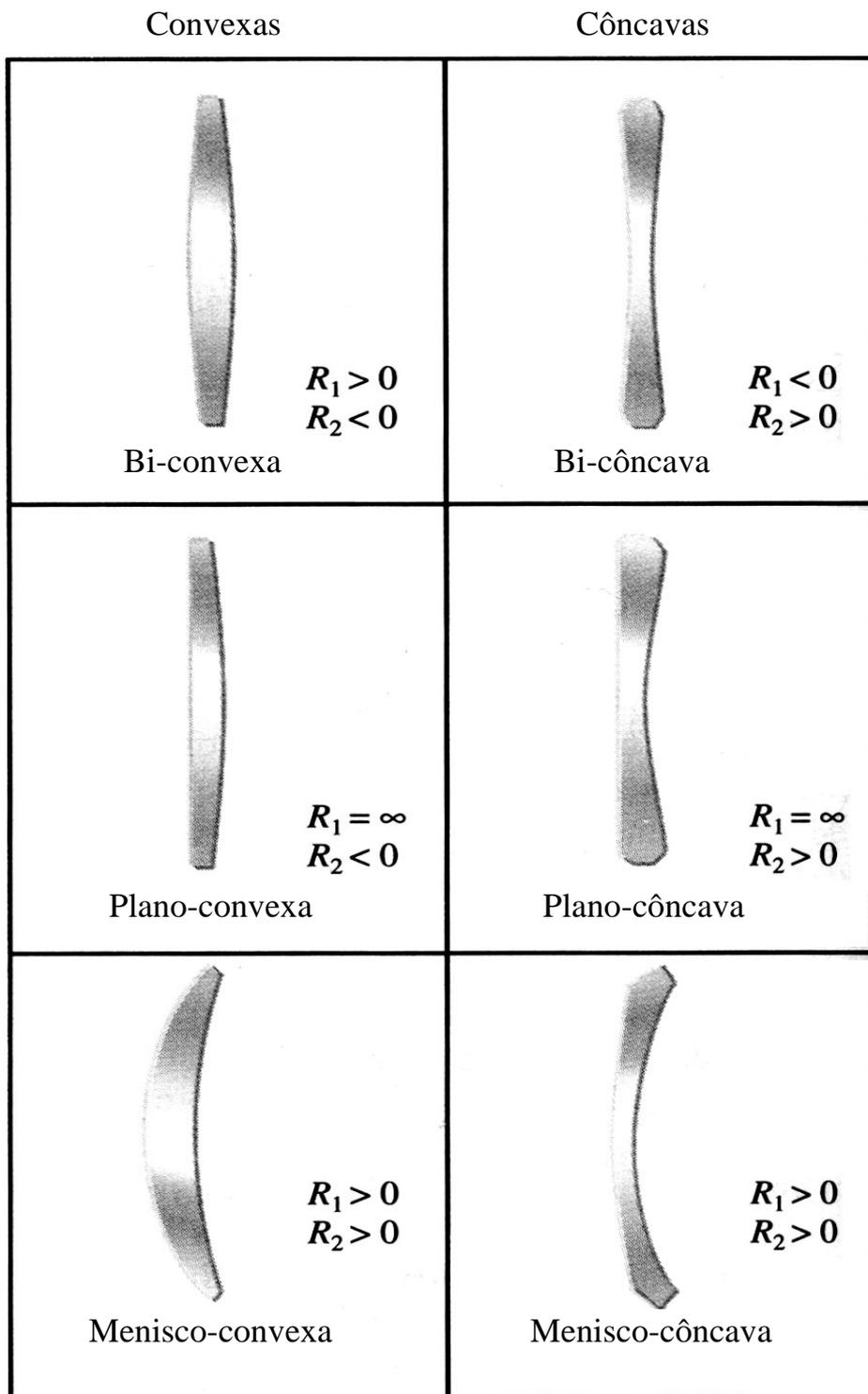


Figura 3.3: Seção reta das lentes convergentes e divergentes.

Lentes convexas ou convergentes (mais espessas no centro que nas extremidades) fazem diminuir o raio de curvatura das frentes de onda que as atingem, ou, utilizando o conceito de raios, altera o ângulo de saída dos raios tornando-os mais convergentes. Elas também são chamadas de lentes positivas porque se convencionou que a **distância focal de uma lente convergente é positiva**.

Lentes côncavas ou divergentes (mais finas no centro que nas extremidades) fazem aumentar o raio de curvatura das frentes de onda que incidem sobre ela. Ou, em termos de raios, torna-os mais divergentes ao saírem que quando entraram. São também chamadas de lentes negativas porque se convencionou que a **distância focal de lentes divergentes é negativa**.

Há mais algumas convenções que se adotam no tratamento do funcionamento das lentes:

- ♦ o foco objeto, f_o , de uma lente é o ponto focal do lado onde está colocado o objeto, esse ponto se encontra sobre o eixo óptico da mesma

- ♦ o foco imagem, f_i , é o ponto focal do lado da lente onde se forma a imagem, esse ponto se encontra sobre o eixo óptico da mesma

- ♦ para uma lente delgada, $f_o = f_i = f$

- ♦ o meio à direita do ponto em que o raio emerge da lente é chamado de espaço imagem

- ♦ a distância i é o intervalo entre a imagem e o plano que passa pelo centro da lente (essa definição é válida apenas para lentes delgadas)

- ♦ a posição da imagem em relação à lente é chamada de ponto imagem

- ♦ o meio à esquerda do ponto de entrada do raio na lente é chamado de espaço objeto

- ♦ a distância o é a distância do objeto ao plano que passa pelo centro da lente (essa definição é válida apenas para lentes delgadas)

- ♦ a posição do objeto em relação à lente é chamada de ponto objeto

- ♦ h_o é a altura do objeto, que é a sua dimensão perpendicular ao eixo óptico

♦ h_i é altura da imagem ou sua dimensão perpendicular ao eixo óptico.

A seguir, a convenção de sinais adotada para essas variáveis, considerando o feixe de luz **entrando na lente pela esquerda**:

- a distância do objeto à lente, o , é positiva se o objeto estiver à esquerda da lente (lado pelo qual o feixe entra na lente) e negativa se o objeto estiver à direita da lente (lado pelo qual o feixe sai da lente)

- a distância da imagem à lente, i , é positiva se a imagem estiver à direita da lente (lado pelo qual o feixe sai da lente) e negativa se a imagem estiver à esquerda da lente (lado pelo qual o feixe entra na lente)

- a distância focal f é positiva se a lente é convergente e negativa se a lente é divergente

- a altura h_o do objeto e h_i da imagem são positivas se estão acima do eixo óptico e negativas se estiverem abaixo do eixo óptico

- a altura h_i da imagem está para a altura h_o do objeto assim como a distância i da imagem à lente está para a distância o do objeto à lente. E a relação entre h_i e h_o é chamada de magnificação linear transversal da lente, m . Se m é negativa significa que a imagem está invertida.

$$\frac{i}{o} = \frac{h_i}{h_o} = m \quad (3.3)$$

A **figura 3.4** a seguir mostra como uma lente delgada convergente forma a imagem de um objeto de altura h_o :

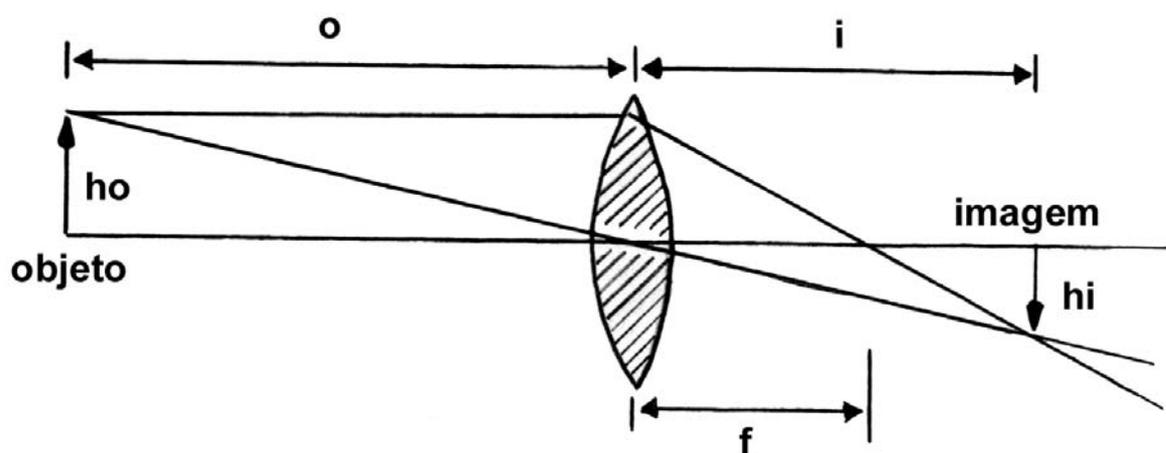


Figura 3.4: Formação de imagem por uma lente convergente.
 Para o raio que entra paralelo ao eixo óptico, $h_o=r_1$, $\varphi_1=0$ e
 $h_i=-r_2$.

Essa imagem é uma imagem real e invertida, portanto, pode ser projetada num anteparo. Tanto a posição como a altura, h_i , ou magnificação dessa imagem podem ser previstas. Essa previsão será o objeto das próximas seções.

Método Matricial Aplicado à Análise de Lentes

Há um método interessante que permite resolver o problema de traçar o caminho dos raios luminosos através de uma lente ou sistemas de lentes. Esse método é particularmente útil para sistemas de lentes em que a resolução analítica convencional fica muito trabalhosa. Esse método utiliza matrizes para prever o caminho de um raio luminoso através de um sistema óptico.

Supondo que um raio de luz paraxial incida sobre um sistema óptico, vamos caracterizá-lo por dois parâmetros: a distância r que ele está do eixo óptico do sistema e o ângulo φ que ele faz com esse eixo. O sistema óptico, qualquer que seja ele, terá um plano de entrada e um plano de saída do raio de luz. Vamos supor que os valores dos parâmetros r e φ nesses planos sejam $r_1\varphi_1$ e $r_2\varphi_2$ respectivamente, como se vê na **figura 3.5** a seguir.

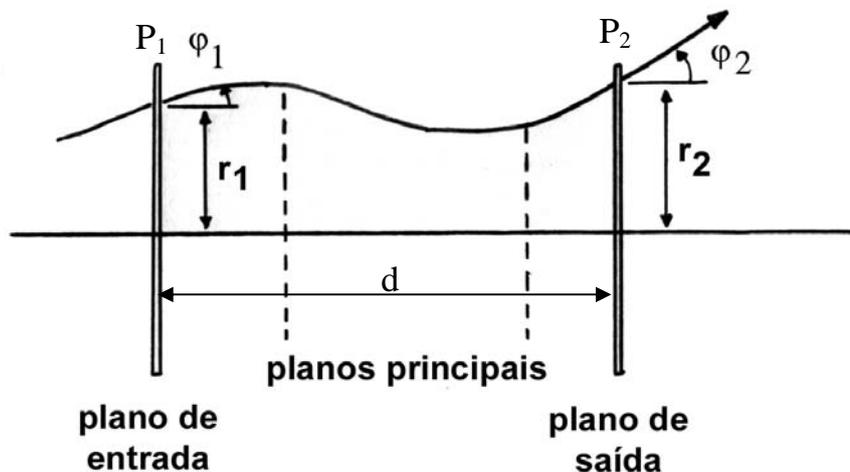


Figura 3.5: Diagrama esquemático de um sistema óptico de espessura d , mostrando um raio paraxial típico e seus parâmetros nos planos de entrada (r_1 e φ_1) e de saída (r_2 e φ_2) do sistema.

Na aproximação paraxial há uma relação linear entre esses parâmetros da forma (essas relações vem da aplicação da Lei de Snell nas interfaces de separação entre os meios - veja o Optics de E. Hecht página 251):

$$r_2 = Ar_1 + B\varphi_1 \quad (3.4)$$

$$\varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1 \quad (3.5)$$

ou usando a notação matricial:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

lembrando que estamos usando o índice **1** para assinalar a entrada e o índice **2** para a saída do raio luminoso.

A matriz **M**, da **expressão 3.6**, é chamada de **matriz de transferência do raio luminoso**:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Essa matriz transforma o raio que incide no ponto **P₁** da lente, (ponto de entrada), no raio que emerge no ponto **P₂**, (ponto de saída). Portanto a matriz é um operador, ela opera uma transformação sobre o raio luminoso.

Geralmente o determinante dessa matriz é igual a **1**, como conseqüência do teorema de Liouville. **Esse teorema diz que a área do feixe luminoso (que vem do objeto e vai definir a imagem) é conservada no espaço de fase.** Quando temos que

descrever um sistema físico há necessidade de certas grandezas para caracterizar essa descrição; o espaço de fase é o espaço cujas coordenadas são essas grandezas. No caso, o espaço de fase do feixe é definido como o espaço definido pelas coordenadas (\mathbf{r}, φ) , ou seja, um espaço bidimensional cujos eixos são a distância \mathbf{r} do eixo óptico ao ponto onde o raio atinge a lente, e o ângulo φ , que é o ângulo que o raio faz com o eixo óptico da lente. Se a área no espaço de fase é conservada, pode ser demonstrado que o determinante da matriz de transferência, \mathbf{M} , é igual a $\mathbf{1}$. Essa característica pode ser explorada como um teste de consistência sempre que se cria uma matriz de transferência: uma condição necessária (mas não suficiente) é que seu determinante seja igual a $\mathbf{1}$, para que ela faça a transferência correta entre o raio que entra e o raio que sai do sistema óptico.

Uma outra característica da maioria dos sistemas ópticos, feitos de material isotrópico, é que são reversíveis, isto é, um raio luminoso que o atravesse da direita para a esquerda com parâmetros de entrada $(\mathbf{r}_2, \varphi_2)$ sairá do sistema com parâmetros $(\mathbf{r}_1, \varphi_1)$. Portanto:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

e a matriz de transferência do raio reverso é:

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.9)$$

Uma outra vantagem do tratamento matricial para o cálculo do transporte do feixe é que ele o torna mais simples quando o sistema óptico possui mais de um elemento. Vamos supor que o raio, ao sair da primeira lente, entra numa segunda lente; para representar o transporte do raio luminoso através desse sistema vamos ter que representar por matrizes a entrada e a saída do raio nas lentes e sua propagação no espaço entre elas. Essa descrição é apresentada a seguir.

Representação Matricial do Espaço Livre entre dois Elementos Ópticos

O espaço livre onde o feixe de raios luminosos se propaga é a mais simples e a mais comum componente de transporte de feixe e a matriz que o representa é, portanto, a mais simples. Na **figura 3.6** a seguir, o raio luminoso se desloca do ponto P_1 ao ponto P_2 no espaço livre:

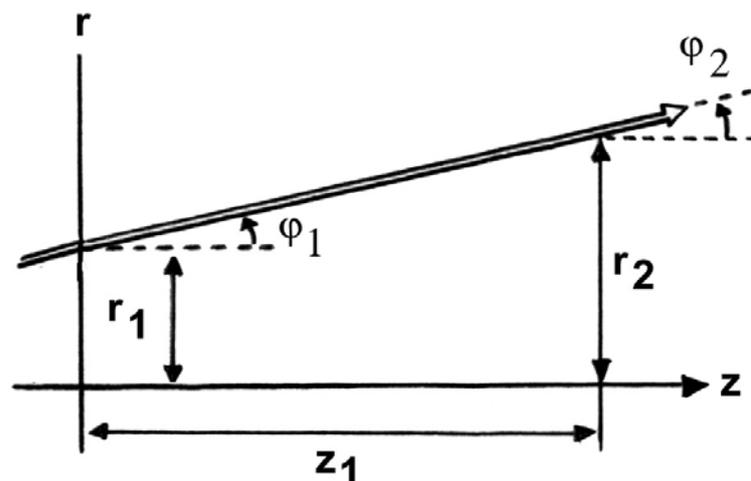


Figura 3.6: Representação do espaço livre (de comprimento z_1) entre dois elementos ópticos. Por hipótese o raio que entra não sofre desvio ($\varphi_1 = \varphi_2$).

De acordo com a figura supõe-se que P_1 é o ponto de saída do raio luminoso de um elemento óptico e P_2 é o ponto de entrada desse raio num segundo elemento óptico, d é a distância que o raio

percorre entre \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 e r_1 é a distância do ponto de entrada ao eixo óptico. Portanto, sendo válida a aproximação paraxial, valem as relações:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \approx \operatorname{sen} \varphi_1 \approx \varphi_1 \approx \frac{r_2}{d} \quad (3.10)$$

sendo assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + d\varphi_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

na forma matricial as **equações (3.11)** tornam-se:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Notar que o determinante da matriz de transferência é igual a **1** e como o caminho percorrido pelo raio luminoso nesse espaço deve ser simétrico, os elementos **A** e **D** devem ser iguais. Tanto r_1 quanto d deve ser expresso nas mesmas unidades e os ângulos em radianos.

Representação Matricial de uma Lente Delgada

Uma lente delgada é ilustrada na **figura 3.7** a seguir. Essa lente pode ser considerada como um dispositivo que causa uma mudança na divergência angular do feixe luminoso que é instantânea e correspondente ao desvio da trajetória do feixe ao passar através da lente.

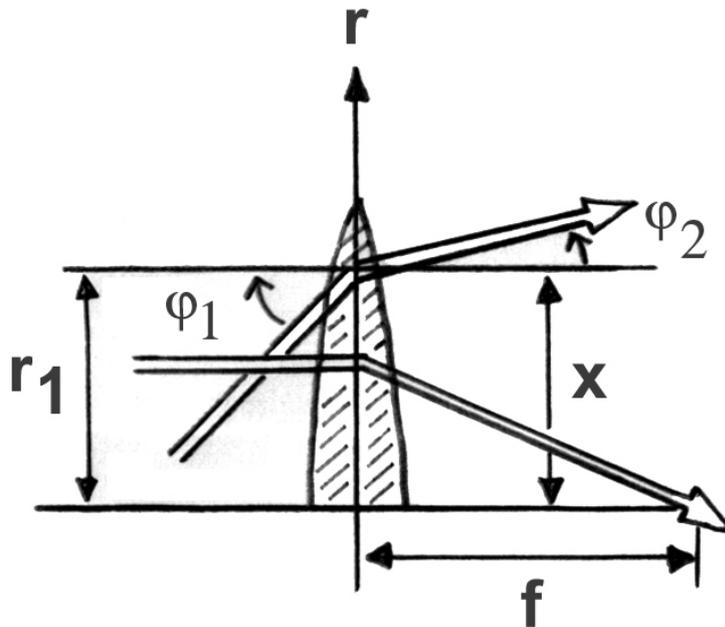


Figura 3.7: Estudo da lente delgada.

Vamos ver o que acontece quando três raios luminosos com trajetórias diferentes atingem a lente delgada, de distância focal, f , conforme a **figura 3.8** abaixo:

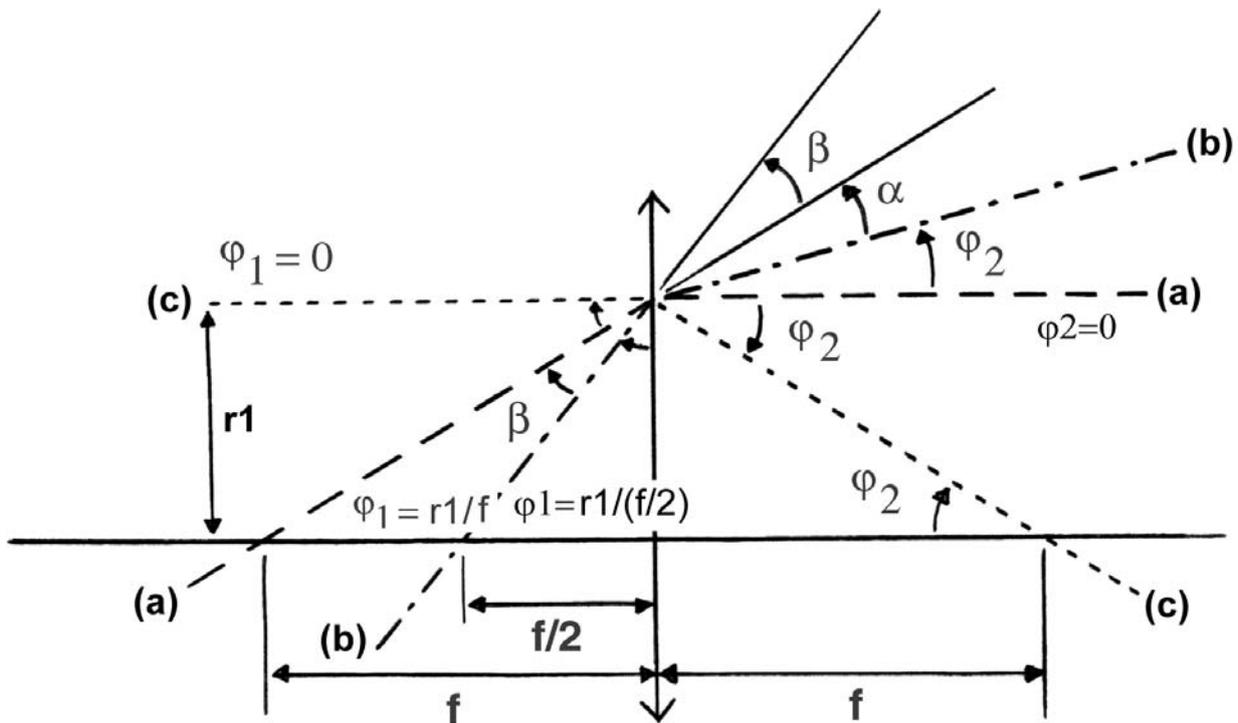


Figura 3.8: Esquema de lente delgada com três raios luminosos atingindo a lente com três ângulos de entrada diferentes.

A situação **(a)** é aquela em que o raio entra pelo foco objeto da lente, portanto esse raio sai paralelo ao eixo óptico, e, sempre tendo em mente que estamos trabalhando dentro do limite de validade da aproximação paraxial, teremos que:

$$\varphi_1 = \frac{r_1}{f} \quad \varphi_2 = 0 \quad (3.13)$$

onde φ_1 é o ângulo que o raio de entrada faz com o eixo óptico da lente, r_1 é a distância do eixo óptico ao ponto onde o raio de entrada atinge a lente e φ_2 é o ângulo que o raio de saída faz com o eixo óptico da lente. Podemos escrever, então:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{r_1}{f} \quad (\varphi_2 = 0) \quad (3.14)$$

Na situação **(b)** o raio de entrada cruza o eixo óptico a uma distância igual à metade da distância focal da lente. Nesse caso, vamos ter:

$$\varphi_2 + \alpha + \beta = \varphi_1 \quad (3.15)$$

onde o ângulo α é o ângulo que o raio emergente da situação **(b)** faz com o prolongamento do raio incidente da situação **(a)**, e, β é o ângulo entre o prolongamento dos dois raios incidentes, o da situação **(a)** e o da situação **(b)**. Portanto:

$$\text{na situação (a): } \varphi_1 = \frac{r_1}{f} \quad (3.16)$$

$$\text{na situação (b): } \varphi_1 = \frac{r_1}{\frac{f}{2}} = \frac{2r_1}{f} \quad (3.17)$$

Observando a **figura 3.8** vemos que o ângulo $B = \varphi_1 = r_1/f$ e temos que:

$$\frac{r_1}{f} + \beta + A = 90 = A + \frac{2r_1}{f} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{r_1}{f} \quad (3.18)$$

logo $\alpha = 0$. Se isso acontece, substituindo **3.17** e **3.18** na **equação 3.15** temos:

$$\varphi_2 + 0 + \frac{r_1}{f} = \frac{2r_1}{f} \quad (3.19)$$

ou seja, nessa situação:

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{f} \quad (3.20)$$

Então, também na situação **(b)**, em que o raio atinge a lente cruzando o eixo óptico na metade da distância focal, temos que:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{r_1}{f} \quad (3.21)$$

Numa situação **(c)** em que o raio incide na lente paralelamente ao seu eixo óptico, portanto $\varphi_1 = \mathbf{0}$, teríamos:

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} \quad (3.22)$$

portanto:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{r_1}{f} \quad (3.23)$$

ou seja, **para qualquer raio incidente, pode-se provar que a diferença angular entre o raio que emerge da lente e esse mesmo raio quando atinge a lente é sempre igual a r_1/f** , o que permite usar essa relação para definir a distância focal, **f**, da lente delgada.

As equações para essa lente são:

$$r_2 = r_1 \quad (3.24)$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \varphi_1 \quad (\varphi_2 = \Delta\varphi + \varphi_1) \quad (3.25)$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Observação: Em alguns textos trabalha-se com a potência da lente, \mathbf{P} , que é definida como o inverso da distância focal.

Com o que foi apresentado, é possível, agora, descrever a imagem de um objeto formada por uma lente delgada, convergente, utilizando o método matricial. Vamos supor que o objeto se encontre a uma distância \mathbf{o} , da lente convergente de distância focal \mathbf{f} , e que a lente produza uma imagem real a uma distância \mathbf{i} da mesma. Então, tanto o deslocamento em relação ao eixo óptico quanto os ângulos, ou divergência, na posição do objeto e na posição da imagem, serão relacionados por uma equação matricial da forma:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

A matriz de transferência vai ser o produto dessas três matrizes, nessa ordem. A ordem é importante porque ela diz que a primeira matriz (a primeira matriz quer dizer a que vai multiplicar primeiro a matriz do raio incidente) a operar sobre o raio luminoso é aquela que descreve sua propagação do objeto até a lente. A segunda será a que representa a lente e a terceira é a que faz o transporte do raio da lente até a imagem. A matriz de transferência do sistema será então:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{f} & o - \frac{io}{f} + i \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{o}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Portanto:

$$r_2 = \left(1 - \frac{i}{f}\right)r_1 + \left(o - \frac{io}{f} + i\right)\varphi_1 \quad (3.29)$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{f}r_1 + \left(1 - \frac{o}{f}\right)\varphi_1$$

Todos os raios que deixam qualquer ponto do objeto vão ser trazidos para um ponto correspondente na imagem, não interessando qual era sua divergência ao deixar o objeto. Isso tem como consequência que r_2 depende de r_1 , mas não de φ_1 e, portanto, o termo superior direito da matriz de transferência é igual a zero.

O termo superior direito da matriz de transferência de uma lente é proporcional à espessura da lente (geralmente medida no seu centro), no caso das lentes delgadas esse termo é sempre nulo. O termo inferior esquerdo da matriz de transferência é o inverso da distância focal com sinal negativo, qualquer que seja a lente ou sistema de lentes. Essas características serão discutidas mais adiante quando for apresentada a descrição das lentes espessas.

É fácil verificar que o determinante da matriz de transferência final (que é a matriz produto das três matrizes da **equação 3.27**) é igual a **1**, o que está de acordo com o teorema de Liouville, e, já é uma boa indicação de que a equação matricial **3.27** deve estar correta. Se resolvermos essa equação levando em conta que, como já dissemos r_2 depende de r_1 , mas não depende de φ_1 , vamos obter:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f} \quad (3.30)$$

também conhecida como **equação de Gauss**. A distância focal é positiva em consequência das convenções adotadas para lentes

delgadas convergentes. Pode ser feito o mesmo desenvolvimento para uma lente delgada divergente.

Método Matricial Aplicado a uma Associação de lentes

Vamos, agora, associar duas lentes delgadas e através do método matricial achar a distância focal da associação.

Na **figura 3.9** está representada essa associação: lente **1** com distância focal f_1 , depois um espaço livre entre as lentes de comprimento d e a lente **2** de distância focal f_2 :

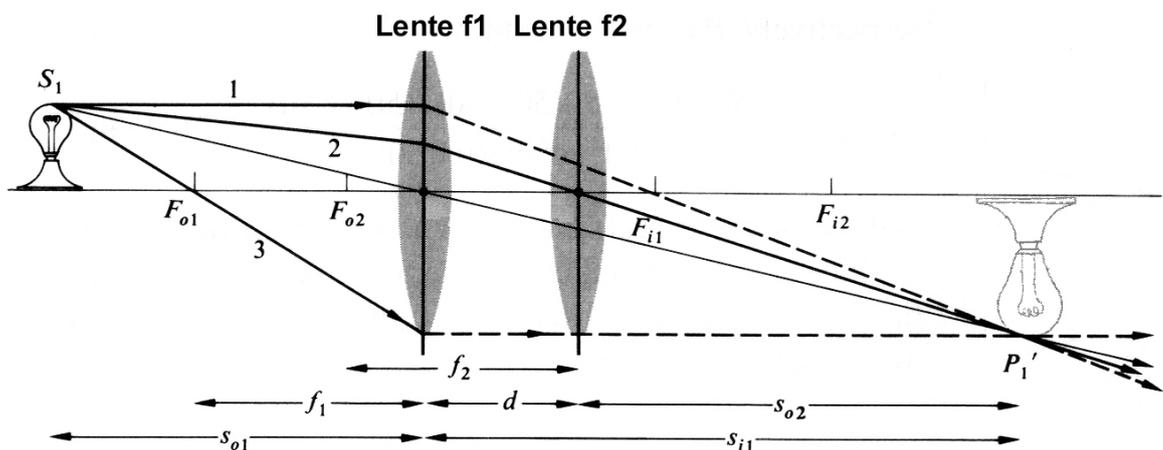


Figura 3.9: Sistema de duas lentes convergentes de distâncias focais diferentes.

Repetindo o procedimento que já foi feito, temos que escrever três matrizes: a de transferência para a lente **1**, depois a matriz para o espaço vazio entre as lentes e, finalmente a matriz de transferência para a segunda lente. A matriz de transferência da associação vai ser o produto dessas três matrizes. A “espessura” da

associação vai ser proporcional ao termo superior direito da matriz de transferência final e a distância focal da associação vai ser o inverso do termo inferior esquerdo dessa matriz, com sinal negativo.

A matriz de transferência da primeira lente convergente, é:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

A matriz do espaço entre as lentes é, **expressão 3.12**:

$$M_{esp} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

e a matriz de transferência da segunda lente convergente é dada por:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

A matriz de transferência para esse sistema vai ser o produto das três matrizes acima:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Para lembrar como se multiplicam matrizes:

$$M' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Portanto, multiplicando a matriz de transferência da primeira lente pela matriz que representa o espaço vazio entre as lentes e depois multiplicando essa matriz pela matriz de transferência da segunda lente tem-se:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) - \frac{1}{f_1} & -\frac{d}{f_2} + 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

De acordo com as **equações 3.24 e 3.25**, temos, então para r_1 , r_2 , φ_1 e φ_2 :

$$r_2 = \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) r_1 + d \varphi_1 \quad (3.37)$$

$$\varphi_2 = \left[-\frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) - \frac{1}{f_1} \right] r_1 + \left[-\frac{d}{f_2} + 1 \right] \varphi_1 \quad (3.38)$$

Como já foi mencionado, o termo superior direito da matriz de transferência da associação é proporcional à “espessura” da associação, que, como estamos tratando de um sistema de duas lentes delgadas, é a distância entre elas, que é **d**. O termo inferior esquerdo é o inverso da distância focal da associação com sinal negativo:

$$\frac{1}{f} = - \left[-\frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) - \frac{1}{f_1} \right] \quad (3.39)$$

ou seja:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (3.40)$$

Essa é a distância focal de uma associação de duas lentes delgadas.

Método Matricial Aplicado a Lentes Espessas

Podemos também, aplicar esse método a lentes cuja espessura não pode ser desprezada, como foi feito para o caso de lentes delgadas.

Vamos continuar supondo válida a aproximação paraxial, supondo que as lentes estão imersas no ar e que são construídas de material isotrópico e com índice de refração maior que o do ar. Se o material é isotrópico, podemos considerar os raios reversíveis.

Quase todas as convenções adotadas para as lentes delgadas continuam válidas para as lentes espessas, a menos das definições para as distâncias focais, distâncias do ponto objeto e do ponto imagem, que conforme se verá adiante, não podem mais ser medidas em relação ao plano que passa pelo centro da lente.

A matriz de transferência vai permitir o mesmo que para o caso das lentes delgadas, quer dizer, ela vai permitir prever como um raio incidente na lente vai emergir da mesma. Ou seja, que as propriedades de um sistema óptico sejam descritas, em termos gerais, pela localização dos seus pontos focais e de seus planos principais, cujas posições serão determinadas pelos elementos da matriz.

Para facilitar o entendimento, vamos observar a **figura 3.10** a seguir:

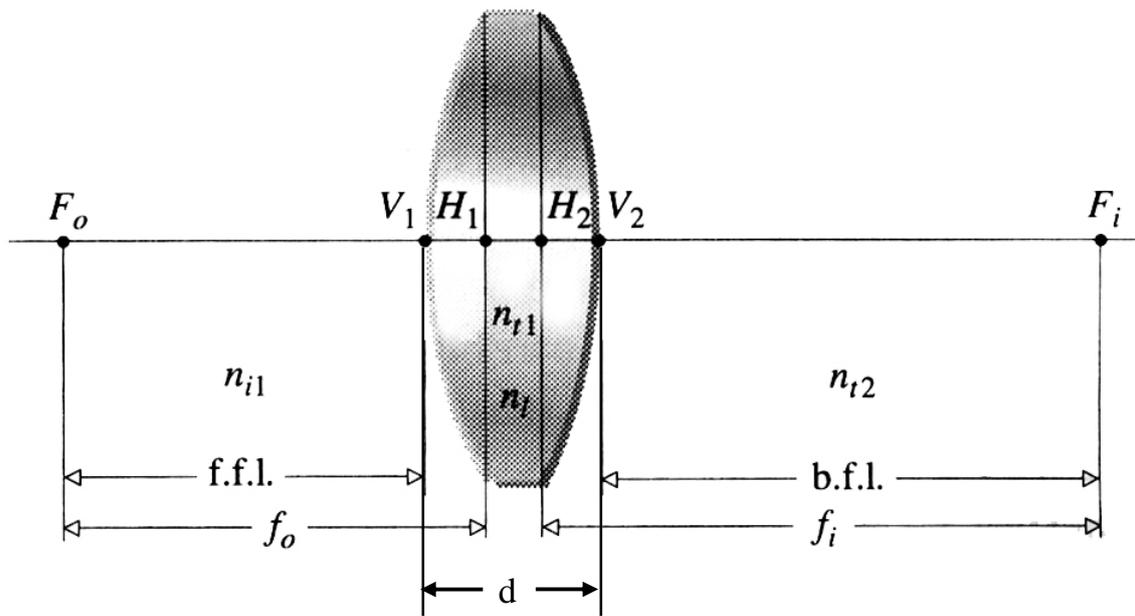


Figura 3.10: Diagrama geral para um sistema óptico espesso de espessura de índice de refração n_t .

A **figura 3.10** define os parâmetros de entrada e saída do raio luminoso na lente de espessura d : r_1 é a distância, em relação ao eixo óptico, em que o raio incidente atinge a lente; φ_1 é o ângulo que o raio incidente faz com o eixo óptico; r_2 é a distância, em relação ao eixo óptico, do ponto onde o raio emergente sai da lente; φ_2 é o ângulo que o raio emergente faz com o eixo óptico.

A **figura 3.11** mostra a trajetória verdadeira de dois raios luminosos provenientes de um objeto:

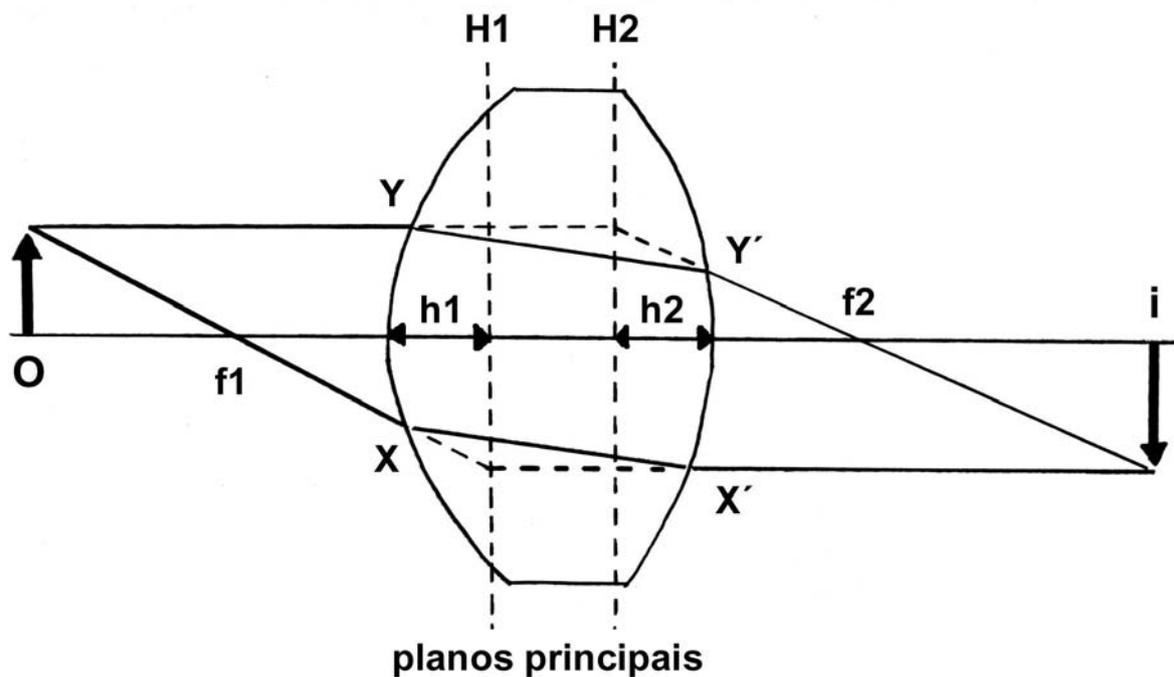


Figura 3.11: Diagrama ilustrando a propagação de raios luminosos através de uma lente espessa.

Nessa figura fica evidente a dificuldade em relação à medida das distâncias focais e distâncias da imagem e do objeto em relação à lente. Na lente delgada essas distâncias foram medidas em relação ao plano que passa pelo centro da lente, isso significa que estamos considerando que as duas refrações, uma em cada superfície da lente, estão ocorrendo num só ponto que pertence ao plano que passa pelo centro da lente. Se a lente é suficientemente fina, o erro que se estará cometendo não é muito significativo. Mas, para uma lente espessa, as duas refrações, uma na primeira e outra na segunda superfície estão afastadas o suficiente uma da outra para não permitir que se considere que toda a refração ocorre num ponto do plano central. O erro que se estaria cometendo seria muito grande.

Por outro lado seria interessante poder adaptar os conceitos que funcionam para a lente delgada para o caso de lentes espessas. **Será que é possível continuar afirmando, como fizemos, que o**

raio que entra paralelo ao eixo óptico emerge passando pelo foco?

Observando a **figura 3.12** a seguir, podemos dizer que essa afirmação é correta se, ao invés de considerarmos que essa mudança de direção ocorre no plano central, dissermos que ela ocorre num ponto imaginário H_2 que é o ponto de interseção dos prolongamentos do raio incidente na primeira superfície e do raio emergente da segunda superfície. Esse ponto H_2 pertence a um plano imaginário que recebe o nome de plano principal da lente e é perpendicular ao eixo óptico. Nota-se que quanto mais espessa for a lente mais esse plano estará afastado do plano central.

A mesma discussão se aplica para o raio que atinge a lente passando pelo foco e que deve emergir paralelo. Na **figura 3.12** vemos que essa afirmação pode continuar válida se considerarmos que a mudança total de direção que o raio sofre ao atravessar a lente vai ocorrer num ponto imaginário, que é a interseção dos prolongamentos do raio incidente na primeira superfície e o raio emergente da segunda superfície. Esse ponto é o ponto H_1 que pertence a um outro plano imaginário que também recebe o nome de plano principal da lente. Uma lente espessa tem, portanto, dois planos principais.

A **figura 3.12** é um esquema de uma seção de uma lente e dos seus planos principais, com a trajetória imaginária dos dois raios luminosos discutida acima.

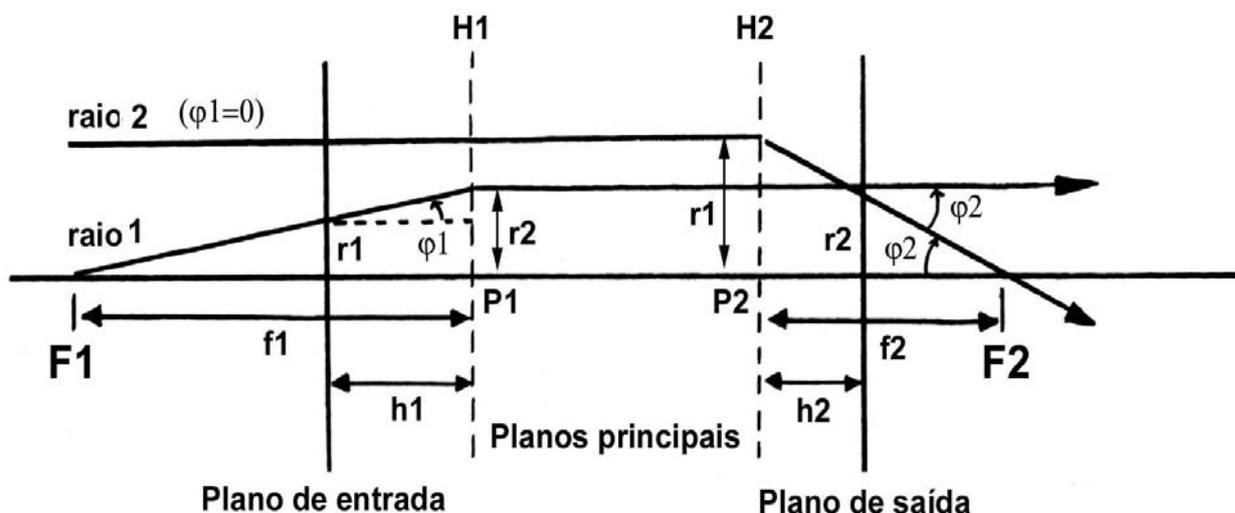


Figura 3.12: Esquema da trajetória virtual de dois raios luminosos através de uma lente espessa.

O raio que passa pelo primeiro ponto focal F_1 vai emergir da lente paralelo ao eixo óptico. Um raio incidente paralelo ao eixo óptico que atinja a lente vai emergir dela passando pelo seu segundo ponto focal F_2 . Esses dois raios, raio **1** e raio **2**, que estão desenhados na **figura 3.12** são chamados de raios principais do sistema óptico. A interseção dos planos principais com o eixo óptico define os pontos principais P_1 e P_2 para esse sistema. As linhas tracejadas nessa figura, que vão permitir a construção geométrica dos raios emergentes **1** e **2**, são chamadas de caminhos virtuais desses raios dentro da lente.

Da mesma forma que para o caso das lentes delgadas, os pontos focais se encontram sobre o eixo óptico da lente.

Podemos agora definir os demais parâmetros para uma lente espessa:

- a distância f_1 é a distância entre o primeiro ponto focal F_1 e o primeiro plano principal; ela é chamada de primeira distância focal dessa lente
- a distância f_2 é a distância entre o segundo ponto focal F_2 e o segundo plano principal; ela é chamada de segunda distância focal dessa lente
- como a lente está imersa num meio isotrópico (o meio tem o mesmo índice de refração de cada lado da lente) $f_1 = f_2$
- h_1 é a distância entre o plano em que o raio atinge a lente, ou plano de entrada e o primeiro plano principal
- h_2 é a distância entre o segundo plano principal e o plano em que o raio emerge da lente, ou plano de saída
- a distância do objeto ao primeiro plano principal é chamada de o
- a distância da imagem ao segundo plano principal é chamada de i
- cada superfície esférica de uma lente tem um raio de curvatura R . O raio de curvatura será positivo se a superfície atingida pelo raio luminoso ao se propagar for côncava; e o raio de curvatura será negativo se a superfície atingida pelo raio luminoso em seu caminho for convexa. O raio de curvatura será infinito quando corresponder a uma face plana.

Vamos construir as matrizes que descrevem essa trajetória virtual. Primeiro vamos escrever a matriz do raio $\mathbf{1}$ que começa no ponto F_1 e vai até H_1 , para esse raio, φ_2 é igual a zero:

$$\begin{aligned} r_2 &= Ar_1 + B\varphi_1 \\ \varphi_2 &= Cr_1 + D\varphi_1 \end{aligned} \tag{3.41}$$

r_1 é definido como a distância do eixo óptico ao ponto em que o raio atinge o plano de entrada da lente. φ_1 é o ângulo que o raio incidente faz com o eixo óptico. r_2 é a distância entre o eixo óptico e o ponto onde prolongamento do raio incidente cruza o primeiro plano

principal da lente. Então, como fica evidente na **figura 3.12** (sempre dentro da aproximação paraxial):

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + h_1 \varphi_1 \\ \varphi_2 &= Cr_1 + D\varphi_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

mas, como podemos ver na **figura 3.12**:

$$\varphi_1 = \frac{r_1}{(f - h_1)} \quad (3.43)$$

Por outro lado, para o raio **2**, φ_1 é igual a zero e sempre estamos trabalhando com a mesma notação para os parâmetros, ou seja r_1 e φ_1 para a entrada e r_2 e φ_2 para a saída. Assim, na mesma **figura 3.12**:

$$\begin{aligned} r_2 &= Ar_1 \\ \varphi_2 &= Cr_1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

da **figura 3.12** vê-se que:

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} \quad (3.45)$$

Portanto, como já tinha sido visto antes, o elemento **C** é igual a **C = -(1/f)**. Da **expressão 3.42** podemos escrever:

$$Cr_1 = -D\varphi_1 \quad (3.46)$$

substituindo **3.42** e **C = - 1/ f** na equação acima , vamos obter:

$$h_1 = \frac{D-1}{C} \quad (3.47)$$

Analogamente pode-se deduzir que h_2 é dado por:

$$h_2 = \frac{A-1}{C} \quad (3.48)$$

Portanto, uma vez tendo a matriz de transferência da lente espessa, temos automaticamente as posições de seus dois planos principais, através de h_1 e h_2 .

Agora vamos construir a matriz de transferência para uma lente espessa como a da **figura 3.13** na página a seguir.

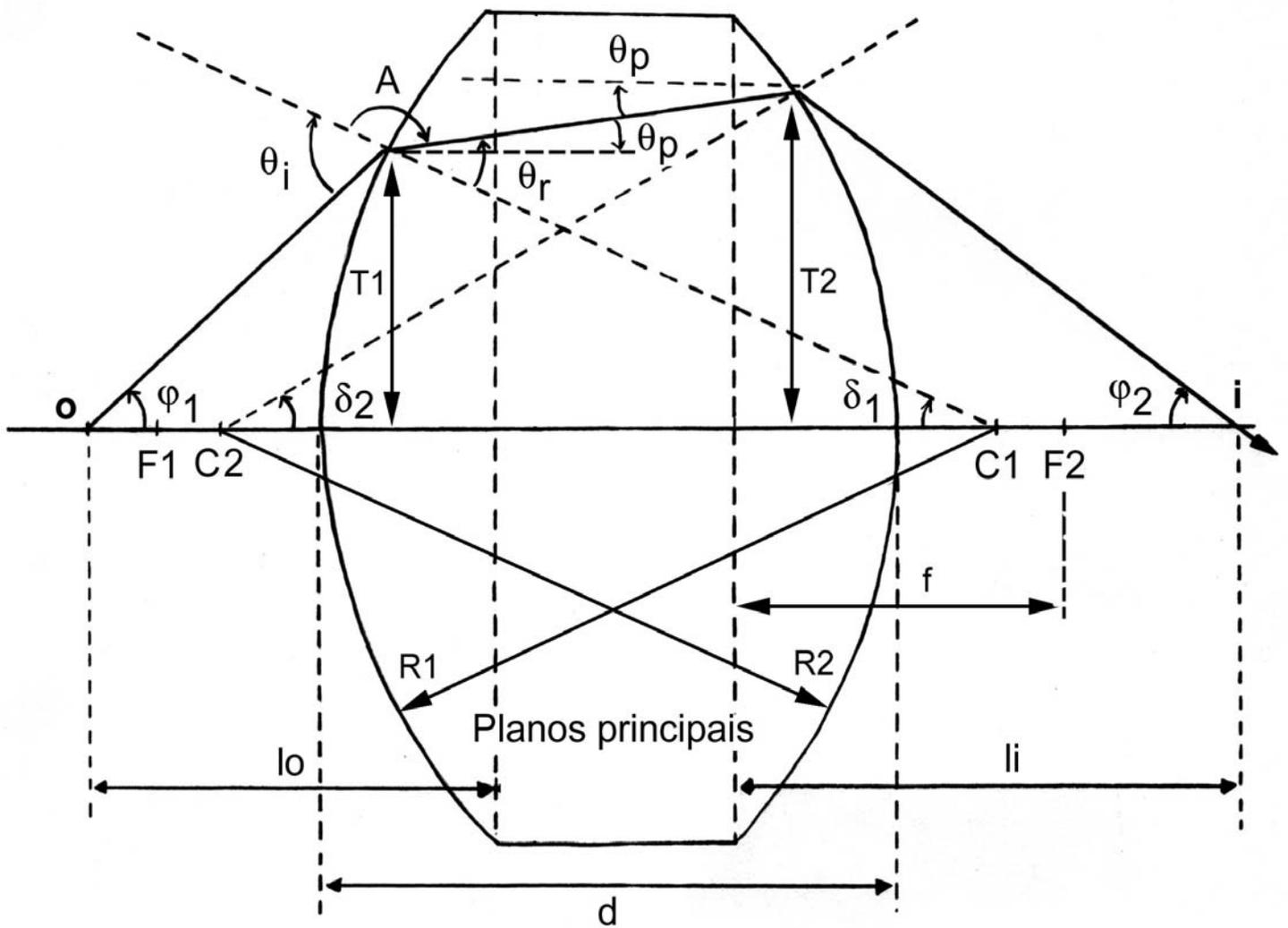


Figura 3.13: Diagrama que ilustra a propagação de um raio luminoso através de uma lente espessa.

Essa matriz vai ser o produto de três matrizes de transferência:

M_1 é a matriz para a primeira superfície esférica atingida pelo raio luminoso.

\mathbf{M}_2 é a matriz que descreve o caminho do raio luminoso no meio da lente (espessura \mathbf{t}).

\mathbf{M}_3 é a matriz que representa a segunda interface esférica.

$$M = M_3 M_2 M_1 \quad (3.49)$$

Notar a ordem dessas matrizes (essa ordem já foi observada antes, para a lente delgada), \mathbf{M}_1 é a última à direita porque ela opera primeiro no raio incidente, representando a primeira superfície que ele encontra.

Na primeira superfície esférica encontrada pelo raio luminoso pode-se (considerando a aproximação paraxial e $\mathbf{n}_{ar} = \mathbf{1}$) obter:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \delta_1 + A &= 180 = \theta_i + A \\ \text{ou} \quad \varphi_1 + \delta_1 &= \theta_i \end{aligned} \quad (3.50)$$

Aplicando a lei de Snell:

$$\varphi_1 + \delta_1 = n\theta_r = n(\theta_p + \delta_1) \quad (3.51)$$

mas, como $\delta_1 = \mathbf{r}_1 / \mathbf{R}_1$, podemos reescrever **3.51** como:

$$\theta_p = \frac{(1-n)r_1}{nR_1} + \frac{\varphi_1}{n} \quad (3.52)$$

$$r_1 = r_1$$

Então a matriz na primeira interface fica:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Podemos usar a definição de potência, P , de uma superfície refratora, $P_1 = (n-1)/R_1$ (R_1 que é o raio de curvatura da primeira superfície é medido em metros e a potência, P_1 , é metro^{-1} ou dioptria). A **matriz 3.52** fica, então:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{P_1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Na aproximação paraxial considera-se que todos os raios que passam pela lente espessa atravessam a mesma distância, t , dentro da lente. Nesse caso M_2 será (**matriz do espaço vazio 3.12**):

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

A matriz M_3 que representa a segunda superfície refratora, tem o mesmo formato de M_1 , apenas levando-se em conta que o raio vem de um meio com índice de refração n e vai para um meio de índice de refração 1 (o contrário da primeira superfície) e que o raio de curvatura da segunda superfície é R_2 :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & n \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Finalmente a matriz de transferência da lente espessa considerada vai ser o produto das três matrizes M_1 , M_2 e M_3 :

$$M = M_3 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{tP_1}{n} & \frac{t}{n} \\ \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2 & 1 - \frac{tP_2}{n} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Sabemos que a distância focal dessa lente está relacionada ao elemento inferior esquerdo da matriz de transferência:

$$-\frac{1}{f} = \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2 \quad (3.58)$$

$$f = \left[P_1 + P_2 - \frac{tP_1P_2}{n} \right]^{-1} \quad (3.59)$$

Como $P_1 = (n-1)/R_1$ e $P_2 = (1-n)/R_2$ podemos substituir na equação acima para obter a distância focal f em termos dos raios de curvatura R_1 e R_2 :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{(n-1)^2}{n} \left[\frac{t}{R_1R_2} \right] \quad (3.60)$$

A espessura da lente é proporcional ao elemento superior direito da matriz de transferência que é (t/n) , onde t é, de fato, a espessura da lente.

As distâncias h_1 (do plano de entrada ao primeiro plano principal da lente) e h_2 (do segundo plano principal ao plano de saída da lente) podem agora ser calculadas, através das expressões 3.47 e 3.48 e da matriz de transferência 3.57:

$$h_1 = \frac{t}{n \left(1 + \frac{P_1}{P_2} - t \frac{P_1}{n} \right)} \quad (3.61)$$

$$h_2 = \frac{t}{n \left(1 + \frac{P_2}{P_1} - t \frac{P_2}{n} \right)} \quad (3.62)$$

Vamos ver o que acontece com a matriz de transferência se considerarmos $t=0$, ou seja, uma lente delgada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1 + P_2) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

substituindo os valores de P_1 e P_2 e considerando que o elemento inferior esquerdo é menos o inverso da distância focal da lente delgada, vamos obter:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \quad (3.64)$$

essa equação é conhecida como a **equação do fabricante** para uma lente delgada cujas superfícies têm raios de curvatura R_1 e R_2 . Para ter o foco correto deve-se levar em conta as convenções de sinais adotadas.

Procedimento experimental

Existe um aplicativo instalado nos micros do laboratório chamado **ray trace**. Esse programa calcula a trajetória dos raios luminosos provenientes de um objeto ou fonte escolhida através de lentes ou sistemas de lentes. Antes de começar as medidas seria instrutivo simular os sistemas que vão ser estudados, que serão descritos a seguir.

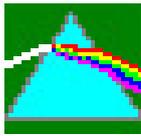
Determinação da distância focal da lente convergente

Utilizando o banco óptico colocado à disposição, medir os parâmetros necessários para a determinação da distância focal da lente. Considerando as aproximações paraxial e de lente delgada válidas, medir a posição da imagem em relação à lente, para várias posições diferentes do objeto em relação à lente. Medir também, para cada posição do objeto, a altura da imagem. Anotar a altura do objeto. Calcular a magnificação transversal da lente em cada caso.

Fazer um gráfico do inverso da posição da imagem contra o inverso da posição do objeto e desse gráfico extrair um valor médio para a distância focal da lente. Comparar com o valor nominal.

Comparar com a simulação feita com o programa **ray trace**. Nesse programa a distância focal é um dado de entrada, então forneça a distância focal que mediu e uma das posições medidas do objeto e compare a posição da imagem medida com a posição da imagem simulada.

Veja na **figura 3.14** a seguir o ícone do programa **ray trace** e uma planilha do mesmo.



Raytrace

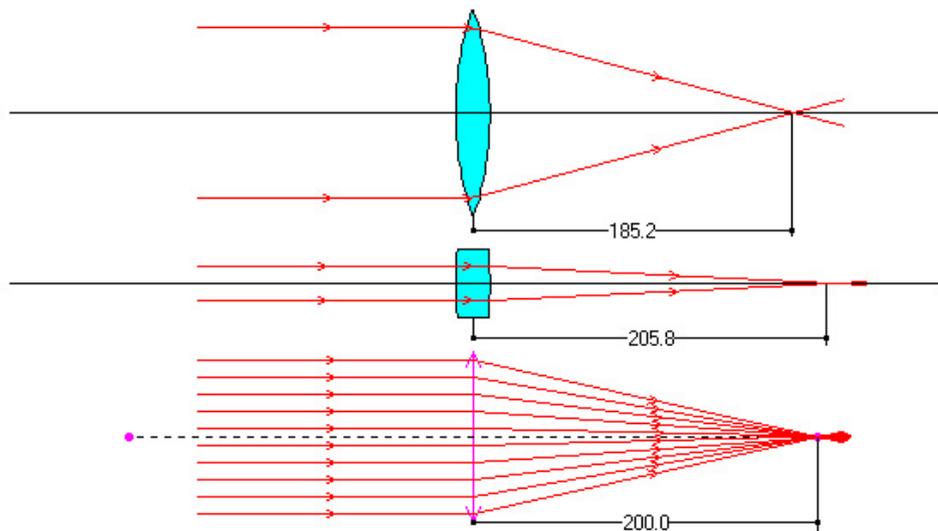


Figura 3.14 : Raytrace

Em todo o procedimento é importante fazer uma avaliação cuidadosa dos erros experimentais envolvidos. É fácil verificar que nem sempre o critério que adota como erro experimental a metade da menor divisão da escala do aparelho de medida corresponde à realidade. Para ter uma idéia dos erros envolvidos na determinação das distâncias **i** e **o**, desloque levemente para frente e para trás o anteparo em torno do ponto imagem. Ter em mente que tanto **(1/i)** quanto **(1/o)** são números pequenos e aproximações que parecem pequenas podem ser percentualmente significativas.

Calcular o índice de refração da lente, através da **expressão 3.64** e comparar com valor tabelado para o vidro. Em seguida calcular esse mesmo índice utilizando a **expressão 3.60** que leva em conta a espessura da lente. Compare os resultados e discuta a validade da aproximação de lente delgada nesse contexto.

Valores de índices de refração para diversos tipos de vidro estão tabelados no **Handbook of Chemistry and Physics** do qual existe uma cópia na sala dos técnicos do laboratório. Para a medida dos raios de curvatura da lente, existe um dispositivo específico, chamado relógio comparador, na sala dos técnicos e para a medida da espessura da lente, usar um micrômetro (também na sala dos técnicos) e medir a região mais espessa da lente.

Fazer o cálculo da posição dos planos principais para essa lente para verificar se a aproximação de lente delgada é válida nesse caso. Esse cálculo pode ser feito com as **equações 3.61** e **3.62** que permitem calcular as distâncias h_1 e h_2 e através delas a posição dos dois planos principais. A seguir simular com o **ray trace** a sua lente. Esse programa permite a identificação dos planos principais. Compare os resultados obtidos e comente (quantitativamente) sobre a validade da aproximação de lente delgada para o cálculo da distância focal dessa lente.

Determinação da distância focal da lente divergente dentro da aproximação de lente delgada

Para determinar a distância focal de uma lente divergente, na aproximação de lente delgada, não vai ser possível proceder como no caso da lente convergente, porque a imagem formada é virtual. Vai ser necessário o auxílio de uma lente convergente. Podemos imaginar que a imagem virtual da lente divergente vai servir de objeto real para a lente convergente que produz uma imagem real desse objeto.

Se a distância focal da lente convergente auxiliar for conhecida, assim como a distância entre as lentes, com os demais parâmetros passíveis de serem medidos, pode-se calcular a distância focal da lente divergente. Como a lente convergente tem que ser conhecida, utilize aquela cuja distância focal já determinou na primeira parte desta experiência.

Faça algumas medidas para diferentes posições do objeto em relação à lente divergente. Calcule a distância focal média para essa lente e compare com o valor nominal que pode ser obtido com seu professor.

Com o programa **ray trace** construa a trajetória dos raios para esse sistema de lentes fornecendo ao programa os valores das distâncias focais das lentes convergente e divergente (valor medido) e simulando uma das configurações que mediu. Compare os valores da distância da imagem medido e simulado. Repare no verdadeiro caminho dos raios luminosos através desse sistema de lentes.

Construção de um sistema para aumentar o diâmetro de um feixe de raios paralelos

Vamos imaginar que temos a necessidade de aumentar o diâmetro de um feixe luminoso. Por exemplo, queremos aumentar o diâmetro de um feixe de laser.

Uma possibilidade é fazer esse feixe passar por um sistema de duas lentes convergentes. Mas esse sistema não pode ser qualquer, pois as lentes têm que ter distâncias focais definidas e espaço entre elas definido para se obter o aumento desejado, mantendo o feixe paralelo. Antes de montar as lentes com o laser, pode-se descobrir, através da matriz de transferência de um sistema de duas lentes delgadas separadas por uma distância **d**, **equações 3.37 e 3.38**, que condições devem ser satisfeitas para que o feixe de saída seja paralelo. Além disso, pode-se também determinar de que parâmetros do sistema depende o valor do aumento.

Com as duas lentes colocadas à sua disposição (portanto as distâncias focais estão definidas) determinar o espaçamento entre elas e qual seria o aumento, satisfazendo a condição de que o paralelismo do feixe não seja perdido.

A seguir monte o sistema de lentes na configuração prevista pelos cálculos anteriores. Faça incidir o feixe de luz laser num anteparo para medir seu diâmetro, e, em seguida, coloque o sistema de lentes na frente do laser e verifique se os resultados estão de acordo com o previsto.

Se houver tempo, repetir o procedimento para um sistema constituído de uma lente divergente e uma convergente. Qual deve ser a ordem de colocação das lentes em relação ao laser?

Pergunta: Apesar do resultado final obtido com os dois sistemas acima, em termos de se obter um feixe paralelo com diâmetro maior, ser o mesmo, existe uma diferença importante

e básica na característica do feixe final. Qual seria essa diferença?

Finalmente fazer a simulação desses dois sistemas para aumento do diâmetro do feixe incidente com o programa **ray trace** e comparar os resultados com as previsões teóricas e medidas experimentais. Essa simulação pode ajudar na resposta da pergunta acima.

Determinação da distância focal de um sistema de duas lentes convergentes separadas por uma distância d

Calcular através da **equação 3.40** a distância focal de um sistema de duas lentes convergentes de distâncias focais f_1 e f_2 conhecidas, separadas por uma distância d , considerando válidas as aproximações paraxial e de lente delgada.

Em seguida fazer a simulação com o programa **ray trace** e obter o valor esperado para o foco da associação.

Experimentalmente seria muito difícil determinar a distância focal de uma associação porque não se poderia medir a distância da imagem i , e a distância do objeto o , em relação ao plano que passa pelo centro da associação, mas seria necessário identificar as posições dos planos principais dessa associação, através da matriz de transferência e medir i e o em relação a eles.

Compare os resultados teórico e simulado.

Simulação com o programa "ray trace" para lentes espessas

Desenhar uma lente grossa e fazer incidir um feixe de raios paralelos. Verificar o que ocorre quando se aumenta muito o diâmetro desse feixe. Comentar o que observou.

A seguir faça incidir nessa mesma lente, raios com comprimentos de onda diferentes. Relatar o que observou e comentar.

Ainda na mesma lente faça incidir um raio cujo ângulo de incidência obedeça à aproximação paraxial. Usando os recursos do programa meça o ângulo de incidência e a posição de entrada do raio na lente, assim como o ângulo e posição do raio emergente. Coloque os parâmetros da lente, mais o índice de refração na matriz de transferência de uma lente espessa (**3.57**), coloque os valores dos parâmetros do raio incidente e calcule os parâmetros do raio emergente. Compare com os valores fornecidos pelo **ray trace**.