Mecânica Quântica

Ferramentas Matemáticas

I. Prove que as componentes de um vetor em uma determinada base são únicas.

II. Um desigualdade muito útil é a desigualdade de Schwarz, dada por:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$$

Utilizando $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ e $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}|\alpha\rangle$, prove esta desigualdade.

III. Utilizando a desigualdade de Schwarz, prove que $\||\alpha\rangle + |\beta\rangle\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ (desigualdade triangular).

IV. Mostre que $[A, B] = -[B, A]$.

V. Dado os vetores $|u\rangle = (1 + 3i)|a\rangle + (2 + i)|b\rangle$ e $|v\rangle = (3 + 3i)|a\rangle + |b\rangle$ calcule:

a) $|u\rangle + |v\rangle$;
b) $2|u\rangle - 3|v\rangle$;
c) $\langle u|v\rangle$;
d) $\langle v|u\rangle$;
e) mostre que esses vetores satisfazem a desigualdade de Schwarz;
f) mostre que esses vetores satisfazem a desigualdade triangular.

VI. Dado os operadores $X|\phi\rangle = x|\phi\rangle$ e $P|\phi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}|\phi\rangle$, calcule $[X, P]$.

VII. Certo sistema físico é descrito no espaço $\mathbb{R}^3$. Sendo $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ uma base ortogonal nesse espaço. Os kets $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ são definidos como:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$$

Verifique se esses Kets são normalizados e escreva-os na forma matricial.