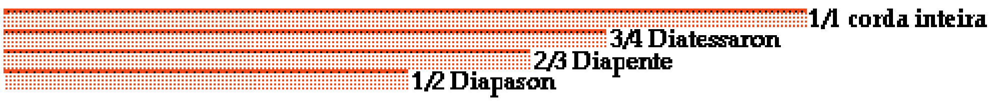
PITÁGORAS E A ESCALA MUSICAL

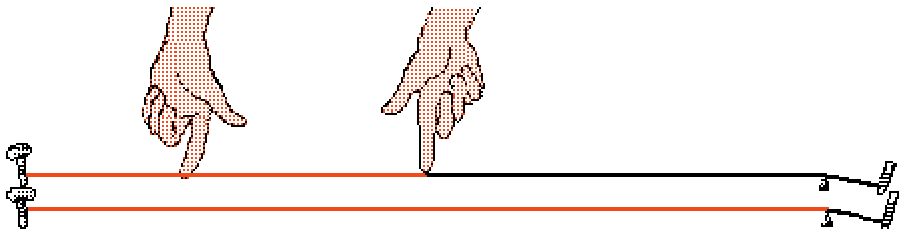
Paulo de Tarso Salles

CMU-ECA/USP, 2009

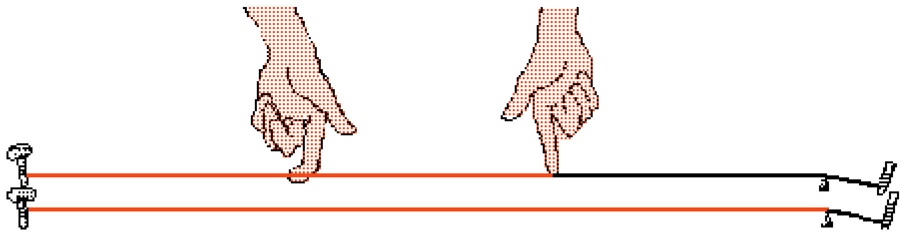
O matemático e filósofo Pitágoras de Samos (V A.C.) é um personagem cuja história real ainda não foi esclarecida. Os estudos atribuídos a ele costumam ser repartidos entre seus discípulos que constituíram uma escola chamada Pitagorismo (TOMÁS, 2002, pp. 85-106).

O Pitagorismo ofereceu uma importante contribuição para a teoria musical na Grécia Clássica, explicando as propriedades da divisão da corda na formação da escala musical e regulando a afinação dos instrumentos e a concepção dos modos. Segundo consta, Pitágoras teria realizado esses cálculos a partir de experiências com um instrumento musical simples, o *monocórdio*, onde as operações de divisão da corda resultaram na definição dos graus da escala musical.

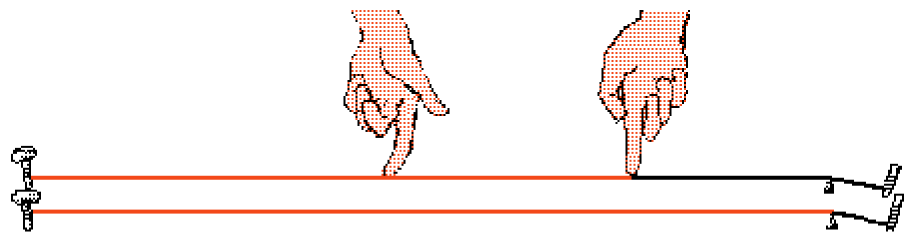




Divisão da corda em oitava: 1:2



Divisão da corda em quinta: 2:3



Divisão da corda em quarta: 3:4

Fig. 1: as divisões da corda ao monocórdio. Ilustrações obtidas em: http://www.aboutscotland.co.uk/harmony/prop.html

Uma seqüência de cálculos simples, envolvendo as operações aritméticas básicas, resulta na escala pitagórica:

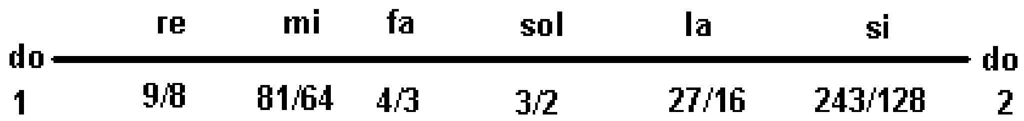


Fig. 2: escala pitagórica.

Tal escala foi obtida a partir da proporção (*ratio*) de oitava, 1:2. Para chegar-se a outros sons, é preciso multiplicar por 3. A corda, dividida em três partes resulta na quinta. Para fazer o 3 caber entre 1 e 2, basta dividir 3 por 2. O resultado é 3/2, a proporção da quinta.

A obtenção da nota fá é feita pela noção de simetria entre dó (1) e sol (3/2), resultando 2/3. Este seria o fá da oitava inferior, uma quinta abaixo do dó (1). Para calcular o fá da oitava superior (segunda abaixo do sol 3/2) basta multiplicar 2/3 por 2, resultando o fá 4/3 mostrado na figura acima.

Outra forma de chegar a esse resultado é prosseguir multiplicando por 3, o que gera um ciclo de quintas:

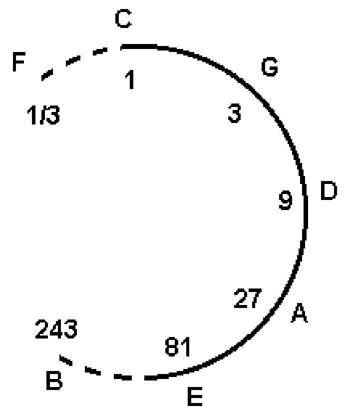


Fig. 3: um ciclo de quintas gerado pela multiplicação por 3.

Assim, para ajustar estas proporções dentro de uma oitava (ou seja, no interior da relação 2:1) temos a progressão baseada nas multiplicações por 2, vista nos denominadores das frações da escala (fig. 1): 2, 8, 16, 64, 128.

A CLASSIFICAÇÃO DAS CONSONÂNCIAS E DISSONÂNCIAS

Para os gregos, as consonâncias eram as relações entre freqüências cujos números estivessem contidos na *tetraktys*:

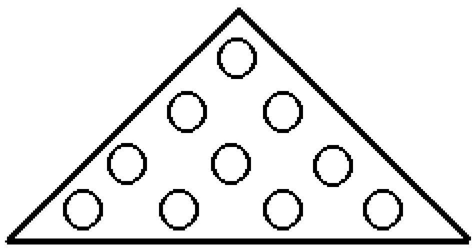


Fig. 4: a *tetraktys* grega: 1+2+3+4=10.

Disso resulta que na teoria musical grega as consonâncias eram a oitava, a quinta e a quarta, consideradas até hoje intervalos *Justos* ou *Perfeitos*. Pelo sistema pitagórico, as terças e sextas são dissonantes, o que prevaleceu como regra de contraponto até o século XV.[1] Tome-se a *Missa de Notre Dame* (escrita por volta de 1300) de Guillaume de Machaut como exemplo (fig. 5).

[1] Os cálculos atribuídos a Pitágoras chegaram à Idade Média pelas traduções e compilações de Boécio.

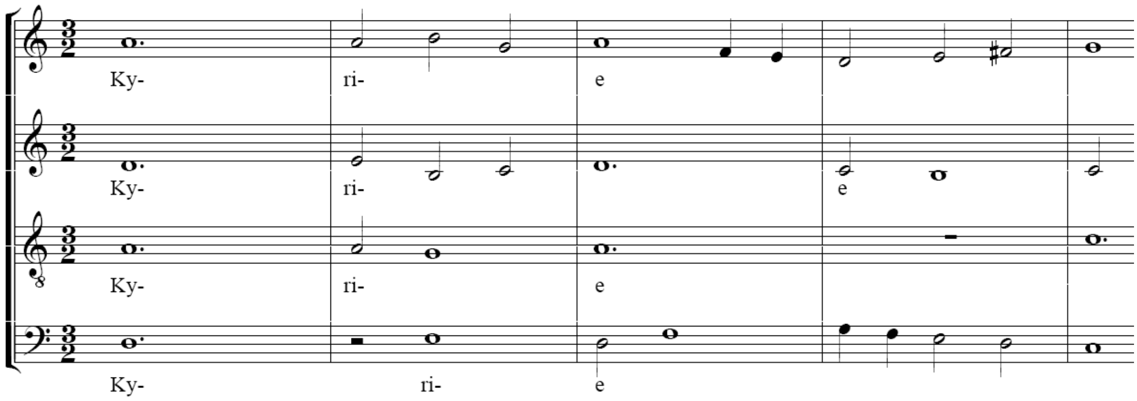


Fig. 5: início do *Kyrie* da *Missa de Notre-Dame*, de Guillaume de Machaut.

Escala Mesotônica

O sistema pitagórico privilegiava as quintas, em detrimento das terças. Por isso, mesmo na Grécia Clássica já surgiram teóricos como Arquitas e Aristoxeno (séc. IV a.C), ambos da cidade de Tarento, preocupados com aspectos perceptíveis do som, como a ressonância da 3ª M na série harmônica. Esse fenômeno ainda não era explicado àquela época, mas mesmo assim esse problema com as terças pitagóricas era sensível.

> *[...] a terça maior pitagórica é maior ou "mais alta" que a terça maior justa na razão de 81/80 [...], a terça menor pitagórica é menor ou "mais baixa" que a terça menor justa exatamente na mesma razão de 81/80 (MENEZES, 2004, p. 247).*

Essa diferença na ordem de 81/80 é chamada de *coma sintônica*. Com a canonização do Pitagorismo[2] tais teorias caíram no esquecimento, sendo retomadas no século XVI. Para corrigir a desafinação das terças pitagóricas utilizou-se o cálculo das médias aritmética, geométrica e harmônica.

A tríade do-mi-sol tinha a terça e a quinta obtidas a partir da média aritmética vista na proporção (a+b)/2. Assim o sol ainda permanece com a proporção 3/2, sendo a média aritmética entre as oitavas (1 e 2). A terça (mi) será a média aritmética entre sol (3/2) e dó (1, ou 2/2), resultando em 5/4. O ré, pela média aritmética entre dó e mi será igual a 9/8.

[2] Aristoxeno, discípulo de Arquitas, tornou-se um adversário de seu antigo mestre, em oposição à tradição pitagórica. Durante a Idade Média o Pitagorismo tardio prevaleceu.

O fá se obtém pela média harmônica, ou seja, o inverso dos inversos da média aritmética entre a oitava (1:2) (fig. 6):

$$\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}}{2}} \qquad \frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \qquad 1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

Fig. 6: cálculo da média harmônica entre a oitava (fá)

O resultado bate com o cálculo de Pitágoras: 4/3. A nota lá é resultado da média ponderada entre este fá e dó-mi (terças maiores). E o si, pela analogia entre mi-fá e si-dó.

A ESCALA JUSTA, OU GAMA DE ZARLINO

Também com o objetivo de corrigir a sonoridade das terças pitagóricas, Gioseffo Zarlino (1517-1590) – o principal teórico da música no Renascimento – propôs a ampliação das proporções da *Tetraktys* para o *Senario*, fazendo com que os intervalos de terça e sexta passassem a ser considerados como consonâncias. Supõe-se que essa tendência da música renascentista se deva a uma “percepção coletiva, consciente ou inconsciente” (MENEZES, 2004, p. 251) da propagação dos primeiros harmônicos, onde a sonoridade da terça é bem presente.

O TEMPERAMENTO IGUAL

O fato de os sistemas de afinação Pitagórico e o proposto por Zarlino resultarem não propriamente num *círculo* de quintas, mas em uma *espiral* (fig. 7), levou à proposição de uma *afinação igualmente temperada*, onde apenas a Oitava permanece como um intervalo puro, sem arredondamentos. Supõe-se que a composição do *Teclado Bem-Temperado* de J. S. Bach (cujo 1º volume é de 1722) seja uma aplicação prática dessas proposições matemáticas e acústicas, embora a expressão “bem-temperado” sugira um temperamento mais flexível, desigual (MENEZES, 2004, pp. 263-4).

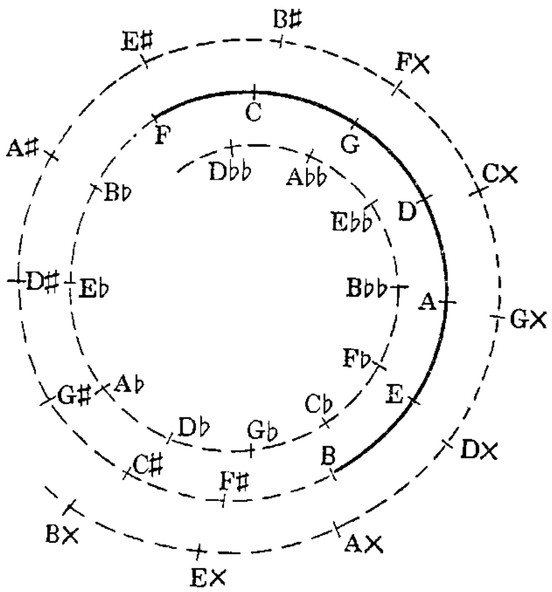


Fig. 7: a espiral resultante do ciclo de quintas naturais ou *Pitagóricas* (extraído de JEANS, 1968, p. 166). Observe-se que os sons que hoje consideramos “enarmônicos” como Dó$^{\#}$ e Ré$^{\flat}$ possuem alturas diferentes.

No sistema igualmente temperado as proporções são obtidas por um fator numérico resultante da $\sqrt[12]{2}$, ou seja: 1,05946, ou simplesmente 1,06 (fig. 8).

Frequency ratios within the octave

$c = 1$

$c\sharp = 1{\cdot}05946$	$g = (1{\cdot}05946)^7 = 1{\cdot}4983$
$d = (1{\cdot}05946)^2 = 1{\cdot}1225$	$g\sharp = (1{\cdot}05946)^8 = 1{\cdot}5874$
$d\sharp = (1{\cdot}05946)^3 = 1{\cdot}1892$	$a = (1{\cdot}05946)^9 = 1{\cdot}6818$
$e = (1{\cdot}05946)^4 = 1{\cdot}2599$	$a\sharp = (1{\cdot}05946)^{10} = 1{\cdot}7818$
$f = (1{\cdot}05946)^5 = 1{\cdot}3348$	$b = (1{\cdot}05946)^{11} = 1{\cdot}8877$
$f\sharp = (1{\cdot}05946)^6 = 1{\cdot}4142$	$c' = (1{\cdot}05946)^{12} = 2{\cdot}0000$

Fig. 8: razões entre os semitons do sistema igualmente temperado (extraído de JEANS, 1968, p. 25).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDONOUR, O. J. *Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras, 2002.

HELMHOLTZ, H. *On the sensations of tone*. New York: Dover, 1954.

JEANS, J. *Science and Music*. New York: Dover, 1968.

MASSIN, J. e MASSIN, B. *História da Música Ocidental*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

MENEZES, F. *A acústica musical em palavras e sons*. São Paulo: Ateliê Editorial, 2004.

TOMÁS, L. *Ouvir o lógos: música e filosofia*. São Paulo: Editora da UNESP, 2002.