



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

---

## *Material de apoio ao arquivo TutorialTorcaoCirc.m*

Este material de apoio tem como objetivo a apresentação da resolução numérica do problema de torção de um eixo de seção transversal circular de diâmetro  $D$ . Considere que a seção transversal esteja contida no plano  $yz$  e que o único esforço atuante no eixo são momentos torçores de intensidade  $T$  aplicado em suas extremidades.

O momento polar de inércia da seção transversal em estudo é:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} \quad (1)$$

É conhecido que, para este problema, a seção transversal está submetida apenas a tensões de cisalhamento  $\tau$ . Mais ainda, a direção da tensão de cisalhamento é tangente à circunferências concêntricas ao contorno da seção transversal. A intensidade da tensão de cisalhamento é:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad (2)$$

onde  $r$  é a coordenada radial do ponto onde deseja-se avaliar a tensão de cisalhamento. Note que  $\tau = \tau(r)$ .

Neste exemplo, faremos uso de coordenadas polares, porém existem outras formas de abordagem do problema. Após a definição de vetores descritivos das coordenadas radial e angular dos pontos, constrói-se uma malha no domínio  $(r, \theta)$  por meio do comando *meshgrid*.

Em seguida, utilizando-se a saída da malha, calcula-se a tensão de cisalhamento, também no domínio  $(r, \theta)$ . No entanto, a visualização das componentes de tensão é mais simplificada quando feita em coordenadas cartesianas. Para tanto, converte-se a malha no domínio  $(r, \theta)$  para o domínio  $(y, z)$  através do comando *pol2cart*.

Agora, é preciso converter os valores da tensão  $\vec{\tau} = \tau \vec{e}_\theta$  para uma representação em coordenadas cartesianas. Isto é feito simplesmente por:

$$\tau \vec{e}_\theta = \tau(-\sin \theta \vec{e}_j + \cos \theta \vec{e}_k) = T_{yy} \vec{e}_j + T_{zz} \vec{e}_k \quad (3)$$

A distribuição das tensões de cisalhamento pode ser feita com o comando *quiver*, que recebe como entrada os pontos da malha no domínio  $yz$ , bem como as componentes do tensor das tensões  $T_{yy}$  e  $T_{zz}$ . Os contornos do módulo da tensão de cisalhamento são feitos por meio do comando *contour*, que recebe como entradas os pontos da malha no domínio  $yz$  e a intensidade da tensão de cisalhamento.

Por fim, procede-se o cálculo numérico do momento torçor no eixo. Por definição:

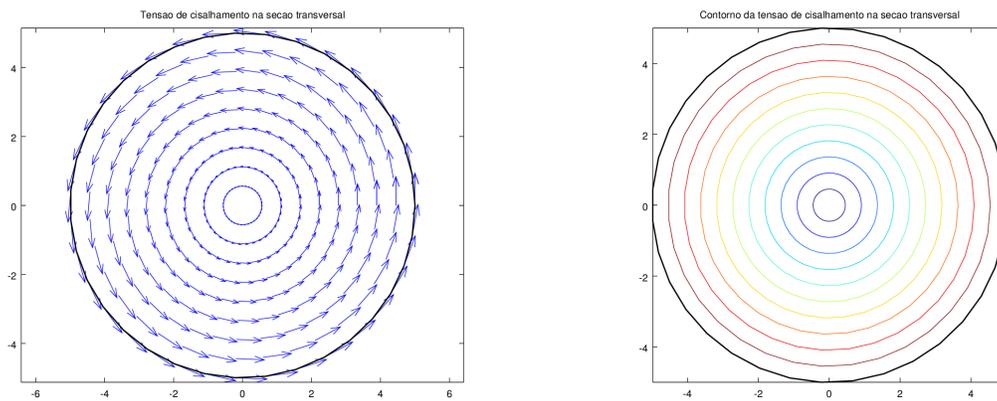
$$T = \int \int_A \tau r dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} \frac{Tr}{J} r^2 dr d\theta \quad (4)$$

Note que os valores numéricos da tensão de cisalhamento  $\tau$  já foram calculados. Basta realizar a dupla integração numérica. Aqui, utilizamos a integração pelo método dos trapézios, por meio do comando *trapz*. Atente para o fato de que é necessário o uso deste comando duas vezes para realização da integral dupla.

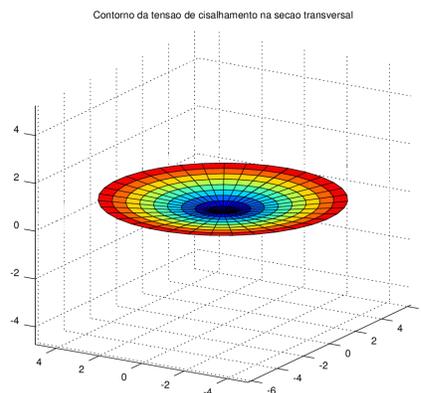


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

---



(a) Tensões de cisalhamento na seção transversal. (b) Contorno das tensões de cisalhamento na seção transversal.



(c) Distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal.

Figura 1: Resultados obtidos.