Mecânica Clássica 1 (Sem. 1/2017): ED III- Aplicação do Método de Lagrange ao problema de força central entre 2 corpos

Considere um sistema de dois corpos de massas m_1 e m_2.

1. Determine as posições $\mathbf{r'}_1$ e $\mathbf{r'}_2$ dos corpos no referencial do centro de massa (CM).

2. Sendo $\mathbf{R}$ a posição do centro de massa, determine a energia cinética do sistema em função de $\dot{\mathbf{R}}$, $\dot{\mathbf{r'}}_1$ e $\dot{\mathbf{r'}}_2$.

3. Agora considere $\mathbf{r}$ a posição do corpo 2 em relação ao corpo 1. Mostre que a energia cinética é

$$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 \,. \tag{1}$$

onde $M = m_1 + m_2$ e $\mu = m_1 m_2 / M$.

Considerando que as partículas estejam sujeitas unicamente a um potencial de interação entre elas,

4. Mostre que

$$\frac{d\dot{\mathbf{R}}}{dt} = 0 \,. \tag{2}$$

de onde segue que o momento total $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ é constante.

5. Qual o número de graus de liberdade que o problema adquire quando nos restringimos ao referencial do centro de massa?

6. Mostre que para o movimento relativo a Lagrangeana é

$$L' = \frac{\mu}{2}\left[\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - V(r) \,. \tag{3}$$

7. Mostre que o momento é conservado.

8. Mostre que a equação do movimento é

$$\mu\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right) \,, \tag{4}$$

onde $l = \mu r^2\dot{\theta}$.