Mecânica Clássica 1 (Sem. 1/2017): ED II- Coordenadas generalizadas e Princípio de D'Alembert

Considere N partículas cujos vetores posição são determinados em função de n coordenadas generalizadas

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = x_1(q_1, q_2 ..., q_n, t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_N = x_n(q_1, q_2 ..., q_n, t) \end{cases}$$

1. Mostre que a velocidade da i-ésima partícula é dada por

$$\mathbf{v}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \, . \tag{1}$$

Um deslocamento $\delta\mathbf{r}_i$ é determinado em termos de variações δq_j por

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \, . \tag{2}$$

2. Mostre que o trabalho da força resultante sobre o sistema é

$$\sum_i \mathbf{F}_i \dot{\delta}\mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j \, , \tag{3}$$

onde

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \, . \tag{4}$$

Considere a expressão

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \delta\mathbf{r}_i \, , \tag{5}$$

onde

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \, . \tag{6}$$

3. Mostre que

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \delta\mathbf{r}_i = \sum_i \left[\frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i)\delta\mathbf{r}_i - m_i \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{r}_i) \right] \tag{7}$$

4. Usando a Eq.(2), mostre que

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \delta\mathbf{r}_i = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \right) \right] \, . \tag{8}$$

Agora observe que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right) \, . \tag{9}$$

Também, podemos escrever $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(\dot{q}_1, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m)$, então

$$\delta\mathbf{v}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j \, . \tag{10}$$

5. Mostre que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \,. \tag{11}$$

(Dica: compare com a Eq.(1).)

6. Mostre que

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \delta q_j \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right) \right] . \tag{12}$$