

Universidade de São Paulo

INSTITUTO DE FÍSICA

Introdução à Expressão de Resultados Experimentais.

Prof. Manfredo H Tabacniks

Esse é um resumo operacional dos principais conceitos usados para uma análise estatística descritiva e expressão de resultados. Consulte a literatura nas referências para aprofundar seus estudos e para melhor compreensão dos conceitos.

Estudar a natureza significa observá-la e para isso, podemos usar nossos sentidos e, talvez, algum instrumento apropriado. Quando usamos um instrumento realizamos uma **medida**.

Medidas podem ser **diretas**, quando medimos o comprimento de uma folha de papel com uma régua, ou o tempo de duração de um evento com um cronômetro, ou **indiretas** quando são derivadas de outras medidas, em geral diretas. Uma **medida direta** consiste em **comparar** a grandeza buscada com um **padrão** calibrado. Quando medimos um comprimento com uma régua, simplesmente comparamos o nosso objeto com a **escala** do instrumento de medida utilizado. Escalas podem ser múltiplas e variadas. Podemos medir a riqueza de uma pessoa em várias moedas diferentes: Real, Dólar, Dinar, Rand, etc. A diversidade das escalas monetárias traz um problema imediato: 100 Dinares é mais ou menos que 100 Randes? Como converter uma moeda em outra? O mesmo ocorre com as réguas. Imagine se cada país tivesse sua própria régua! Em 20 de maio de 1875, na Convenção do Metro em Paris, 17 países definiram o **metro** como unidade padrão assim como as formas de sua realização.

Q1. Imagine que você tem um amigo marciano e suponha que vocês têm uma linguagem comum. Como você explicaria para ele o tamanho de 1 metro?

Ordem de grandeza é a potência de 10 que melhor representa o valor de uma medida acompanhado de sua unidade.

Medida	Ordem de grandeza
Fio de cabelo	10^{-4} cm
Folha de caderno	10^1 cm
Distância da Terra a Lua	10^5 km

Qualquer que seja o instrumento de medição, sua escala tem um número limitado de divisões. A precisão de uma medida é limitada na fabricação (Qualidade do material, precisão dos procedimentos de calibração, etc.) Quando uma leitura ocorre entre dois traços consecutivos da escala, qual o valor da medida? Veja a figura 1.

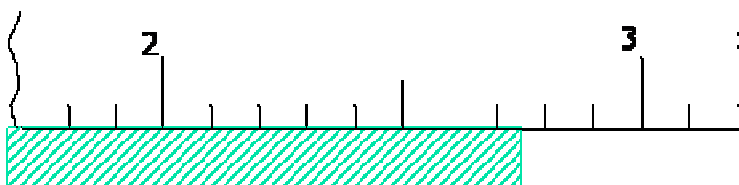


Figura 1- Exemplo de leitura de uma régua milimetrada.

A barra que está sendo medida tem uma extremidade ajustada no zero da escala e a régua é milimetrada. A outra extremidade da barra não coincidiu com nenhum traço. Qual o valor da medida? Ela é maior do que **2,7 cm** e menor do que **2,8 cm**. Portanto, a medida é 2,7 mais *alguma coisa*, centímetros. Quanto vale essa “*alguma coisa*”? Podemos arriscar valores tais como 0,03, 0,04 ou 0,05 sem garantia de que alguma seja melhor que outra. **É tão certo escrever 2,73 cm como 2,75 cm**, mas seria bom se houvesse uma forma de expressar a nossa dúvida.

Valor verdadeiro de uma medida é uma abstração e é desconhecido na maioria das vezes. Seria o resultado de uma medida perfeita, que não existe. O **erro** de uma medida é a diferença entre o valor da medida e o valor verdadeiro. Como não conhecemos o valor verdadeiro, o erro também é desconhecido. O melhor que sabemos fazer são estimativas. A **incerteza** de uma medida é uma estimativa de seu erro. A melhor estimativa para o valor verdadeiro de uma grandeza e sua respectiva incerteza podem ser obtidos e interpretados em termos da teoria de probabilidades. Existem inúmeros textos sobre o assunto. Em particular recomendamos o livro “Fundamentos da *Teoria de Erros*”, de J. H. Vuolo (1992).

No exemplo na figura 1, podemos dizer que na medida do tamanho da barra, entre 2,73 e 2,75 cm, os algarismos 2 e 7 são exatos, enquanto 3, 4 ou 5 são duvidosos. Os **algarismos certos mais o duvidoso** são todos **algarismos significativos**. Em 2,73 cm, os três algarismos são significativos sendo 2 e 7 certos ou exatos e 3 incerto ou duvidoso. Não seria correto escrever 2,735 fazendo uso da mesma escala. Isso porque, se o 3 é duvidoso, o 5 perde totalmente o sentido. Daí surge a regra: nunca escreva uma medida com mais de um algarismo duvidoso, ou de outra forma, o último algarismo de uma medida é o duvidoso.

Queremos agora expressar a medida juntamente com a sua incerteza. De maneira geral, podemos adotar essa incerteza como sendo igual **o valor da metade da menor divisão da mesma**. Portanto, a medida do comprimento da barra estará completa quando escrevermos:

$L = (2,73 \pm 0,05) \text{ cm}$, isto é, $L \pm \Delta L$, onde ΔL é a incerteza na medida.

Isso significa que entre os valores de 2,68 cm a 2,78 cm, todos os valores intermediários representam a medida do comprimento da barra com alguma probabilidade. O valor de ΔL é a sensibilidade ou precisão do instrumento, isto é, o menor variação de valor que o instrumento é capaz de fornecer. O valor de ΔL é definido pelo fabricante do instrumento considerando a sensibilidade e reprodutibilidade do instrumento e da calibração adotada.

Note como essa definição é aplicada no caso da barra terminar exatamente sobre uma divisão da escala, na figura 2. A incerteza não se altera e nesse caso o **zero à direita é um algarismo significativo duvidoso**.

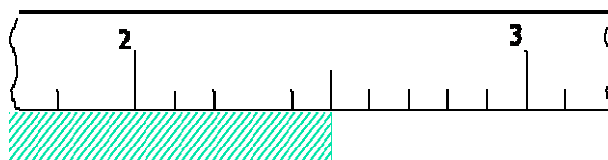


Figura 2 - $L = (2,50 \pm 0,05) \text{ cm}$.

Afirmamos que a incerteza da escala é a metade da menor divisão da escala. Essa não é uma regra rígida. Dependendo da familiarização do operador com a escala e do maior ou menor espaçamento entre os traços de divisão da escala, outros valores poderão ser tomados como incerteza na leitura.

Na tabela 1, a seguir um mesmo valor foi escrito com diferente número de algarismos significativos. O algarismo significativo mais a direita, em negrito, é o duvidoso. É sobre ele que em geral incide nossa incerteza.

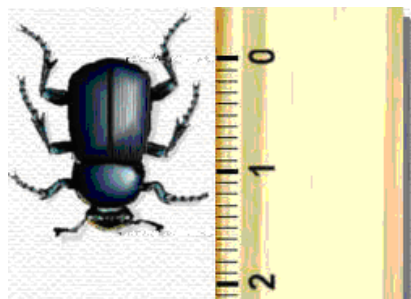
Tabela 1. Algarismos significativos

$X(m)$	significativos
M1 = 57,84 6	5
M2 = 5,7 8 $\times 10^1$	3
M3 = 5,78460 0 $\times 10^1$	7
M4 = 0,6 x 10^2	1

Caso M4, com apenas um significativo fosse convertido para milímetros, seria escrito como $M4 = 6 \times 10^4 \text{ mm}$ (em notação científica), **muito diferente de 60000 mm cujo valor tem cinco algarismos significativos**. A regra de

arredondamento aqui usada foi arredondar o último dígito para “cima” caso o dígito posterior seja ≥ 5 , mantendo-o caso contrário*.

Um outro exemplo é ilustrado a seguir: Suponha que se deseje medir o tamanho do besouro na figura 3. Primeiramente precisamos definir como medir o tamanho de um besouro:



Supondo que o tamanho de um besouro seja apenas o de seu corpo sem as pernas:

- a) $L = 1,5 \pm 0,1$ cm
- b) $L = 1,53 \pm 0,05$ cm
- c) $L = 1,55 \pm 0,05$
- d) $L = 1,552 \pm 0,001$ cm

Figura 3. Medindo o tamanho de um besouro

A medida na figura 3, agora **depende da régua e do operador**. Se considerarmos somente a régua, b) $L = 1,53 \pm 0,05$ cm é a medida correta. Mas se julgarmos que o operador comete erros de alinhamento poderíamos dizer que a) $L = 1,5 \pm 0,1$ cm. Note que em c) $L = 1,55 \pm 0,05$ falta a unidade e em d) a incerteza foi claramente subestimada. Para decidir entre a) e b) precisaremos de métodos estatísticos. **A incerteza é quem determina o número de algarismos significativos (e o número de casas decimais) usado na representação completa do resultado.**

Estatísticas descritivas:

Quando trabalhamos com vários resultados de uma medição **em condições de repetitividade**, podemos usar métodos estatísticos para resumir e consolidar as informações obtidas. Por exemplo, ao medir várias vezes o tempo de queda de um corpo obtemos, em geral, um conjunto de medidas cujos valores diferem entre si. Qual é o valor que melhor representa a medida do tempo de queda do corpo? Qual sua incerteza? Poderíamos usar apenas uma medida e associar-lhe a incerteza do aparelho, como por exemplo, a metade da menor divisão da escala do cronômetro utilizado. *Mas a incerteza da escala do cronômetro descreve apenas os erros cronômetro (os erros aleatórios, de seu mecanismo por exemplo e os sistemáticos como o decorrente de sua calibração contra um padrão mais exato).* Portanto, a incerteza da escala de um cronômetro não cobre a incerteza do processo de medição (reação do operador, leitura da escala, etc.). Como determinar a incerteza de uma medida?

* Existem outras regras de arredondamento, mais complicadas, um pouco mais precisas, mas nenhuma é exata. A regra aqui proposta é também usada pela maioria das calculadoras e algoritmos em computadores.

Podemos medir várias vezes a mesma grandeza e calcular sua *média (aritmética)* dada pela equação 3.1. *A média é a melhor estimativa do valor mais provável de um conjunto de medidas*[†]. A média aritmética é o resultado que mais se aproxima do valor mais provável de uma medição (*o valor mais provável tende ao valor verdadeiro após infinitas medições*). É por isso que usamos a média aritmética de suas notas para representar seu rendimento na disciplina.

Média de n medidas

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_n x_i \quad (1)$$

A título de exemplo, usamos o cronômetro de um celular para medir o tempo de queda de um corpo, conforme mostrado no quadro 1. A incerteza nominal do cronômetro foi de 0,05 s.

Quadro 1: Tempos de queda de um corpo (s). Os valores anotados seguem a precisão do cronômetro, $\pm 0,05$ s.

4,52	3,83	4,02	4,06	3,70
3,88	3,56	4,99	3,81	4,06

A média das medidas vale $\bar{t} = 4,04$ s. Podemos visualizar melhor as medidas e sua dispersão em torno da média no diagrama na Figura 4.

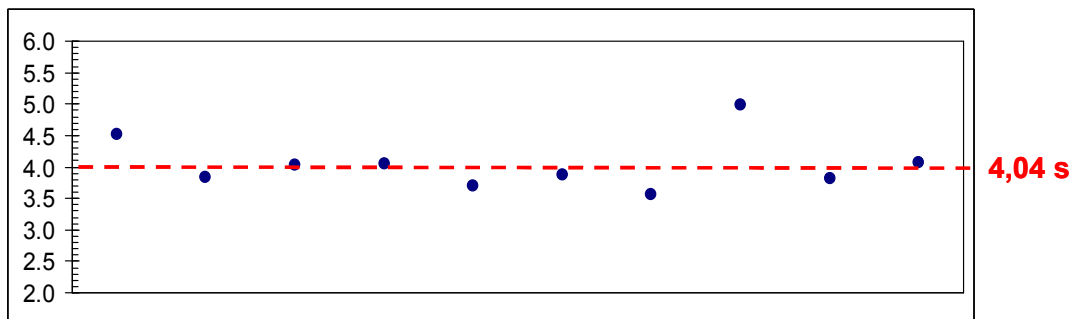


Figura 4. Tempos medidos num cronômetro e a média.

Note a dispersão das medidas em torno da média. Como calcular essa dispersão? Uma primeira tentativa é calcular a “distância” de cada ponto à média:

$$dispersão = \frac{1}{n} \sum (t_i - \bar{t}) \quad (2)$$

Infelizmente o resultado de (2) é nulo! (prove isso). Para evitar o resultado nulo poderíamos calcular a *média dos módulos* das diferenças, mas por várias razões que você verá em seu curso de estatística, usamos a média dos desvios

[†] Supondo uma amostra aleatória simples de uma população normalmente distribuída.

quadráticos. A equação 3. fornece a estimativa do **desvio padrão** de n medidas do tempo de queda do corpo, também chamada **desvio padrão da amostra**.

Desvio padrão de uma amostra:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_n (t_i - \bar{t})^2} = 0,42 \text{ s} \quad (3)$$

O desvio padrão não é exatamente a média de n valores, $(t_i - \bar{t})^2$ porque ao introduzir a média dos tempos “ $\bar{t}$ ” em (3) o *enésimo* termo do somatório é conhecido *a priori*, pois pode ser calculado de forma exata com as $(n-1)$ medidas e a média fornecida. Portanto perdemos 1 grau de liberdade e temos $(n-1)$ valores independentes no somatório. No limite, a equação (3) tende ao desvio padrão:

Desvio Padrão da população:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (s) \quad (4)$$

O Desvio Padrão é uma medida da dispersão de nossas medidas. No caso de medidas aleatórias, o intervalo definido por ± 1 desvio padrão contém 68,3% das medidas. Três desvios padrão compreendem 99,5% das medidas, como mostrado na figura 5. O desvio padrão das 10 medidas com o cronômetro vale $s = 0,42 \text{ s}$.

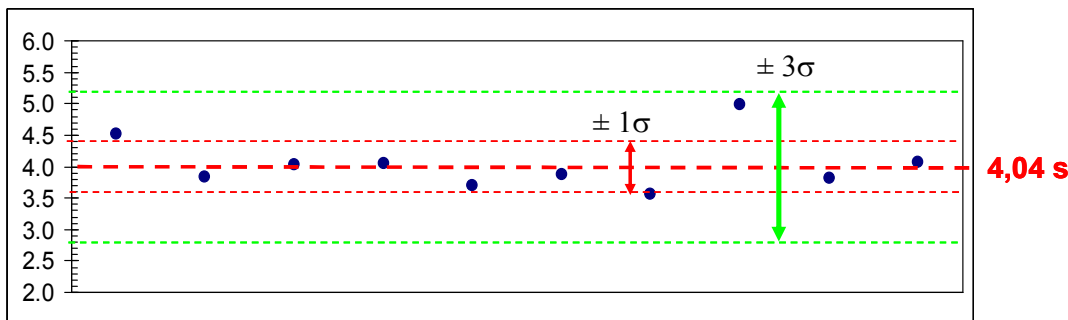


Figura 5. Tempos medidos num cronômetro, a média e os intervalos definidos por um e três desvios padrão. Note que aproximadamente 7 medidas (70%) estão dentro do intervalo de $\pm 1 \sigma$, que é compatível com a probabilidade mencionada no texto.

Afirmamos inicialmente que o cronômetro utilizado tinha precisão de $0,05 \text{ s}$, o que nos levou escrever a primeira medida:

$$t_1 = (4,52 \pm 0,05) \text{ s} .$$

Essa é uma notação que expressa a medida (4,52) sua incerteza (0,05) e a unidade (s). No Quadro 1 simplificamos a notação citando a incerteza e a unidade na legenda.

Verificamos que a *incerteza do nosso experimento* ($s = 0,42\text{ s}$) é muito maior que a incerteza do cronômetro. São duas grandezas diferentes. Temos que compor a incerteza do cronômetro (escala, calibração, etc.) com a incerteza do nosso experimento. A conta é feita somando as incertezas quadráticas:

$$\sigma_{total} = \sqrt{(\sigma_{instrumento})^2 + (\sigma_{experimental})^2} \quad (5)$$

σ_{total} aparece em alguns textos como **erro padrão ou desvio padrão estendido**.

Para expressar o resultado da primeira medida ($t_1 = 4,52\text{ s}$) e seu desvio padrão ($s = 0,42\text{ s}$) escrevemos

$$t_1 = (4,5 \pm 0,4)\text{ s}.$$

onde cuidamos de truncar e arredondar os valores para que a incerteza tenha apenas UM algarismo significativo. Ficou claro que podemos usar a notação ($x \pm \Delta x$) mas convém explicar o que significam x e Δx .

Utilizamos um instrumento muito preciso para uma medida muito incerta. Um alerta: *Um processo de medida em geral inclui a incerteza estatística do(s) instrumento(s) mas não inclui a(s) incerteza(s) de calibração, que depende(m) de aferições externas ao processo.*

Com as 10 medidas, calculamos uma média que supomos ser mais precisa que cada medida individual. A incerteza da média poderia ser determinada realizando vários conjuntos com $n=10$ medidas, obtendo várias médias, calculando a média das médias e a estimativa do desvio padrão das médias usando a equação (3). Uma trabalhadeira! Felizmente a teoria estatística nos ajuda e permite prever o resultado, com apenas um conjunto de medidas, dado pela equação 6.

Estimativa do **desvio padrão da média**
$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

Assim, $s_m = 0,42 / \sqrt{10} = 0,13\text{ s}$. Podemos agora escrever a **média das medidas e seu respectivo desvio padrão da média**, $0,13\text{ s}$. Truncando e ajustando os significativos temos:

$$\bar{t} = (4,0 \pm 0,1)\text{ s}.$$

Esse último resultado mostra que nosso esforço valeu a pena. Fizemos 10 medidas, obtivemos uma média mais precisa que cada medida individual e

estimamos o desvio padrão do nosso experimento. Se ao invés de 10, tivéssemos feito 100 medidas, o desvio padrão seria aproximadamente o mesmo, pois é uma característica do processo de medição, mas o *desvio padrão da média* valeria $s_{m,100} = 0,042s$. Note, que no Quadro 1, registramos corretamente as medidas com a precisão do cronômetro. A média e as estimativas de desvio padrão e desvio padrão da média foram calculados posteriormente e usados para representar os resultados finais corretamente.

Significativos:

Citando Vuolo, 1992: “*Não existe uma regra bem definida para o número de dígitos significativos no desvio padrão*”. Em nossos trabalhos usaremos apenas UM significativo para expressar o desvio padrão, lembrando que existem outras regras, mais detalhadas. Caso seja necessário um tratamento mais rigoroso, sugiro consultar o livro do Prof. Vuolo, (Vuolo, 1992).

Tabela 3. Expressão de medidas com incerteza

notação errada	notação correta
$5,30 \pm 0,0572$	$5,30 \pm 0,06$
$124,5 \pm 11$	$(13 \pm 1) \times 10$
$0,00002 \pm 0,00000050$	$(2,00 \pm 0,05) \times 10^{-5}$
$450 \pm 2,6 \times 10^1$	$(45 \pm 3) \times 10^1$

Note que usamos potências de dez para expressar medidas com o número correto de significativos. Cuidado para não confundir casas decimais com dígitos significativos. Zeros á direita são significativos.

Cálculos intermediários: para evitar carregar erros de arredondamento é comum escrever os resultados intermediários com 1 algarismo significativo em excesso, para truncar e arredondar apenas os resultados finais.

Propagação de incertezas:

Muitas vezes usamos o valor de uma medição numa equação para determinar uma outra grandeza. Como calcular (propagar) a incerteza do novo resultado? Trataremos aqui dos casos mais simples envolvendo as quatro operações e supondo que todas as incertezas envolvidas são independentes

Dados $x \pm s_x$ e $y \pm s_y$ com s_x e s_y Linearmente Independentes:

a) Soma ou subtração:

$$W = x + y \quad \text{ou} \quad W = x - y$$

$$s_W^2 = s_x^2 + s_y^2$$

b) Multiplicação ou divisão por constante

$$W = Ax$$

$$s_W = As_x$$

c) Multiplicação ou divisão

$$W = x \times y \quad \text{ou} \quad W = \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{s_W}{W}\right)^2 = \left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2$$

d) Potências

$$W = x^m$$

$$\frac{s_W}{W} = |m| \frac{s_x}{x}$$

Na soma ou subtração somam-se as incertezas quadráticas.
Na multiplicação ou divisão somam-se as incertezas relativas ao quadrado.

Uma fórmula geral pode ser escrita para grandezas independentes entre si, (visualize uma soma de catetos em n dimensões) (Vuolo, 1992, Tabacniks, 2014)

$$s_w^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 s_z^2 + \dots \quad (7)$$

Você precisará dessa equação para propagar a incerteza das medidas de queda livre para tempo, na experiência do Reflexo Motor. Veja abaixo a aplicação num exemplo simples. Note que na subtração o valor da incerteza aumentou.

a =	$12 \pm 3 \text{ cm}$	
b =	$5 \pm 2 \text{ cm}$	
c = a - b =	$7 \pm 4 \text{ cm}$	$s_c^2 = \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 s_a^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 s_b^2$ $s_c^2 = (1)^2 s_a^2 + (-1)^2 s_b^2$ $s_c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3,6 \text{ cm}$

Representação gráfica e tabelas.

Já sabemos expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medida. Num gráfico podemos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança ($\pm s$) definido pela incerteza da grandeza. Veja o exemplo a seguir em que os dados da tabela 4. foram graficados na Figura 7.

Tabela 4. Espaços e velocidades de um corpo.

n	s $\pm$ 0,05 (m)	v (m/s)
1	4,61	1,8 $\pm$ 0,2
2	6,90	2,7 $\pm$ 0,8
3	11,13	4 $\pm$ 1
4	20,60	10 $\pm$ 3

Observe a formatação da tabela. Duas linhas horizontais definem a barra de títulos. Uma última linha horizontal delimita o fim da tabela. As unidades acompanham a definição das grandezas. Quando a incerteza é constante numa coluna ela pode ser colocada no título. Na coluna 3, cada valor tem a sua incerteza. Não há linhas verticais.

A representação gráfica deve ser “limpa”. Na figura 6 mostramos um exemplo de um gráfico bidimensional com uma reta ajustada. O gráfico deve ter eixos bem definidos, com unidades legíveis e uma escala interpolável (evite números quebrados, múltiplos de 3, etc.) O gráfico pode conter um quadro com os resultados do ajuste. Mais detalhes e exemplos podem ser encontrados em Tabacniks, (2015).

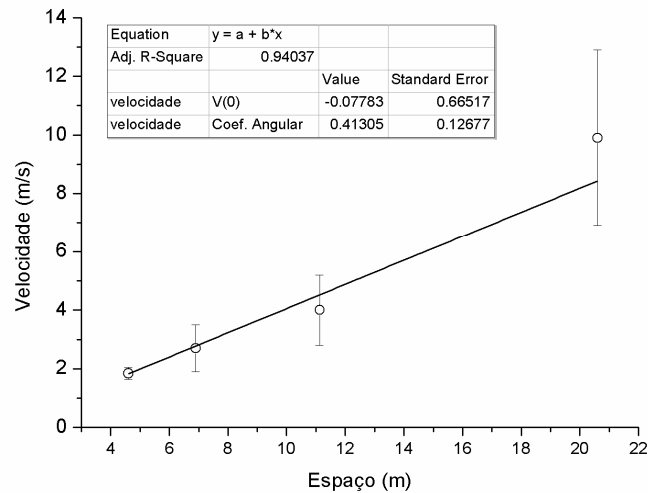


Figura 6. Velocidades do corpo de prova.

Referências:

1. Física Geral e Experimental para Engenharia I - FEP 2195 para Escola Politécnica (2003).
2. Vuolo, José Henrique. Fundamentos da teoria de erros. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.
3. Introdução às Medidas em Física, “Notas de aula”, Instituto de Física da USP, (2004).
4. Tabacniks, M.H. Introdução ao Tratamento de Resultados Experimentais e Expressão da Incerteza, IFUSP, 2015.

Softwares: Existe grande variedade de programas para tratamento de dados, cálculos estatísticos e gráficos: Desde programas tradicionais tais como Excel, Open Office, Origin, Matemática, Matlab até pequenos *apps*, a maioria gratuitos, que calculam vários parâmetros da estatística descritiva. Esses programas podem facilitar muito sua vida no laboratório. Sugerimos que você teste e instale alguns desses programas em seu computador (tablet ou celular) e aprenda a usá-los de forma eficiente. Para sistemas android você pode experimentar: *CalcPM*, uma calculadora científica que propaga incertezas e *Descriptive Statistics*, um app que calcula os principais parâmetros estatísticos e faz gráficos simples.

Reflexo motor para estímulo visual

1. Objetivos

Medir o reflexo motor para um estímulo visual sob diferentes condições.

2. Introdução

Reflexo motor é o tempo de reação para uma reação motora a um determinado estímulo externo (visual, sonoro, etc.). É uma grandeza que pode ser decisiva em atividades esportivas, para um piloto de avião de caça, em corridas automobilísticas, num vídeo-game, etc. O tempo médio de reação visual de uma pessoa jovem saudável varia entre 0,15 e 0,45s. Este é praticamente o tempo que o cérebro demora para receber um impulso nervoso gerado no olho e promover uma reação. O reflexo motor (RM) para um estímulo visual pode ser medido em dispositivos dotados de um cronômetro eletrônico. Para o seu celular ou computador, existem aplicativos que podem ser usados para isso. Outra forma, menos tecnológica, é usar uma régua milimetrada simples. Nesse caso usaremos a equação horária do movimento uniformemente acelerado:

$$\Delta \vec{z} = (\vec{z} - \vec{z}_0) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2 \quad (1)$$

Dado um deslocamento na régua $\Delta \vec{z} = \vec{z} - \vec{z}_0$ medido na direção vertical, podemos usar a equação (1) e calcular o tempo t correspondente.

3. Metodologia

A tomada de dados desse experimento deverá ser feita em equipes com até 3 alunos, medindo o reflexo motor de cada um dos componentes da equipe. A análise deverá ser feita individualmente, ou seja cada aluno analisará os resultados de seu reflexo motor.

a) Utilize um aplicativo para computador e meça 5 vezes o tempo de reação da mão direita. Repita o procedimento para a mão esquerda.

b) Com uma régua plástica de 30 cm, presa em sua extremidade final (30cm) por um experimentador deixe a extremidade inferior (0 cm) exatamente entre os dedos polegar e indicador semi abertos da pessoa que terá seu tempo de reação medido. Sem avisar, o experimentador solta a régua enquanto seu companheiro deve fechar os dedos para segurá-la. Ensaie o experimento algumas vezes e repita a medida 10 vezes para a mão direita e para a mão esquerda.



Figura 1 Medida do reflexo motor usando uma régua milimetrada. (<http://professorandrios.blogspot.com.br>)

- c) Prepare uma tabela com os resultados de suas medidas conforme o modelo no guia de trabalho.
- d) Deduza a conversão de medida de distância percorrida pela régua para tempo de reação. Deduza também a propagação da incerteza. Para aceleração da gravidade no IFUSP, use $g = 9,7864 \pm 0,0005 \text{ ms}^{-2}$.

4. Análise e discussão

Siga o guia de estudos. Calcule as médias, desvios padrão e desvios padrão das médias para cada conjunto de medidas.

Compare a incerteza instrumental com o desvio padrão das medidas (do processo experimental).

Compare e comente a dependência do reflexo motor para

- i) mão esquerda e mão direita do mesmo indivíduo
- ii) entre os indivíduos que compõe sua equipe de trabalho
- iii) utilizando instrumentos diferentes (régua e o celular)