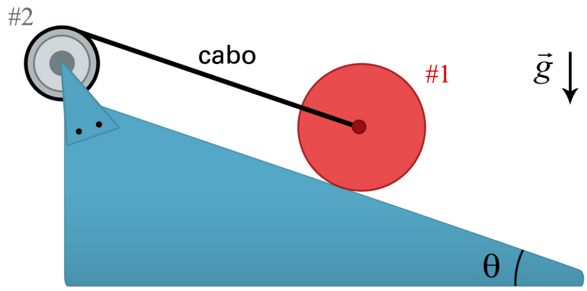
Questão 1 Considere a situação ilustrada abaixo: o cilindro #1, homogêneo, de massa m_1 e raio r_1, está sobre um plano com inclinação θ com relação à horizontal. Conectado a ele, pelo centro, há um cabo inextensível e de massa desprezível, que estende-se até o cilindro #2 (homogêneo, de massa m_2 e raio r_2), no topo do plano inclinado, e enrola-se nele. O cilindro #2 está fixado em sua posição por um pivô que passa pelo seu centro e o atrito estático entre o plano inclinado e o cilindro #1 é suficiente para fazê-lo rolar sem deslizar.

Ao ser abandonado sob a ação da gravidade, a partir do repouso, o cilindro #1 rola pelo plano inclinado com aceleração linear constante a, desenrolando o cabo e, por conseguinte, fazendo o cilindro #2 girar.



(a) Esboce o diagrama de forças dos dois cilindros (atenção para os pontos de aplicação das forças). 0,5

(b) Escreva as equações do movimento (2ª lei de Newton), de rotação e de translação, dos cilindros. 0,5

(c) Escreva as condições de não-deslizamento que relacionam a aceleração linear a do cilindro #1 com as acelerações angulares dos cilindros #1 e #2. 0,5

(d) Determine a aceleração linear a do cilindro #2. 1,0

Atenção: escreva sua resposta em função apenas dos parâmetros m_1, m_2, θ e g.

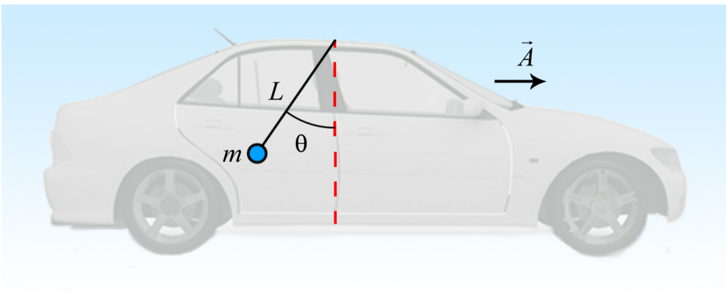
(e) Determine o momento angular interno do cilindro #2 em função do tempo. 0,5

Atenção: escreva sua resposta em função apenas dos parâmetros m_2, r_2 e a.

(f) Determine a energia cinética do cilindro #1 em função do tempo. 0,5

Atenção: escreva sua resposta em função apenas dos parâmetros m_1 e a.

Questão 2 Considere a situação ilustrada abaixo: um pêndulo simples é colocado no interior de um carro, que avança para a direita com aceleração constante $\vec{A}$. Nessa situação, o pêndulo não oscila. Ao invés disso, ele desvia-se da normal, formando com ela o ângulo constante θ. S é um sistema de referência inercial associado a um observador externo ao carro; S' é um sistema de referência (não-inercial) fixado ao carro.



(a) Por que S' é dito "não-inercial"? 0,5

(b) Para o sistema de referência S:

(i) Esboce o diagrama de forças sobre o pêndulo. 0,5

(ii) Escreva as equações do movimento do pêndulo. 0,5

(c) Para o sistema de referência S':

(i) Esboce o diagrama de forças sobre o pêndulo. 0,5

(ii) Escreva as equações do movimento do pêndulo. 0,5

(iii) Como o observador explica o que está acontecendo? 0,5

(d) Qual deve ser a aceleração $\vec{A}$ para que $\theta = 45°$? Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$. 0,5

Questão 3 Um pêndulo simples, cujo comprimento da haste é de 2 m e cuja massa oscilante é de 0.5 kg, é colocado para oscilar. Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$.

(a) Determine a frequência angular da *oscilação livre*. 0,5

(b) Determine a expressão de $\theta(t)$, o ângulo entre a haste e a vertical, para o caso $b = 1\,\text{kg/s}$, com as condições iniciais $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 1.5\,\text{rad/s}$. 1,0

(c) Suponha que, de tempos em tempos, você dê um empurrão no pêndulo. Com que frequência você deve fazer isso para que a amplitude de oscilação seja máxima? 0,5

Questão 4 A função de onda de uma onda harmônica numa corda é dada por $y(x,t) = 0{,}001\,\text{sen}(20\pi x + 100\pi t)$, onde as unidades são o metro e o segundo.

(a) Identifique o número de onda e calcule o comprimento de onda. 0,5

(b) Identifique a frequência angular e calcule o período da onda. 0,5

(c) Em que direção a onda avança e com que velocidade? 0,5

(d) Qual é a aceleração transversal máxima de um ponto da corda? 0,5

Formulário

Rotações

$$\vec{L} \doteq \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}, \quad |\vec{L}| = mrv\,\text{sen}\,\phi = mr_\perp v = mrv_\perp, \quad \vec{L} = \vec{L}_{\text{int}} + \vec{L}_{\text{ext}}, \quad \vec{L}_{\text{ext}} = \vec{R} \times \vec{P},$$

$$\vec{\tau} \doteq \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}, \quad |\vec{\tau}| = rF\,\text{sen}\,\phi = r_\perp F = rF_\perp,$$

$$I = \int r^2\,dm = \int dI, \quad I = I_{\text{CM}} + Ml^2, \quad \text{Momento de inércia de um disco de raio } R \text{ e massa } M = MR^2/2,$$

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2, \quad U = mgz_{\text{CM}}.$$

Forças inerciais

$$\vec{F}_{\text{in}} = -m\vec{A}, \quad \vec{F} + \vec{F}_{\text{in}} = m\vec{a}', \quad \vec{A} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}', \quad \vec{A} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

Oscilações

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t/2}[A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)] & \text{se } \gamma/2 < \omega_0 \\ (A + Bt)e^{-\gamma t/2} & \text{se } \gamma/2 = \omega_0 \\ e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right) & \text{se } \gamma/2 > \omega_0, \end{cases}$$

$$\gamma = b/m, \quad \omega_0^2 = g/L \text{ (pêndulo)}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2, \quad \beta^2 = -\omega^2,$$

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F_0}{mL}\cos(\varpi t) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \mathscr{A}(\varpi)\cos(\varpi t) \quad \text{para } t \gg 0, \text{ com} \quad \mathscr{A}(\varpi) = \frac{F_0}{mL\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (\gamma\varpi)^2}},$$

A e B são constantes.

Ondas

$$y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + B) = A\,\text{sen}(kx \pm \omega t + C),$$

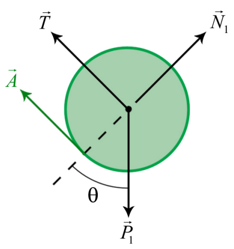
$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T = kv, \quad v = \lambda/T = \lambda f, \quad f = 1/T,$$

A, B e C são constantes.

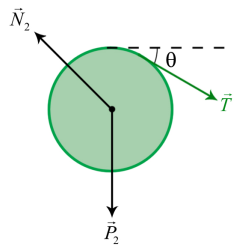
Resolução

Questão 1

(a) Neste e nos demais itens, $\vec{P}_1$ e $\vec{N}_1$ ($\vec{P}_2$ e $\vec{N}_2$) são a força-peso e a força normal do cilindro #1 (#2). $\vec{T}$ é a tração no cabo e $\vec{A}$ é o atrito entre o cilindro #1 e o plano inclinado.



Cilindro #1



Cilindro #2

(b) Para o cilindro #1, as equações do movimento de translação são:

$$P_1 \operatorname{sen}\theta - A - T = m_1 a \tag{1}$$
$$P_2 \cos\theta - N_1 = 0$$

A equação do movimento de rotação é:

$$r_1 A = I_1 \alpha_1, \tag{2}$$

onde I_1 é o momento de inércia e α_1, a aceleração angular.

Para o cilindro #2, as equações do movimento de translação são:

$$\vec{T} + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 = \vec{0}.$$

A equação do movimento de rotação é:

$$r_2 T = I_2 \alpha_2 \tag{3}$$

Note que, nessas equações, assumimos que o sentido positivo de $\vec{a}$ é para baixo, paralelamente ao plano inclinado, e que o sentido de rotação positivo é o horário.

(c) Como não ocorre deslizamento, o deslocamento linear x do cilindro #1, ao longo do plano inclinado, deve ocorrer concomitantemente com um deslocamento angular ϕ_1 dele, de tal maneira que $x = r_1\phi_1$ (x e ϕ_1 medidos a partir da posição inicial). Como x e ϕ_1 dependentem do tempo, podemos derivar essa relação duas vezes, obtendo: $\ddot{x} = r_1\ddot{\phi}_1$. Mas $\ddot{x} = a$ em (1) e $\ddot{\phi}_1 = \alpha_1$ em (2). Então, $a = r_1\alpha_1$. Para o cilindro #2, como o cabo é inextensível, ao mesmo deslocamento x do cilindro #1 deve estar associado um deslocamento angular ϕ_2 do cilindro #2, satisfazendo $x = r_2\phi_2$. Isso implica em $a = r_2\alpha_2$. Resumindo,

$$a = r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2. \tag{4}$$

(d) A partir de (2) e usando (4), podemos escrever $A = I_1 a/r_1^2$. Similarmente, a partir de (3) e usando (4), podemos escrever: $T = I_2 a/r_2^2$. Usando essas duas expressões em (1) e isolando a, obtemos:

$$a = \frac{m_1 g \operatorname{sen}\theta}{m_1 + I_1/r_1^2 + I_2/r_2^2}.$$

Como os cilindros são homogêneos, $I_1 = m_1 r_1^2/2$ (analogamente para #2). Deste modo, obtemos o resultado desejado:

$$a = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{3 + m_2/m_1} g.$$

(e) Sabemos que $L_2 = I_2\dot{\phi}_2$ (momento angular interno), então só precisamos determinar $\phi_2(t)$. Como a é constante, $\alpha_2 \equiv \ddot{\phi}_2 = a/r_2$ também é constante. Assim, basta integrarmos essa relação para obter $\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}(0) + at/r_2$. Mas o sistema parte do repouso, isto é, $\dot{\phi}(0) = 0$. Então, $\dot{\phi}(t) = at/r_2$. Finalmente,

$$L_2 = I_2\dot{\phi}_2 = \left(\frac{1}{2}m_2 r_2^2\right)\cdot\left(\frac{at}{r_2}\right) = \frac{1}{2}m_2 r_2 a t.$$

(f) Podemos separar a energia cinética do cilindro #1 em duas partes: a energia cinética associada à translação do centro de massa (velocidade $v \equiv \dot{x}$) e a energia cinética associada à rotação em torno do seu centro de massa (velocidade $\dot{\phi}_1$):

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2.$$

Como a é constante, $v(t) = v(0) + at$ (integrando a ou usando a equação do movimento uniformemente variado). Mas o sistema parte do repouso, isto é, $v(0) = 0$. Então, $v(t) = at$. Quanto a $\dot{\phi}_1(t)$, podemos repetir a análise feita no item anterior, de onde concluímos que $\dot{\phi}_1(t) = at/r_1$. Assim,

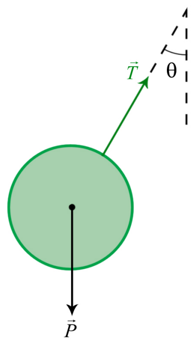
$$K_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1 r_1^2\right)\cdot\left(\frac{at}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1(at)^2 = \frac{3}{4}m_1 a^2 t^2.$$

Questão 2

(a) O sistema de referência S' é dito não-inercial porque está acelerado. Isso significa que, nele, não vale a terceira lei de Newton (lei da inércia).

(b) Para o sistema S:

Diagrama de corpo livre [item (i)]:

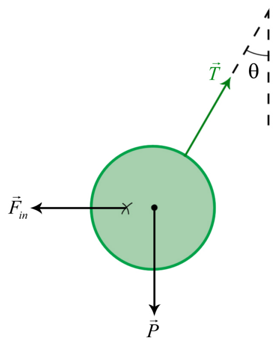


Equações do movimento [item (ii)]:

$$T\,\mathrm{sen}\,\theta = mA \tag{5}$$
$$T\cos\theta - P = 0. \tag{6}$$

(c) Para o sistema S':

Diagrama de corpo livre [item (i)]:



Equações do movimento [item (ii)]:

$$T\,\mathrm{sen}\,\theta - F_{\text{in}} = 0 \tag{7}$$
$$T\cos\theta - P = 0,$$

onde $F_{\text{in}} = mA$ [não tem o sinal da expressão vetorial, $\vec{F}_{\text{in}} = -m\vec{A}$, porque ele já foi considerado ao escrevermos (7)].

Note que, para um observador em S', surge uma força inercial F_{in} que equilibra as forças reais: $a' = 0$. É assim que ele explica o fenômeno [item (iii)].

(d) Partindo de (6), podemos escrever $T = P/\cos\theta$. Usando esse resultado em (5), concluimos que $A = g\tan\theta$. Assim, se $\theta = 45°$, $\tan\theta = 1$ e, por conseguinte, $A = g$. Ou seja, $A = 10\,\mathrm{m/s^2}$ deve ser a aceleração para que o pêndulo fique imóvel em $\theta = 45°$.

Questão 3

(a) $\omega_0 = \sqrt{g/L} = \sqrt{5}\,\text{rad/s}$.

(b) Como $b = 1$, $\gamma = b/m = 2$ e $\gamma/2 = 1 < \omega_0$. Logo, o pêndulo oscila em regime de amortecimento subcrítico, com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} = 2\,\text{rad/s}.$$

Então, sabemos que $\theta(t) = e^{-t}\,[A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)]$. Impondo a primeira condição de equilíbrio: $\theta(0) = A = 0$. Com isso simplificamos um pouco a expressão: $\theta(t) = Be^{-t}\,\text{sen}(2t)$. Derivando, obtemos $\dot{\theta}(t) = -Be^{-t}\,\text{sen}(2t) + 2Be^{-t}\cos(2t)$. Agora impomos a segunda condição de equilíbrio: $\dot{\theta}(0) = 2B = 3/2 \Rightarrow B = 3/4$. Assim,

$$\theta(t) = \frac{3}{4}e^{-t}\,\text{sen}(2t).$$

(c) Ao aplicarmos uma força dependente do tempo no pêndulo, passamos para o regime de oscilação subamortecida *e forçada*. Neste caso, a amplitude será máxima na ressonância, isto é, quando a força externa tiver a mesma frequência das oscilações livres: $\sqrt{5}\,\text{rad/s}$ ou, equivalentemente, $\sqrt{5}/(2\pi)\,\text{Hz}$.

Questão 4

(a) O número de onda é o fator que precede a dependência espacial de $y(x,t)$. Em outras palavras, é o fator que precede x: $k = 20\pi$. Daí obtemos o comprimento de onda: $\lambda = 2\pi/k = 10\,\text{cm}$.

(b) A frequência angular da onda é o fator que precede a dependência temporal de $y(x,t)$. Dito de outra forma, é o fator que precede t: $\omega = 100\pi$. Consequentemente, $T = 2\pi/\omega = 20\,\text{ms}$.

(c) A onda avança no sentido negativo do eixo x, pois o fator que precede t é positivo. A velocidade pode ser obtida da relação $\omega = kv \Rightarrow v = \omega/k = 5\,\text{m/s}$.

(d) Como $y(x,t)$ representa o deslocamento transversal da onda, a aceleração transversal de um ponto com x fixo é:

$$a_y(x,t) \doteq \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\,\text{sen}(kx + \omega t), \tag{8}$$

onde $A = 1\,\text{mm}$ é a amplitude da onda.

O valor máximo de $a_y(x,t)$ [para cima ($a_y > 0$) ou para baixo ($a_y < 0$), tanto faz] ocorre quando o seno for igual à unidade. Então, a aceleração máxima é $\omega^2 A = 10\pi^2\,\text{m/s}^2$.