

MECANISMOS PARA AUTOMAÇÃO - PMR2430 e PMR2331

Prof.Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho - Universidade de São Paulo

28 de Agosto de 2015

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Definições	2
1.2	Componentes de um mecanismo	3
1.3	Graus de liberdade, mobilidade e conectividade	5
2	Mobilidade de mecanismos planos, esféricos e tridimensionais	6
2.1	Critério de Kutzbach-Gruebler	6
2.2	Método da teoria dos grupos de deslocamento de Lie	7
2.3	Exercícios	9
3	Síntese (projeto) de mecanismos	11
3.1	Introdução	11
3.2	Definição da tarefa	12
3.3	Métodos de síntese do Tipo	12
3.4	Critério de Kutzbach-Gruebler	12
3.5	Método da enumeração de cadeias ativas	14
3.6	Método da adição de cadeia passiva	14
3.7	Método alternativo	15
3.8	Formas alternativas de atuação	17
3.9	Exercícios	17
4	Análise cinemática de mecanismos planos	18
4.1	Finalidade	18
4.2	Localização de um ponto	18
4.3	Formulação do problema	20
4.4	Resolução das equações	21
4.5	Método analítico	21
4.6	Método da Eliminação Dialítica	23
4.7	Método numérico de Newton-Raphson	25
4.8	Análise de velocidades e acelerações	28
4.9	Exercícios	32
5	Análise Dinâmica: formulação de Gibbs-Appell	34
5.1	Introdução	34
5.2	Formulação	34
5.2.1	A matriz C	34
5.3	O produto da matriz D pelo vetor \mathbf{f}	36
5.4	Fases da Formulação de Gibbs-Appell	37
5.5	Robô de cadeia cinemática aberta e plano <u>RP</u>	37
5.6	Mecanismo de cadeia aberta e plano <u>PR</u>	39
5.7	Mecanismo plano <u>PRRRR</u>	40

6	Síntese dimensional de mecanismos planos, $M = 1$	45
6.1	Duas posições exatas: método geométrico	45
6.2	Três posições exatas: método geométrico	45
6.3	Quatro posições exatas: método geométrico	46
6.4	Três posições exatas: método analítico	46
6.5	Exemplo	49
6.6	Quatro posições exatas	49
6.7	Exemplo	50
6.8	Exercício	50
7	Análise cinemática de mecanismos tridimensionais	52
7.1	Introdução	52
7.2	Descrição da localização segundo a notação matricial	52
7.3	Mecanismo \underline{RSSR}	53
7.4	Mecanismo \underline{RUR}	55
7.5	Robô \underline{RRR}	56
7.6	Exercícios	58

1 Introdução

Atualmente, observa-se a formação de um único mercado internacional, com a conseqüente diminuição das fronteiras e barreiras alfandegárias da maioria dos países, o que tem provocado uma competição acirrada em todos os níveis da sociedade. Sendo assim, para que se atenda aos pedidos de clientes cada vez mais exigentes, surge a necessidade da fabricação de produtos altamente competitivos, que possuam alta qualidade, baixo custo e curto prazo de entrega.

Isso implicará no desenvolvimento de máquinas de alto desempenho, flexíveis quanto ao tipo de produto fabricado e tamanho do lote, consumidoras de pouca energia e de baixo custo de manutenção. Diante desse quadro, os mecanismos, encarados como dispositivos mecânicos ou mesmo subsistemas de equipamentos maiores, se constituem em recursos estratégicos para o domínio da tecnologia associada ao desenvolvimento dessas máquinas.

1.1 Definições

Segundo Reuleaux, *mecanismo* é uma combinação de corpos rígidos ou resistentes de tal forma conectados que se movam um em relação ao outro com movimento relativo definido.

Quanto à sua função, mecanismo é um sistema mecânico capaz de transformar movimentos e forças. É responsável pela transformação de um ou mais movimentos de entrada disponíveis em um ou mais movimentos de saída desejados. No caso de um motor de combustão interna, o movimento de translação alternativa é transformado em um movimento de rotação contínua do eixo das manivelas (virabrequim). Por outro lado, em um limpador de pára-brisas, o movimento de rotação contínua da manivela é convertido em um movimento de oscilação angular da palheta.

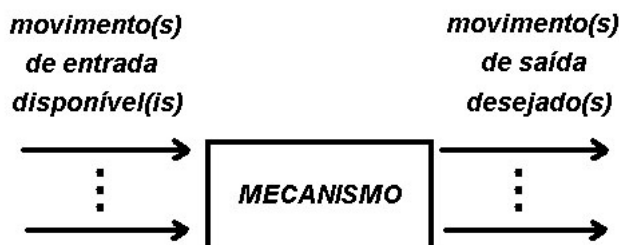


Figura 1: Mecanismo: um transformador de movimentos.

Tradicionalmente, incluem-se na categoria de mecanismos aqueles formados por um conjunto de barras conectadas por diferentes tipos de juntas, os engrenamentos de rodas dentadas e aqueles que possuem camo e seguidor.

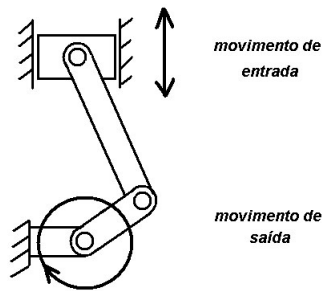


Figura 2: Motor monocilíndrico.

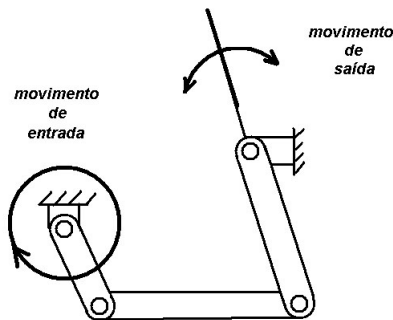


Figura 3: Mecanismo limpador de pára-brisas.

1.2 Componentes de um mecanismo

Topologicamente, os mecanismos são formados apenas por seus *elos* (ou peças), sejam eles móveis ou imóveis (fixas). O modo como estes elos se conectam depende somente da forma de suas extremidades. Podemos imaginar, por exemplo, um elo no qual uma de suas extremidades possua a forma de um pino cilíndrico e que este elo, por sua vez, esteja conectado a um outro cuja extremidade contenha um furo de diâmetro igual ao pino do primeiro elo. Desta maneira, os deslocamentos possíveis do segundo elo em relação ao primeiro serão um deslocamento angular em torno do eixo do pino e um deslocamento linear ao longo do referido eixo. Como esta conexão define um vínculo entre os dois elos, Reuleaux a denominou de par cinemático e, no caso do exemplo, o par cinemático é chamado de cilíndrico.

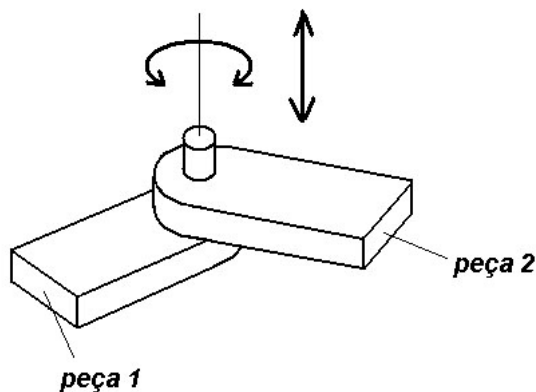


Figura 4: Exemplo de conexão entre duas peças.

No entanto, de modo a auxiliar a análise da topologia de um mecanismo e, também, por questões construtivas, normalmente considera-se que um mecanismo seja composto por elos e pares cinemáticos (juntas). Na fig.5, apresentam-se alguns tipos de pares cinemáticos comumente empregados na estrutura dos mecanismos.

Nome do par cinemático	Forma geométrica	Representações esquemáticas	Graus de liberdade
1. Revolução (R)			1
2. Cilíndrico (C)			2
3. Prismático (P)			1
4. Esférico (S)			3
5. Universal (U)			2
6. Helicoidal (H)			1
7. Plano (P _L)			3

Figura 5: Tipos de pares cinemáticos [6]

Quanto à maneira com que o contato entre os elos é mantido, os pares cinemáticos podem ser *fechados* ou *abertos*. Nos pares fechados, a forma dos elos impede a sua separação. Os pares abertos, no entanto, necessitam de uma força externa para manutenção do contato. Quanto à natureza das regiões de contato entre os elos, os pares podem ainda ser *inferiores* ou *superiores*. Nos pares inferiores, o contato se dá sobre superfícies, enquanto que nos superiores, o contato se dá sobre um ponto ou linha. Como exemplos de pares fechados e inferiores podem ser mencionados, as juntas de revolução (rotação), esféricas e prismáticas. Como exemplos de pares abertos superiores, pode-se citar o camo de disco e seguidor de sapata.

Ainda sob um ponto de vista teórico, existe uma tênue distinção entre mecanismos e as chamadas cadeias (ou correntes) cinemáticas. As cadeias cinemáticas estão mais associadas a porções ou subsistemas de um mecanismo, além do fato de não incluírem a peça fixa, imóvel. As cadeias cinemáticas, por sua vez, admitem uma pequena classificação (fig.6). Uma cadeia é dita *aberta* quando existir apenas um único caminho possível entre um elo e outro da cadeia. No caso de existir mais de um caminho entre dois elos, a cadeia é denominada *fechada*.

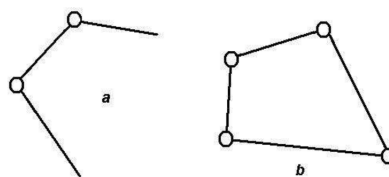


Figura 6: Cadeias cinemáticas: (a) aberta, (b) fechada.

Da mesma maneira que se utilizam esquemas simplificados para representar circuitos elétricos, hidráulicos e pneumáticos, também costumam ser adotados para representar mecanismos os chamados *diagramas cinemáticos*. A fig.8 apresenta o diagrama cinemático do mecanismo de um motor de combustão interna monocilíndrico. Como se pode observar, em muitas situações, os elos são representados apenas por segmentos de reta. Para os pares cinemáticos, contudo, não existe na literatura um consenso quanto ao par cinemático e sua respectiva forma de representação. Assim, foram também incluídas na figura 5, algumas formas alternativas para estas representações.

Quanto aos espaços em que os elos móveis executam seus movimentos, os mecanismos podem ser *planos*, *esféricos* ou ainda *tridimensionais*. Nos mecanismos planos, os elos executam movimentos em planos que sejam paralelos entre si. A categoria formada pelos mecanismos esféricos, compreende o caso em que os pontos de seus elos desenvolvem trajetórias sobre esferas concêntricas. Os mecanismos tridimensionais, por sua vez, são representados por aqueles que não satisfaçam as condições definidas para mecanismos planos ou esféricos.

Quanto aos tipos de cadeias cinemáticas presentes em um dado mecanismo, eles podem ser classificados como compostos por cadeias abertas e fechadas. Uma outra denominação mais recente para os mecanismos de cadeia aberta é chamá-los de *seriais*. Um outra categoria dentro dos mecanismos de cadeia fechada são os mecanismos ditos *paralelos*. Os mecanismos paralelos possuem pelo menos duas cadeias ativas independentes, conectando a sua base (peça fixa) ao órgão terminal (peça que realiza o movimento de saída). No caso da estrutura cinemática conter cadeias abertas e fechadas, os mecanismos são denominados *híbridos*.

A nomenclatura normalmente empregada para denominar um determinado mecanismo considera a sequência em que os pares cinemáticos aparecem na sua estrutura (Ex.: RRRR, PRRR, RSSR, 3 RRR, 6 UPS).

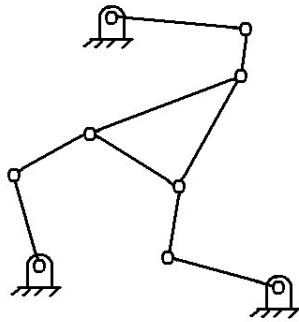


Figura 7: Mecanismo 3 RRR.

1.3 Graus de liberdade, mobilidade e conectividade

Considera-se que o *grau de liberdade* seja uma propriedade associada a um determinado par cinemático. Esta propriedade refere-se ao número de coordenadas independentes necessárias para descrever a localização de um elo do par em relação a um outro.

Deve-se ressaltar que, neste texto, considera-se que a *mobilidade* seja uma propriedade associada a um determinado mecanismo. É um índice utilizado para avaliar a capacidade de movimentação do mecanismo. Na maioria dos casos, coincide com o número de motores necessários para a movimentação do mecanismo.

O termo *conectividade* refere-se a uma propriedade de um determinado elo em relação a outro, sendo que ambos pertencem à mesma cadeia cinemática. Corresponde ao número de coordenadas independentes necessárias para definir a localização de um elo em relação a outro. Frequentemente, a conectividade poderá ser determinada a partir da soma dos graus de liberdade das juntas existentes entre os elos.

2 Mobilidade de mecanismos planos, esféricos e tridimensionais

Como foi dito na seção anterior, a mobilidade é uma propriedade associada a um determinado mecanismo. Esta propriedade refere-se ao número de coordenadas independentes necessárias para definir a configuração ocupada pelo mecanismo. Na maioria dos casos, coincide com o número de motores (ou atuadores) necessários para a movimentação do mecanismo. Para determinação da mobilidade de um mecanismo, normalmente emprega-se o critério de *Kutzbach-Gruebler*.

2.1 Critério de Kutzbach-Gruebler

O critério de Kutzbach-Gruebler pode ser definido pela seguinte equação [1]

$$M = \lambda(N_e - 1) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} (\lambda - j)n_{P_j} \quad (1)$$

sendo que M é a mobilidade, λ é um número que define o espaço de movimentação do mecanismo, N_e é o número de elos incluindo o elo imóvel, n_{P_j} é o número de pares cinemáticos que permitem j graus de liberdade. Assim, para mecanismos que operem num espaço bidimensional ou esférico, $\lambda = 3$, deve-se empregar a equação:

$$M = 3(N_e - 1) - 2n_{P_1} - n_{P_2} \quad (2)$$

Para mecanismos que operem num espaço tridimensional, $\lambda = 6$, deve-se utilizar a seguinte equação:

$$M = 6(N_e - 1) - 5n_{P_1} - 4n_{P_2} - 3n_{P_3} - 2n_{P_4} - n_{P_5} \quad (3)$$

Exemplo 2.1: biela-manivela. Este mecanismo, formado por quatro peças ($N_e=4$), possui quatro pares cinemáticos do tipo P_1 , um prismático (12) e três de rotação (23, 34 e 41). Assim, n_{P_1} vale 4 e n_{P_2} , zero, porque este mecanismo não contém pares do tipo P_2 . Utilizando a Eq.(2), determina-se que a mobilidade é unitária.

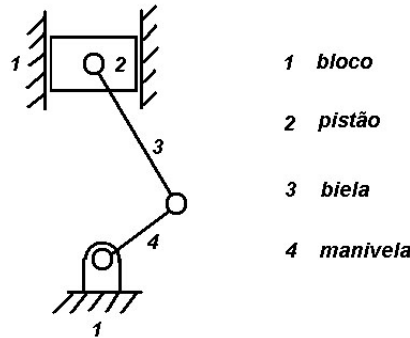


Figura 8: Biela-manivela ou PRRR.

Exemplo 2.2: camo de disco e seguidor de sapata plana. Este mecanismo é formado apenas por três peças e três pares cinemáticos. Dois destes pares são do tipo P_1 : 12 de rotação e 13 prismático. O par 23 é superior e permite um movimento de roto-translação da peça 3 em relação à peça 2 sendo, portanto, do tipo P_2 . Empregando-se a Eq.(2), obtém-se o valor 1 para a mobilidade deste mecanismo.

Exemplo 2.3: suspensão veicular duplo-triângulo. Observe o mecanismo da figura 10. Considerando somente um dos lados do veículo, tal mecanismo é formado por quatro elos e quatro pares cinemáticos. Os 4 elos são o chassi (1), as bandejas superior (2) e inferior (4) e a manga-de-eixo (3). O chassi é a peça fixa, ou imóvel. Quanto aos pares cinemáticos, há 2 pares de revolução 12 e 14 ($n_{P_1} = 2$) e dois pares esféricos 23 e 34 ($n_{P_3} = 2$) e, desta forma, a mobilidade deste mecanismo assumirá o valor 2. Esta mobilidade corresponde aos movimentos de subida ou descida da roda, e do seu próprio giro de modo a receber a atuação do mecanismo da direção (não indicado na figura).

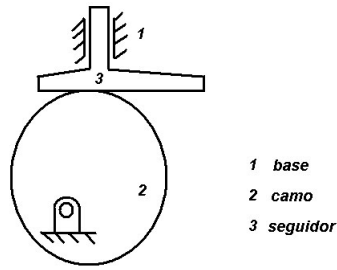


Figura 9: Camo de disco e seguidor de sapata plana.

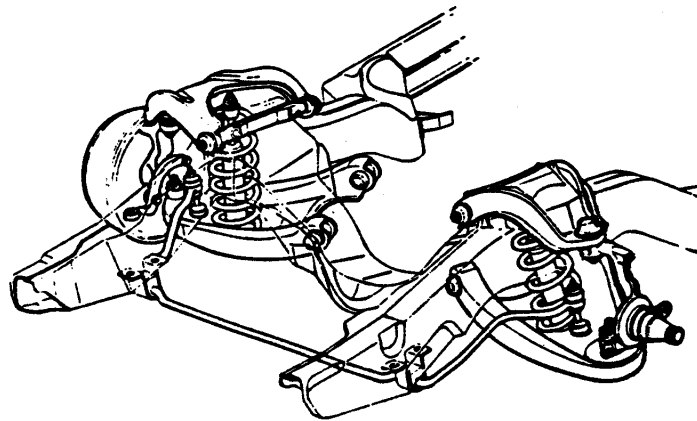


Figura 10: suspensão veicular.

2.2 Método da teoria dos grupos de deslocamento de Lie

Para determinados tipos de mecanismos, o critério de Kutzbach-Gruebler pode fornecer resultados incorretos. Apenas a título de exemplo, considere o mecanismo $RRRRRR$ da figura 12. Por se tratar de um mecanismo 3D, determina-se a sua mobilidade utilizando a Eq.(3). Assim, tanto λ , como o número total de peças N_e e n_{P_1} valem 6. Conseqüentemente, $M = 0$ e, desta forma, o critério de Kutzbach-Gruebler indica que o mecanismo $RRRRRR$ é uma estrutura imóvel. No entanto, a partir da construção de modelos físicos de tal mecanismo, observa-se que há movimento possível.

Neste caso, para o cálculo da mobilidade, recomenda-se empregar um método alternativo que se baseia na teoria dos grupos de deslocamento de Lie [3, 4]. Assim, se o mecanismo analisado fosse apenas formado pelos elos 1, 2, 3 e 4, o elo 4 seria capaz de executar, no espaço 3D, deslocamentos lineares nas direções x e z , e um deslocamento angular em torno do eixo y . Por outro lado, se o mecanismo analisado fosse apenas formado pelos elos 1, 5, 6 e 4, o elo 4 seria capaz de executar no espaço 3D, deslocamentos lineares nas direções y e z , e deslocamento angular em torno do eixo x . A intersecção dos deslocamentos possíveis previstos para o elo 4 permite concluir que o

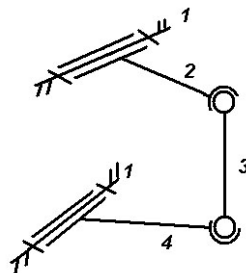


Figura 11: diagrama cinemático da suspensão.

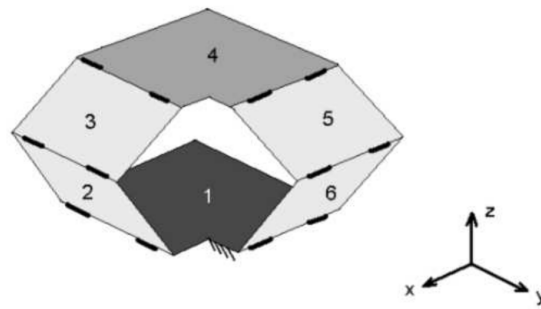


Figura 12: Mecanismo $RRRRRR$.

único movimento independente seja a translação na direção do eixo z . Conseqüentemente, a sua mobilidade será unitária. Em termos de aplicação, pode-se empregar este mecanismo como uma junta prismática composta apenas por seis juntas de rotação, ou ainda um mecanismo posicionador da peça-placa 4 na direção z , a partir de um atuador rotativo instalado em uma das juntas de rotação (p.ex., 12).

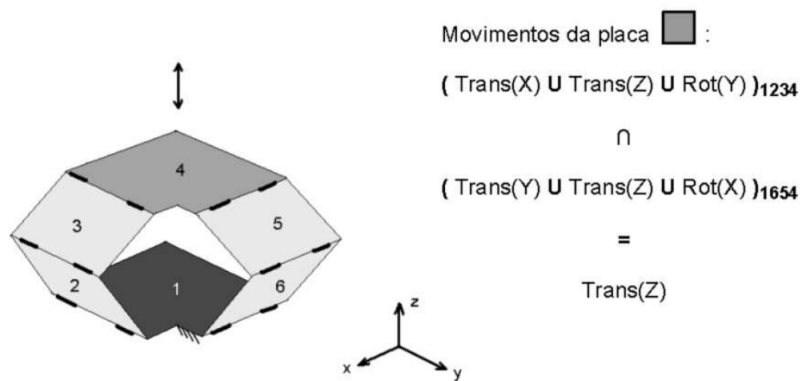


Figura 13: Movimentos possíveis da peça 4.

2.3 Exercícios

Ex 2.1: Construa os diagramas cinemáticos dos mecanismos das fig. 14 e 15.

Ex 2.2: Para os mecanismos das figs 16 a 19, numere e identifique seus elos. Classifique completamente seus pares cinemáticos. Determine sua mobilidade, e compare o resultado obtido com aquele correspondente à sua intuição.

Ex 2.3: Determine a mobilidade do mecanismo da fig. 20. Qual é o movimento possível do elo que contém a garra? Onde você instalaria os motores?

Ex 2.4: Construa os diagramas cinemáticos dos mecanismos das fig. 21, 22 e 23. Determine sua mobilidade e compare o resultado obtido com aquele correspondente à sua intuição.

Ex 2.5: Para o *robô paralelo cartesiano*, determine sua mobilidade utilizando tanto o critério de *Kutzbach-Gruebler* como o método da *teoria dos grupos de Lie*. Comente os resultados.

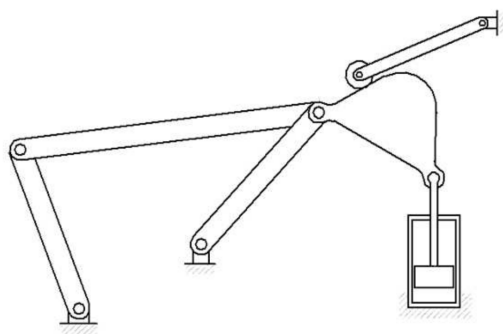


Figura 14:

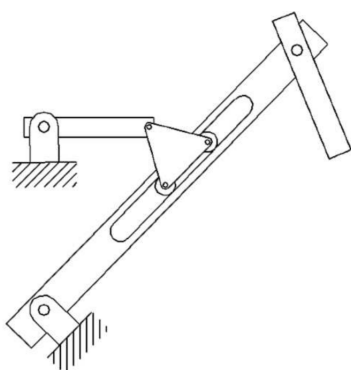


Figura 15:

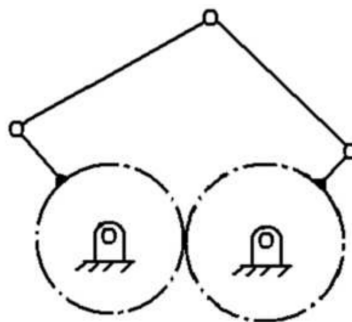


Figura 16:

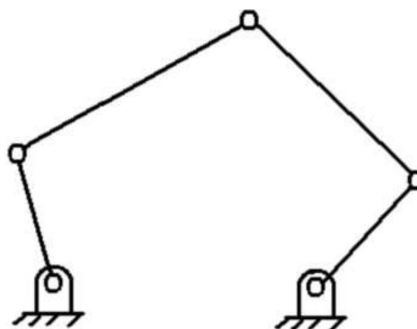


Figura 17:

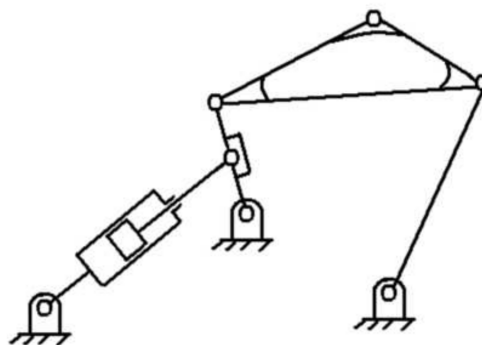


Figura 18:

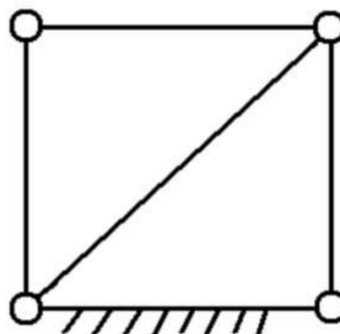


Figura 19:

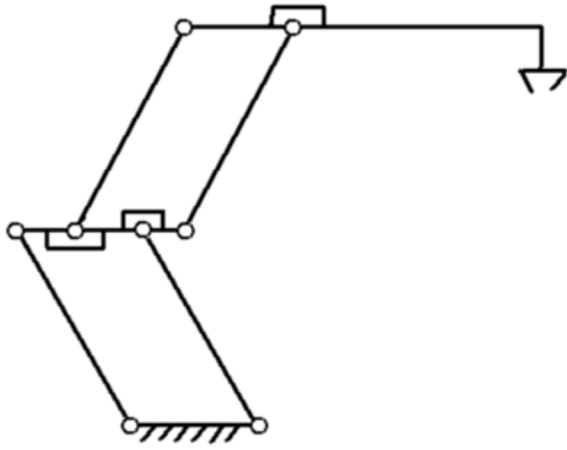


Figura 20:



Figura 22: FlexPicker IRB 360



Figura 21:

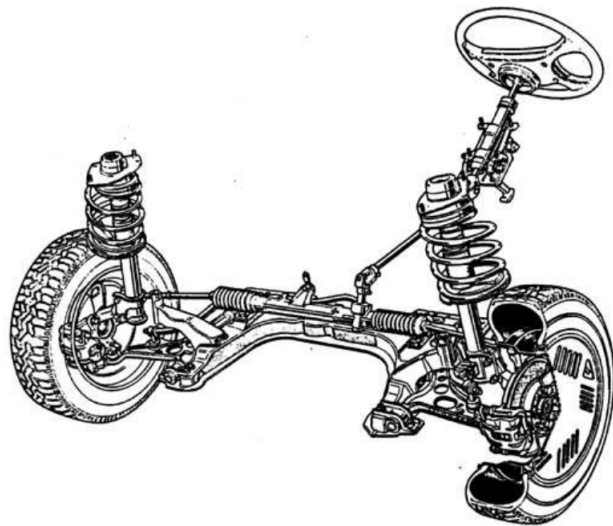


Figura 23:



Figura 24: Robô paralelo cartesiano

3 Síntese (projeto) de mecanismos

3.1 Introdução

- Síntese x Análise

De modo a compreendermos o termo *síntese*, podemos compará-lo com outro termo mais familiar a *análise*. Quando realizamos a análise, o tipo de mecanismo é sempre conhecido, enquanto que para a síntese o mecanismo é desconhecido. Na análise, os parâmetros do mecanismo são conhecidos; na síntese, estes são também desconhecidos. Com relação aos atuadores (motores) e sua localização, estes são conhecidos previamente na análise, enquanto que na síntese, estes são também desconhecidos. Com relação ao movimento de saída fornecido pelo mecanismo, para a análise, este é desconhecido e, portanto, deve ser calculado. Para a síntese, o movimento de saída é especificado.

- Síntese do Tipo e Dimensional

A *síntese do Tipo* tem por finalidade a geração de estruturas alternativas de mecanismos que atendam, qualitativamente, aos movimentos de saída especificados. Os mecanismos gerados são decorrentes da aplicação de métodos específicos de acordo com a categoria de cada mecanismo. As características dos mecanismos gerados estarão completamente definidas e, portanto, saberemos o número total de suas peças, os tipos de juntas presentes e o número de atuadores necessários.

A *síntese Dimensional*, por sua vez, se preocupa com a determinação dos parâmetros (dimensões) associados às peças do mecanismo de modo a que este satisfaça, quantitativamente, aos movimentos de saída especificados.

- As duas filosofias de síntese: antiga e atual

Antiga: previa apenas a utilização de um único motor, sendo que os mecanismos presentes em sua estrutura proporcionavam um ou vários movimentos de saída. Ex: torno convencional, plaina limadora.

Atual: prevê o emprego de dois ou mais motores, sendo que a sua estrutura mecânica proporciona, aliada a um sistema de controle adequado, uma ampla gama de movimentos de saída. Ex: manipulador robótico.

Comentários: De modo geral, o emprego da filosofia antiga ocasiona um custo mais baixo para o equipamento, porém este poderá fornecer apenas determinados movimentos com pouca ou nenhuma possibilidade de alteração. Por outro lado, as máquinas projetadas segundo a filosofia atual apresentam um custo mais elevado, porém são flexíveis quanto à alteração dos seus movimentos (programáveis).

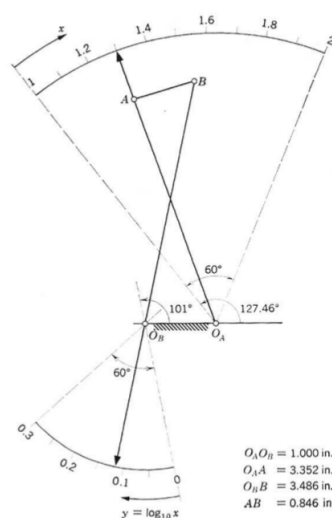


Figura 25: Mecanismo para geração de função

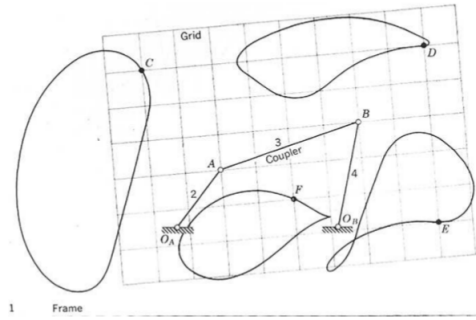


Figura 26: Mecanismo para geração de trajetória

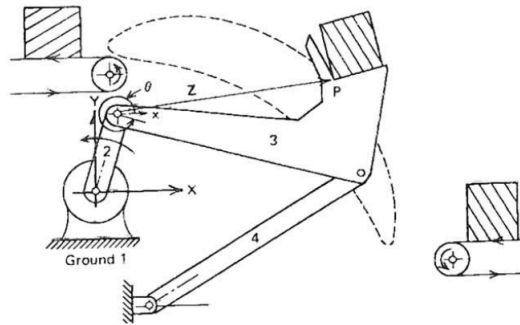


Figura 27: Mecanismo para geração de movimento

3.2 Definição da tarefa

Para caracterizar as tarefas possíveis que os mecanismos podem realizar, devemos classificá-los em duas categorias: os que possuem mobilidade unitária ($M = 1$) e aqueles com mobilidade superior à unitária ($M > 1$).

No caso de mecanismos com $M = 1$, as tarefas compreendem, basicamente, geração de movimentos ou trajetórias repetitivas, ou ainda, o cálculo de determinadas funções matemáticas [7]. Os tipos de mecanismos freqüentemente empregados são planos (2D), representados pelos quadriláteros articulados e/ou biela-manivelas. Não há praticamente qualquer possibilidade de alteração no movimento de saída gerado, a menos que um ou mais elos presentes na estrutura mecânica sejam substituídos por outros de dimensões distintas. Este assunto será mais claramente abordado no capítulo 5.

No caso de mecanismos com $M > 1$, as tarefas compreendem a execução de movimentos ou trajetórias programáveis dentro de um espaço de trabalho disponível. Este espaço de trabalho pode ser representado por uma região retangular no plano, uma esfera ou até mesmo um cilindro.

3.3 Métodos de síntese do Tipo

Os métodos de síntese do Tipo, apresentados a seguir, tratarão apenas da categoria de mecanismos com $M > 1$. O método baseado no critério de Kutzbach-Gruebler pode ser empregado na síntese de mecanismos de cadeia aberta ou fechada. Os outros métodos tratados nas seções 3.5 a 3.7 se aplicam exclusivamente a mecanismos de cadeia fechada.

3.4 Critério de Kutzbach-Gruebler

É o método mais tradicional de síntese do Tipo. As especificações de projeto preliminares referem-se à mobilidade propriamente dita e à dimensão do espaço λ onde o mecanismo deverá operar. A seguir, tomando-se a Eq.(1), obtem-se uma relação entre o número total de peças N_e e o número de juntas n_{P_j} .

No caso de mecanismos de cadeia aberta, que correspondem a uma única cadeia aberta ativa, formada apenas por juntas do tipo P_1 , \underline{P} ou \underline{R} , a eq.(1) representará uma relação entre N_e e n_{P_1} .

Exemplo 3.1: Considere que o objetivo da síntese seja gerar um mecanismo de cadeia aberta e tridimensional, em que um ponto do seu elo terminal (*end-effector*) realize três deslocamentos lineares (translações) ao longo dos eixos X, Y e Z. Assim, $\lambda = 6$ e $M = 3$. De acordo com a Eq.(1), e admitindo que a arquitetura a ser gerada contenha apenas juntas do tipo P_1 , tem-se

$$9 + 5n_{P_1} = 6N_e \quad (4)$$

Tabela 1 - Determinação de valores consistentes para n_{P_1} e N_e , dada a Eq.(4)

n_{P_1}	N_e
1	7/3
2	19/6
3	4

Como se pode observar da tabela 1, os menores valores consistentes para n_{P_1} e N_e são, respectivamente, 3 e 4. Portanto, há até 8 combinações possíveis de solução como pode ser constatado pela fig.28.

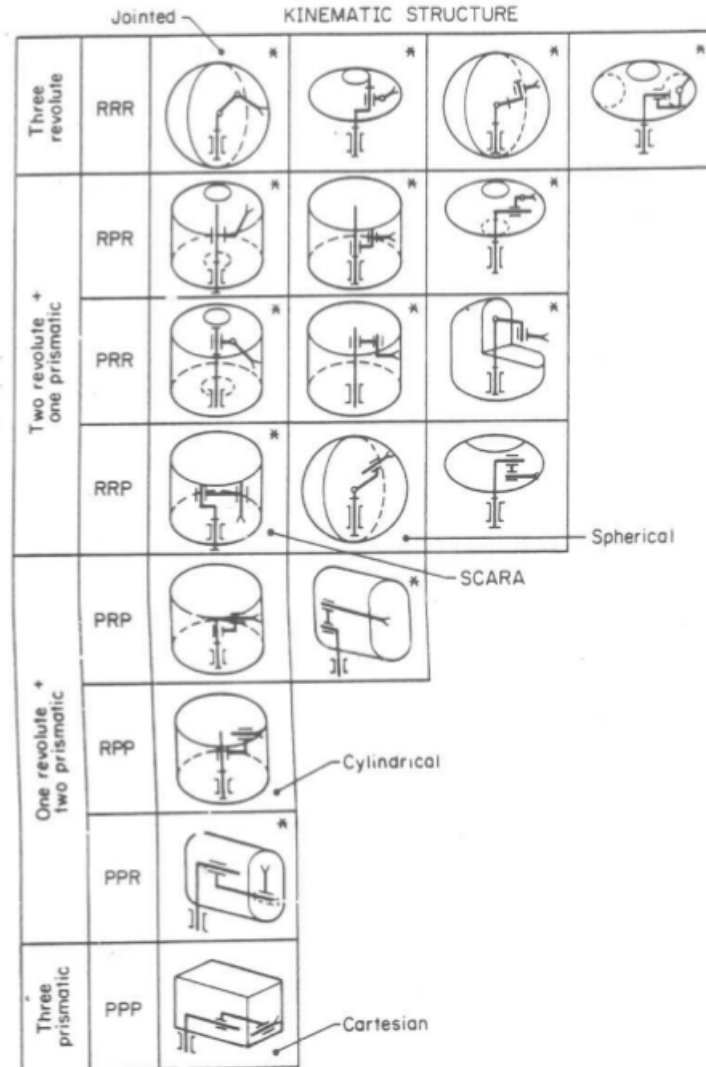


Figura 28: Diferentes tipos de mecanismos de cadeia aberta para $M = 3$

No caso de mecanismos de cadeia fechada, o universo de soluções é geralmente muito maior porque podem existir várias cadeias contendo juntas ativas ou passivas, cujos tipos podem variar entre P_1 a P_3 . Por causa disto, recomenda-se para a síntese do Tipo destas estruturas os métodos das seções 3.5 a 3.7.

3.5 Método da enumeração de cadeias ativas

O método da enumeração das cadeias ativas [2] admite algumas hipóteses válidas que funcionam como restrições. Uma vez que a dimensão do espaço λ onde o mecanismo deverá operar estiver definida, admite-se que o número de cadeias ativas m - aquelas cadeias cinemáticas que conectam o elo imóvel ao elo terminal - seja igual à mobilidade M . Para ser considerada ativa, a cadeia cinemática deve possuir pelo menos uma junta ativa, ou seja, que haja um motor entre os elos que a junta conecta. A propriedade conectividade associada a cada cadeia ativa será a conectividade do elo terminal em relação ao elo imóvel, seguindo um caminho ao longo desta cadeia. Além disso, a conectividade total C_T , definida como a soma das conectividades de todas as cadeias, pode ser determinada empregando a Eq.(5).

$$C_T = \sum_{k=1}^m C_k = (\lambda + 1)M - \lambda \quad (5)$$

A conectividade da k -ésima cadeia deve ser restrita a valores entre M e λ , seus limites inferior e superior, respectivamente, conforme indicado na Eq.(6). A partir destes valores calculados, pode-se enumerar um grande número de mecanismos que satisfaçam estas condições (fig.29).

$$M \leq C_k \leq \lambda \quad (6)$$

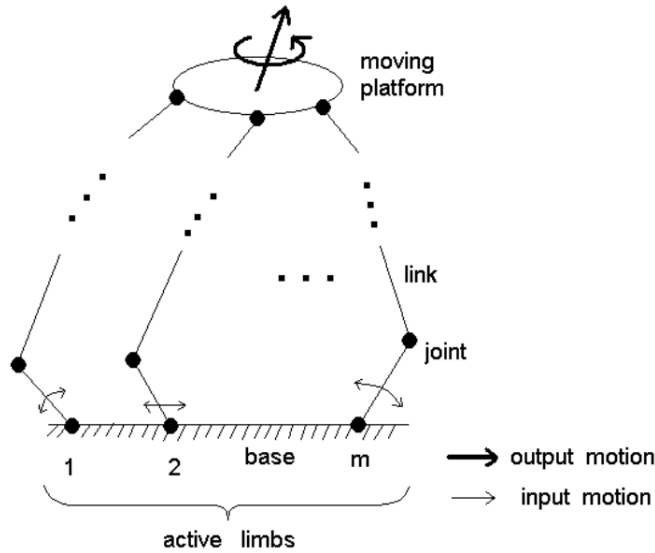


Figura 29: Mecanismo de cadeia fechada com m cadeias ativas

Exemplo 3.2: Considere que o objetivo da síntese seja gerar um mecanismo tridimensional, que seu elo terminal seja capaz de realizar 3 deslocamentos lineares (posicionamento) ao longo dos eixos X, Y e Z, além de 3 deslocamentos angulares (orientação) ao longo dos mesmos eixos. Assim, $\lambda = 6$ e $M = 6$, a conectividade total calculada pela Eq.(5) será 36. De acordo com a Eq.(6), C_k para $k = 1, \dots, 6$ vale 6. Desta forma, uma solução possível para este caso é a plataforma de Gough-Stewart $6UPS$, utilizada como Simulador de vôo da aeronave MD11 (fig.30).

3.6 Método da adição de cadeia passiva

O método da adição de uma cadeia passiva considera que os deslocamentos independentes e possíveis do elo terminal (plataforma móvel), num determinado espaço de movimentação, sejam restringidos pela cadeia passiva a ele conectada. De fato, a cadeia passiva deve ser cuidadosamente selecionada de tal modo que o número M e os tipos de deslocamentos disponíveis para o elo terminal correspondam aos desejados (fig.31).

$$C_{m+1} = M \quad (7)$$



Figura 30: Simulador de voo da aeronave MD11

Além disso, para não restringir ainda mais os deslocamentos possíveis do elo terminal, as conectividades das m cadeias ativas remanescentes devem ser iguais a λ .

$$C_1 = C_2 = \dots = C_m = \lambda \quad (8)$$

Conseqüentemente, a conectividade total C_T torna-se

$$C_T = (\lambda + 1)M \quad (9)$$

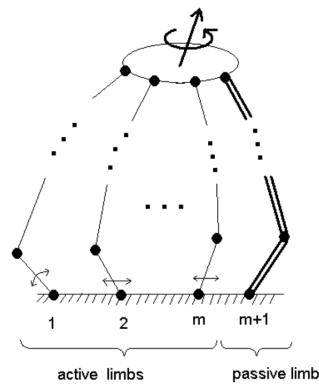


Figura 31: Estrutura paralela com uma cadeia passiva e m ativas

Exemplo 3.3: Considere que o objetivo da síntese seja gerar um mecanismo tridimensional, cuja elo terminal realize 2 deslocamentos angulares ao longo dos eixos X e Y, e um deslocamento linear na direção radial, proporcionando um espaço de trabalho esférico. Assim, $\lambda = 6$ e $M = 3$, e de acordo com a Eq.(7), $C_4 = 3$. A cadeia passiva que satisfaz estas condições será a *UP*. As conectividades das demais cadeias C_k ($k = 1, 2, 3$) devem valer 6. Desta forma, uma arquitetura possível para resolver este problema será a $3\text{UPS}+\text{UP}$, também utilizada como máquina de usinagem (tricept).

3.7 Método alternativo

Este método alternativo de síntese envolve três passos descritos a seguir:

Passo 1) Considere como ponto de partida, uma arquitetura gerada pela aplicação do método da adição da cadeia passiva.

Passo 2) Então, elimine uma das cadeias ativas.



Figura 32: Máquina de usinagem Tricept

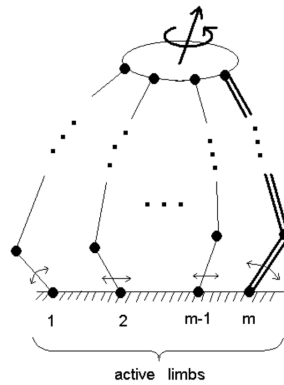


Figura 33: Estrutura paralela com m cadeias ativas

Passo 3) Finalmente, transforme a cadeia passiva em ativa.

De acordo com os passos 1 e 2, a conectividade da cadeia que restringe o movimento da plataforma móvel é

$$C_m = M \quad (10)$$

enquanto que as conectividades das cadeias ativas remanescentes $m-1$ devem ser iguais a λ .

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{m-1} = \lambda \quad (11)$$

Conseqüentemente, a conectividade total C_T torna-se

$$C_T = \sum_{k=1}^m C_k = \lambda(M - 1) + M = (\lambda + 1)M - \lambda \quad (12)$$

O terceiro passo é realizado pela escolha de uma junta dentre as utilizadas na cadeia passiva e, em seguida, o acoplamento de um atuador entre os elos que ela conecta. Este atuador fornecerá um movimento de rotação ou translação dentre os graus de liberdade disponíveis para esta junta. Preferencialmente, para reduzir as inércias das peças móveis, a escolha deve recair sobre a junta mais próxima da base do mecanismo (fig.33). Pela observação das Eqs. (10–12), pode-se perceber que este método satisfaz as mesmas condições do método da enumeração das cadeias ativas.

Exemplo 3.4: Admita que o objetivo da síntese seja gerar um mecanismo plano de mobilidade igual a 2, sendo que seu elo terminal apenas realize dois deslocamentos lineares independentes. De acordo com o passo 1, um mecanismo viável para a tarefa seria o $2 \underline{RRR} + \underline{PP}$. De fato, a conectividade da cadeia passiva é 2, enquanto que as conectividades das outras duas - C_1 e C_2 - valem 3. Aplicando o passo 2, elimina-se uma das cadeias ativas \underline{RRR} . Finalmente, converta em ativa a cadeia passiva instalando um atuador para guiar o movimento da junta prismática mais próxima à base. A figura 34 indica que o mecanismo paralelo sintetizado é o $\underline{RRR} + \underline{PP}$.

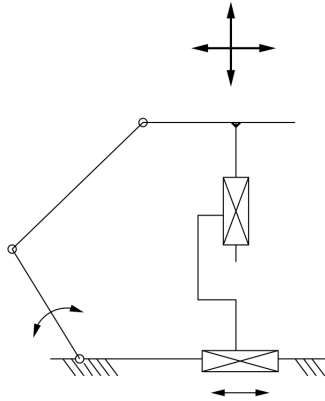


Figura 34: Mecanismo plano $\underline{RRR}+\underline{PP}$

3.8 Formas alternativas de atuação

Os atuadores (ou motores), localizados nas juntas ativas, devem ser instalados preferencialmente na base ou junto à base. As juntas ativas são normalmente do tipo P_1 , de rotação ou prismática.

No caso de juntas \underline{R} , os atuadores comercialmente disponíveis são motores elétricos rotativos (de passo, de corrente contínua CC, de corrente alternada CA) e motores rotativos hidráulicos ou pneumáticos.

No caso de juntas \underline{P} , as formas possíveis de atuação são as seguintes:

- motor elétrico rotativo com eixo acoplado a um fuso com guia linear
- motor elétrico rotativo com eixo acoplado a duas polias dentadas, com transmissão por correia a uma guia linear
- cilindro hidráulico ou pneumático
- motor elétrico linear

3.9 Exercícios

Para os exercícios 3.1 a 3.3, desenvolva a síntese do Tipo empregando tanto o critério de Kutzbach-Gruebler (mecanismo de cadeia aberta) como o método da enumeração de cadeias ativas (mecanismo de cadeia fechada). Indique as juntas ativas e comente acerca das formas de atuação.

Ex 3.1: Sintetize um mecanismo esférico, sendo que seu elo terminal realize 3 rotações em torno dos eixos X, Y e Z.

Ex 3.2: Obtenha um mecanismo tridimensional, sendo que seu elo terminal seja capaz de realizar deslocamentos lineares apenas na direção Z e deslocamentos angulares nas direções X e Y.

Ex 3.3: Gere um mecanismo tridimensional, sendo que seu elo terminal execute deslocamentos lineares nas direções X e Z, e deslocamentos angulares nas direções X e Y.

Para os exercícios 3.4 e 3.5, desenvolva a síntese do Tipo empregando o método da adição de uma cadeia passiva. Indique também as juntas ativas e comente acerca das formas de atuação.

Ex 3.4: Gere um mecanismo esférico em que seu elo terminal execute deslocamentos angulares nas direções X e Y.

Ex 3.5: Gere um robô tridimensional cuja garra percorra um espaço de trabalho cilíndrico.

Para os exercícios 3.6 e 3.7, desenvolva a síntese do Tipo empregando o método alternativo. Indique também as juntas ativas e comente acerca das formas de atuação.

Ex 3.6: Gere um mecanismo plano de tal modo que seu elo terminal realize deslocamentos lineares nas direções X e Y, propondo uma solução diferente daquela apresentada no exemplo 3.4.

Ex 3.7: Gere um robô 3D cuja garra percorra um espaço de trabalho cilíndrico.

4 Análise cinemática de mecanismos planos

4.1 Finalidade

Observar o comportamento da estrutura de mecanismos pela determinação de posições, deslocamentos, velocidades e acelerações de pontos, peças da estrutura, admitidos conhecidos seus parâmetros (grandezas que não variam com o tempo) e o movimento imposto pelo atuador ou especificado para a ferramenta. Como resultado desta determinação, torna-se possível avaliar, por exemplo, o espaço de trabalho de um robô, prever os movimentos das peças de uma retroescavadeira, ou até mesmo, verificar a ocorrência de configurações de travamento ou incontrolabilidade de um mecanismo.

4.2 Localização de um ponto

Nesta subseção, para a descrição da localização de um ponto no espaço 2D, será adotada a notação matricial, utilizando-se uma transformação fundamental denominada *transformação homogênea* [5]. Considere que ${}^A\mathbf{r}_P$ represente o ponto P cujas coordenadas sejam expressas na base A , ${}^B\mathbf{r}_P$ represente o mesmo ponto P , com suas coordenadas definidas na base B e ${}^A T_B$ a matriz de transformação homogênea que converte as coordenadas de P da base B para a base A . Deve-se enfatizar que os tamanhos das matrizes e vetores empregados são tais que as equações deduzidas são válidas para o movimento plano, ou seja, o caso bidimensional. Assim,

$$\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^A T_B] \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

sendo

$$[{}^A T_B] = \begin{bmatrix} [{}^A R_B] & {}^A\mathbf{r}_{O_B} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$[{}^A R_B] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}^T = [0 \quad 0]$$

Demonstração: Considere duas bases A e B , definidas, respectivamente, pelos versores $\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A$ e $\mathbf{i}_B, \mathbf{j}_B$, bem como por suas origens O_A e O_B (fig.35). Admita que a base B esteja rotacionada de um ângulo θ em relação à base A . Desta maneira, os versores \mathbf{i}_B e \mathbf{j}_B podem ser escritos em função de θ e dos versores \mathbf{i}_A e \mathbf{j}_A .

$$\mathbf{i}_B = \cos\theta\mathbf{i}_A + \text{sen}\theta\mathbf{j}_A \quad (14)$$

$$\mathbf{j}_B = -\text{sen}\theta\mathbf{i}_A + \cos\theta\mathbf{j}_A \quad (15)$$

A seguinte equação vetorial é válida para um vetor \mathbf{v} , expresso em função dos versores \mathbf{i}_B e \mathbf{j}_B

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_B)\mathbf{i}_B + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}_B)\mathbf{j}_B = ({}^B v_x)\mathbf{i}_B + ({}^B v_y)\mathbf{j}_B$$

Analogamente, o mesmo vetor \mathbf{v} também pode ser expresso em função dos versores \mathbf{i}_A e \mathbf{j}_A

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_A)\mathbf{i}_A + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}_A)\mathbf{j}_A = ({}^A v_x)\mathbf{i}_A + ({}^A v_y)\mathbf{j}_A$$

Igualando-se as duas equações vetoriais anteriores, obtém-se

$$({}^A v_x)\mathbf{i}_A + ({}^A v_y)\mathbf{j}_A = ({}^B v_x)\mathbf{i}_B + ({}^B v_y)\mathbf{j}_B \quad (16)$$

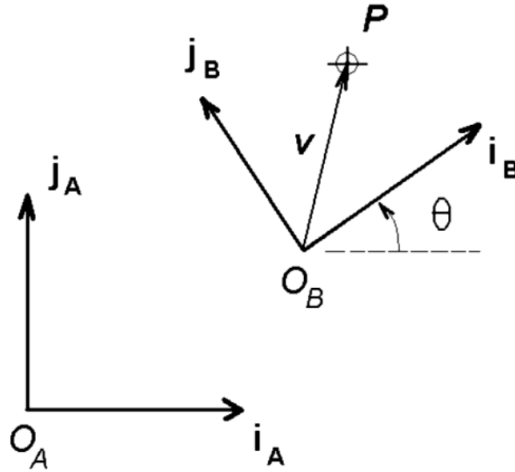


Figura 35: Bases A e B, ponto P e vetor \mathbf{v}

Substituindo-se os versores \mathbf{i}_B e \mathbf{j}_B em função de \mathbf{i}_A e \mathbf{j}_A , obtém-se

$$({}^A v_x)\mathbf{i}_A + ({}^A v_y)\mathbf{j}_A = [({}^B v_x)\cos\theta - ({}^B v_y)\sin\theta]\mathbf{i}_A + [({}^B v_x)\sin\theta + ({}^B v_y)\cos\theta]\mathbf{j}_A$$

Assim,

$${}^A v_x = ({}^B v_x)\cos\theta - ({}^B v_y)\sin\theta$$

$${}^A v_y = ({}^B v_x)\sin\theta + ({}^B v_y)\cos\theta$$

Conseqüentemente,

$$\begin{bmatrix} {}^A v_x \\ {}^A v_y \end{bmatrix} = [{}^A R_B] \begin{bmatrix} {}^B v_x \\ {}^B v_y \end{bmatrix}$$

sendo

$$[{}^A R_B] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Admita, sem perda de generalidade, que o vetor ${}^B \mathbf{r}_P$ seja igual ao vetor ${}^B \mathbf{v}$

$${}^B \mathbf{r}_P = {}^B \mathbf{r}_P - {}^B \mathbf{r}_{O_B} = {}^B \mathbf{v}$$

o ponto ${}^A \mathbf{r}_P$ será

$${}^A \mathbf{r}_P = {}^A \mathbf{r}_{O_B} + {}^A \mathbf{v} = {}^A \mathbf{r}_{O_B} + [{}^A R_B]{}^B \mathbf{r}_P \quad (17)$$

Observe que o resultado da eq. 17 coincide com a expressão da eq.72. Note ainda que

$$[{}^A R_B] = [{}^A \mathbf{i}_B \quad {}^A \mathbf{j}_B]$$

Transformação inversa: Resta-nos ainda determinar a expressão da transformação inversa $[{}^A T_B^{-1}]$. Partindo da eq. 17, e multiplicando-se cada lado pela matriz $[{}^A R_B]^{-1}$

$$[{}^A R_B^{-1}][{}^A \mathbf{r}_P] = [{}^A R_B^{-1}][{}^A \mathbf{r}_{O_B}] + [{}^A R_B]^{-1}[{}^A R_B][{}^B \mathbf{r}_P]$$

Reorganizando-se a eq. anterior, obtém-se

$${}^B \mathbf{r}_P = [{}^A R_B]^{-1}[{}^A \mathbf{r}_P] - [{}^A R_B]^{-1}[{}^A \mathbf{r}_{O_B}]$$

Partindo das eqs. vetoriais 14 e 15, pode-se concluir que

$$\mathbf{i}_A = \cos\theta\mathbf{i}_B - \sin\theta\mathbf{j}_B \quad (18)$$

$$\mathbf{j}_A = \sin\theta\mathbf{i}_B + \cos\theta\mathbf{j}_B \quad (19)$$

Substituindo os versores \mathbf{i}_A e \mathbf{j}_A na eq.16, obtem-se

$$\begin{bmatrix} {}^B v_x \\ {}^B v_y \end{bmatrix} = [{}^B R_A] \begin{bmatrix} {}^A v_x \\ {}^A v_y \end{bmatrix}$$

sendo

$$[{}^B R_A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Perceba ainda que

$$[{}^A R_B]^{-1} = [{}^A R_B]^T = \begin{bmatrix} {}^A \mathbf{i}_B^T \\ {}^A \mathbf{j}_B^T \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} {}^B \mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^B T_A] \begin{bmatrix} {}^A \mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

sendo

$$[{}^B T_A] = [{}^A T_B]^{-1} = \begin{bmatrix} [{}^A R_B]^T & -[{}^A R_B]^T [{}^A \mathbf{r}_{O_B}] \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 Formulação do problema

Para esclarecer a aplicação da teoria apresentada na seção anterior, na situação em que existam mais de duas peças na estrutura do mecanismo, será apresentado o exemplo de um robô plano.

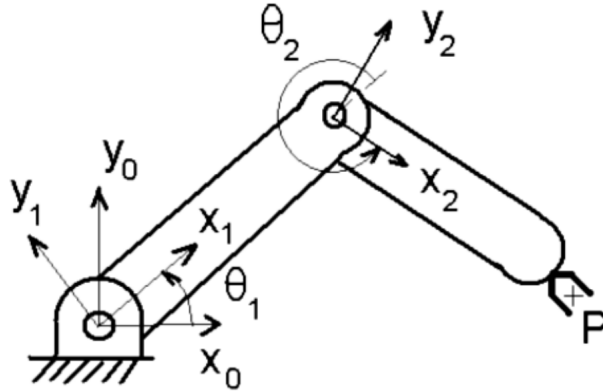


Figura 36: Robô \underline{RR}

Exemplo 4.1: Robô \underline{RR} . Considere o robô de cadeia cinemática aberta \underline{RR} , apresentado na fig. 36. Seus parâmetros são os comprimentos l_1 e l_2 , correspondentes às dimensões das peças 1 e 2. Pretende-se com esta análise obter a relação matemática entre as coordenadas ${}^0 x_P$ e ${}^0 y_P$ do ponto P na base 0 e os ângulos θ_1 e θ_2 , referentes aos deslocamentos impostos pelos atuadores instalados nas duas juntas de rotação presentes em sua estrutura cinemática.

$$\begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^0 T_1][{}^1 T_2] \begin{bmatrix} {}^2 \mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

sendo

$$[{}^0 T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[{}^1 T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & l_1 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{r}_P &= [l_2 \quad 0]^T \\ {}^0\mathbf{r}_P &= [{}^0x_P \quad {}^0y_P]^T \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} {}^0x_P \\ {}^0y_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos\theta_1 \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin\theta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Considere os seguintes valores numéricos para o robô do exemplo: $l_1 = l_2 = 1$, $\theta_1 = 30^\circ$ e $\theta_2 = 60^\circ$. Aplicando-se a eq.21, obtém-se $x = \sqrt{3}/2$ e $y = 1,5$. Observe que a relação matemática entre as variáveis e os parâmetros deste robô, também pode ser expressa por duas funções nulas Φ_1 e Φ_2

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta_1, \theta_2, x, y, l_1, l_2) &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - x = 0 \\ \Phi_2(\theta_1, \theta_2, x, y, l_1, l_2) &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - y = 0 \end{aligned}$$

De modo geral, a formulação do problema da análise cinemática de posição, trata da obtenção da equação geral

$$\Phi(\mathbf{q}_I, \mathbf{q}_D, \mathbf{L}) = \mathbf{0} \quad (22)$$

sendo \mathbf{q}_I , o vetor cujos elementos representam os deslocamentos dos atuadores, \mathbf{q}_D , outro vetor cujos elementos correspondem às coordenadas associadas ao ponto P pertencente à garra, \mathbf{L} , o vetor cujos elementos são parâmetros do mecanismo. No caso do exemplo, estes vetores são $M \times 1$, sendo M a mobilidade do mecanismo.

4.4 Resolução das equações

Após a obtenção das relações matemáticas por métodos vetoriais ou matriciais, ou seja, o vetor-nulo de funções definido pela eq. 22, tais equações podem ser resolvidas através do emprego de métodos analíticos ou numéricos. Alguns destes métodos serão apresentados nas próximas subseções.

4.5 Método analítico

Para um grande número de mecanismos, tanto planos como tridimensionais, após a modelagem matemática é necessário resolver a seguinte equação na incógnita θ

$$E \cos \theta + F \sin \theta + G = 0 \quad (23)$$

sendo E , F e G coeficientes conhecidos, função dos parâmetros e de variáveis conhecidas do mecanismo. Uma maneira bastante recomendada na literatura sugere que se realize a seguinte transformação de variável

$$u = tg \frac{\theta}{2}$$

Conseqüentemente, derivam as seguintes expressões para $\cos \theta$ e $\sin \theta$, respectivamente,

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}$$

Substituindo as duas expressões anteriores na eq.(23), obtém-se

$$(G - E)u^2 + (2F)u + (G + E) = 0 \quad (24)$$

que representa uma equação polinomial do 2.º grau na incógnita u , que por sua vez é função de θ . A solução de tal equação recai nos seguintes casos:

1. $G = E$,

$$u = -(G + E)/(2F)$$

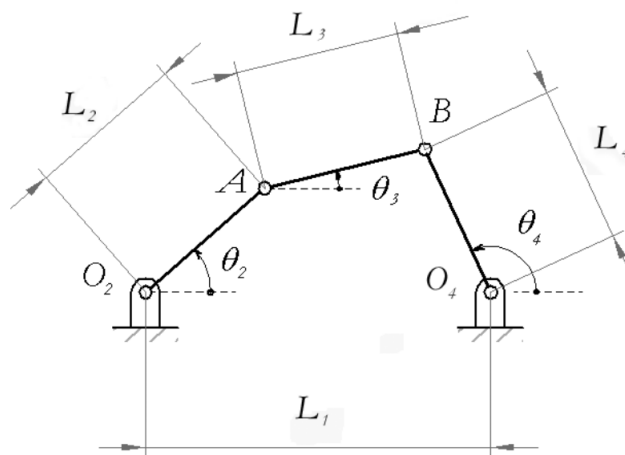


Figura 37: Quadrilátero articulado

2. $G \neq E$,

$$u = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - G^2 + E^2}}{G - E}$$

Observe que para cada valor de u , calculado pelas expressões anteriores, corresponde um único valor de θ .

Exemplo 4.2: As eqs. (25) são obtidas a partir da modelagem matemática do quadrilátero articulado, (fig.37), formando um sistema de 2 eqs. a 2 incógnitas

$$\begin{aligned} L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 &= L_1 + L_4 \cos \theta_4 \\ L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 &= L_4 \sin \theta_4 \end{aligned} \quad (25)$$

Para eliminar a incógnita θ_3 , isolam-se os termos em $\cos \theta_3$ e $\sin \theta_3$ nas eqs. (25), respectivamente, e elevam-se estas eqs. ao quadrado. A seguir, as novas eqs. devem ser somadas. Simplificando a eq. resultante e dividindo-a por L_4^2 , obtém-se

$$E \cos \theta_4 + F \sin \theta_4 + G = 0 \quad (26)$$

sendo

$$\begin{aligned} E &= -\frac{2L_2}{L_4} \cos \theta_2 + \frac{2L_1}{L_4} \\ F &= \frac{-2L_2 \sin \theta_2}{L_4} \\ G &= \frac{-L_3^2 + L_1^2 + L_4^2 + L_2^2 - 2L_1 L_2 \cos \theta_2}{L_4^2} \end{aligned}$$

Admitindo que $L_1 = 2$, $L_2 = L_3 = L_4 = 1$ e que θ_2 seja 0,

$$\begin{aligned} E &= \frac{-2 \cdot 1 \cdot 1}{1} + \frac{2 \cdot 2}{1} \\ F &= 0 \\ G &= \frac{-1 + 4 + 1 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{1} = 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} (G - E)u^2 + (2F)u + (G + E) &= 0 \\ (-1)u^2 + 3 &= 0 \\ u^2 &= 3 \end{aligned}$$

Assim, $u = \pm\sqrt{3}$. Para $u = \sqrt{3}$,

$$\cos \theta_4 = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} = \frac{1 - 3}{1 + 3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen} \theta_4 = \frac{2u}{1 + u^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\theta_4 = 120^\circ$. Para $u = -\sqrt{3}$,

$$\cos \theta'_4 = \frac{1 - 3}{1 + 3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen} \theta'_4 = \frac{-2\sqrt{3}}{1 + 3} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\theta'_4 = -120^\circ$. Para resolver o sistema original, resta-nos ainda calcular θ_3 .

$$\cos \theta_3 = \frac{2 + \frac{-1}{2} - 1.1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen} \theta_3 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1.0}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, $\theta_3 = 60^\circ$

$$\cos \theta'_3 = \frac{2 + \frac{-1}{2} - 1.1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen} \theta'_3 = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2} - 1.0}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, $\theta'_3 = -60^\circ$

4.6 Método da Eliminação Dialítica

- Finalidade: Transformar um sistema não-linear de n eqs. e n incógnitas em uma eq. polinomial de grau p contendo apenas uma única variável [2].
- **Exemplo 4.3:** Seja dado o seguinte sistema de equações:

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 8 = 0 \quad (27)$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (28)$$

Para iniciar a aplicação do método, reescrevem-se as eqs., apresentando-as em função de apenas uma das 2 incógnitas.

$$5y^2 + (-6x)y + (5x^2 - 8)y^0 = 0 \quad (29)$$

$$y^2 + 0y^1 + (x^2 - 2x)y^0 = 0 \quad (30)$$

As eqs. anteriores são reescritas novamente a partir de uma mudança nas variáveis

$$Av_2 + Bv_1 + Cv_0 = 0 \quad (31)$$

$$Dv_2 + 0v_1 + Ev_0 = 0 \quad (32)$$

sendo $v_2 = y^2, v_1 = y^1, v_0 = y^0, A = 5, B = -6x, C = 5x^2 - 8, D = 1, E = x^2 - 2x$.

Observamos que o sistema passa a ser formado por duas eqs. e 3 incógnitas (v_2, v_1, v_0). Multiplicando por y cada uma delas, vem

$$Av_3 + Bv_2 + Cv_1 + 0v_0 = 0 \quad (33)$$

$$Dv_3 + 0v_2 + Ev_1 + 0v_0 = 0 \quad (34)$$

Assim, o sistema formado pelas 4 eqs. anteriores passa a ter 4 incógnitas (v_3, v_2, v_1, v_0) .

$$Mv = 0 \quad (35)$$

sendo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A & B & C \\ 0 & D & 0 & E \\ A & B & C & 0 \\ D & 0 & E & 0 \end{bmatrix}$$
$$v = \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Como $v_0 = 1$, a solução de tal sistema não pode ser a trivial $(0, 0, 0, 0)$ e, conseqüentemente, o determinante da matriz M deve ser nulo.

$$\det M = -(AE)^2 + ACDE - B^2DE + DC(AE - CD) = 0 \quad (36)$$

Finalmente, surge a eq. polinomial de 4o. grau na variável x

$$-36x^4 + 72x^3 - 100x^2 + 160x - 64 = 0 \quad (37)$$

As soluções da eq. anterior são $x = (0.5237, 1.5734, -0.0486 + 1.468j, -0.0486 - 1.468j)$. A outra incógnita y pode ser calculada pela eq. a seguir

$$y = \frac{10x - 8}{6x}$$

Como interpretação dos resultados, as raízes reais da eq. polinomial correspondem aos pontos de intersecção entre uma elipse e uma circunferência. Observe a listagem do arquivo *elim.dial.nb* (fig. 38,39) referente aos cálculos realizados pelo software *Mathematica*.


```

M = {{0, a, b, c}, {0, d, 0, e}, {a, b, c, 0}, {d, 0, e, 0}}
{{0, a, b, c}, {0, d, 0, e}, {a, b, c, 0}, {d, 0, e, 0}}

MatrixForm[M]

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & d & 0 & e \\ a & b & c & 0 \\ d & 0 & e & 0 \end{pmatrix}$$


Det[M]
-c2 d2 - b2 de + 2 acde - a2 e2
-c2 d2 - b2 de + 2 acde - a2 e2 /. a + 5 /. b + -6 x /. c + 5 x2 - 8 /. d + 1 /. e + x2 - 2 x
-36 x2 (-2 x + x2) - 25 (-2 x + x2)2 + 10 (-2 x + x2) (-8 + 5 x2) - (-8 + 5 x2)2

Expand[*]
-64 + 160 x - 100 x2 + 72 x3 - 36 x4

Simplify[-64 + 160 x - 100 x2 + 72 x3 - 36 x4]
-4 (16 - 40 x + 25 x2 - 18 x3 + 9 x4)

In[12]:= NSolve[16 - 40 x + 25 x2 - 18 x3 + 9 x4 = 0, x]
Out[12]= {{x -> -0.0485658 - 1.46803 i},
{x -> -0.0485658 + 1.46803 i}, {x -> 0.523707}, {x -> 1.57342}}

In[16]:= Solve[5 x2 + 5 y2 - 6 x y - 8 == 0, y]
Out[16]= {{y ->  $\frac{1}{5} (3 x - 2 \sqrt{2} \sqrt{5 - 2 x^2})$ }, {y ->  $\frac{1}{5} (3 x + 2 \sqrt{2} \sqrt{5 - 2 x^2})$ }}

```

Figura 38: Listagem e resultados do arquivo "elim dial.nb", escrito para Mathematica.

4.7 Método numérico de Newton-Raphson

- Finalidade: Resolver um sistema não-linear de n eqs. e n incógnitas empregando um método numérico [6].
- **Exemplo 4.4:** Seja dado o seguinte sistema de equações:

$$\Phi_1(\theta_3, l) = L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 - l = 0 \quad (38)$$

$$\Phi_2(\theta_3, l) = L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 = 0 \quad (39)$$

obtido a partir da modelagem matemática de um mecanismo *biela-manivela*. Tal sistema é formado por duas equações e duas incógnitas θ_3 e l . Admita que seus parâmetros L_2 e L_3 tenham valor unitário.

Reescrevendo as eqs., temos:

$$\Phi_1(\theta_3, l) = \cos \theta_2 + \cos \theta_3 - l = 0 \quad (40)$$

$$\Phi_2(\theta_3, l) = \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0 \quad (41)$$

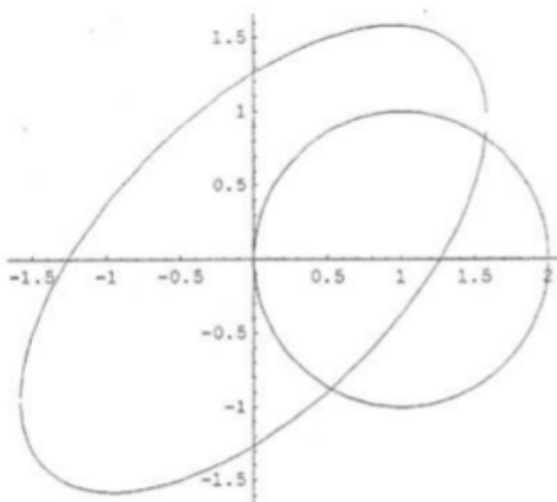
```
Plot[{{ $\frac{1}{5} (3x - 2\sqrt{2}\sqrt{5-2x^2})$ ,  $\frac{1}{5} (3x + 2\sqrt{2}\sqrt{5-2x^2})$ ,  $-\sqrt{2x-x^2}$ ,  $\sqrt{2x-x^2}$ },
{x, -3, 3}, AspectRatio -> Automatic]
```

```
Plot::plnr :  $\frac{1}{5} (3x - 2\sqrt{2}\sqrt{5-2x^2})$  is not a machine-size real number at x = -3.. More...
```

```
Plot::plnr :  $\frac{1}{5} (3x - 2\sqrt{2}\sqrt{5-2x^2})$  is not a machine-size real number at x = -2.7566. More...
```

```
Plot::plnr :  $\frac{1}{5} (3x - 2\sqrt{2}\sqrt{5-2x^2})$  is not a machine-size real number at x = -2.49115. More...
```

```
General::stop : Further output of Plot::plnr will be suppressed during this calculation. More...
```



- Graphics -

```
In[1]:= NSolve[16 - 40 x + 25 x^2 - 18 x^3 + 9 x^4 = 0, x]
```

```
Out[1]= {{x -> -0.0485658 - 1.46803 i},
{x -> -0.0485658 + 1.46803 i}, {x -> 0.523707}, {x -> 1.57342}}
```

```
In[7]:= y = (ae - dc) / (db) /. a -> 5 /. b -> -6 x /. c -> 5 x^2 - 8 /. d -> 1 /. e -> x^2 - 2 x
```

```
Out[7]=  $-\frac{8 - 5x^2 + 5(-2x + x^2)}{6x}$ 
```

```
In[8]:= Expand[%]
```

```
Out[8]=  $\frac{5}{3} - \frac{4}{3x}$ 
```

```
In[9]:=  $\frac{5}{3} - \frac{4}{3x}$  /. x -> 0.5237069187388793
```

```
Out[9]= -0.879287
```

```
In[10]:=  $\frac{5}{3} - \frac{4}{3x}$  /. x -> 1.5734247161536508
```

```
Out[10]= 0.819258
```

Figura 39: Outros resultados e gráficos do arquivo "elim dial.nb", escrito para Mathematica.

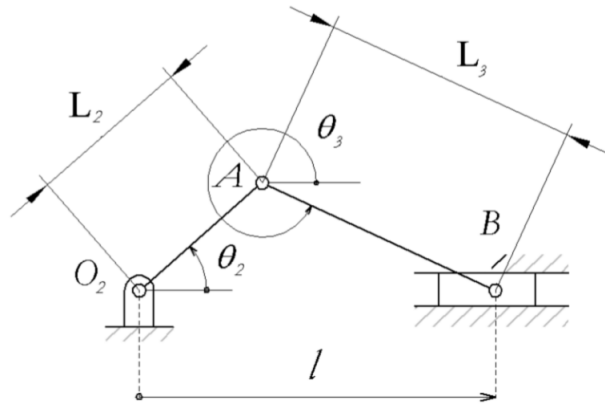


Figura 40: Biela-manivela

Os diferenciais $d\Phi_1$ e $d\Phi_2$ podem ser calculados da seguinte maneira:

$$d\Phi_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta_3} d\theta_3 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial l} dl \quad (42)$$

$$d\Phi_2 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta_3} d\theta_3 + \frac{\partial\Phi_2}{\partial l} dl \quad (43)$$

sendo que

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta_3} = -\text{sen}\theta_3$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial l} = -1$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta_3} = \cos\theta_3$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial l} = 0$$

Admitindo que, para implementação do método, os diferenciais sejam aproximados por pequenas variações, as eqs. anteriores podem ser reescritas novamente na forma matricial

$$\begin{bmatrix} -\text{sen}\theta_3^{(k)} & -1 \\ \cos\theta_3^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_3^{(k)} \\ \Delta l^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(k+1)} - \Phi_1^{(k)} \\ \Phi_2^{(k+1)} - \Phi_2^{(k)} \end{bmatrix} \quad (44)$$

sendo que o índice k refere-se ao valor da variável correspondente na k -ésima iteração. O método de Newton-Raphson define, como direção de busca, a condição em que os valores das funções $\Phi_1^{(k+1)}$ e $\Phi_2^{(k+1)}$ sejam nulos. Desta forma, os incrementos às variáveis $\theta_3^{(k)}$ e $l^{(k)}$ serão, respectivamente,

$$\Delta\theta_3^{(k)} = \frac{-\Phi_2^{(k)}}{\cos\theta_3^{(k+1)}} \quad (45)$$

$$\Delta l^{(k)} = (-\text{sen}\theta_3^{(k)})\Delta\theta_3^{(k)} + \Phi_1^{(k)} \quad (46)$$

O objetivo deste exemplo é determinar θ_3 e l , admitindo que θ_2 seja 45° . Considere conhecida a configuração inicial deste mecanismo, situação em que $\theta_2^{(0)} = 60^\circ$, $\theta_3^{(0)} = -60^\circ$ e $l^{(0)} = 1$. O critério de convergência normalmente adotado estabelece que a busca termina quando os incrementos das incógnitas forem inferiores a 10^{-7} .

$$\Phi_1^{(0)} = \cos 45 + \cos(-60) - 1 = 0,707 + 0,5 - 1 = 0,207$$

$$\Phi_2^{(0)} = \text{sen}45 + \text{sen}(-60) = 0,707 - 0,866 = -0,159$$

$$\Delta\theta_3^{(0)} = \frac{0,159}{0,5} = 0,318 \text{ rd}$$

$$\Delta l^{(0)} = (0,866)0,318 + 0,207 = 0,4824$$

$$\theta_3^{(1)} = \theta_3^{(0)} + \Delta\theta_3^{(0)} = -1,05 + 0,318 = -0,729 \text{ rd}$$

$$l^{(1)} = l^{(0)} + \Delta l^{(0)} = 1 + 0,4824 = 1,4824$$

k	$\theta_3^{(k)}$ (rd)	$l^{(k)}$	$\Phi_1^{(k)}$	$\Phi_2^{(k)}$	$\Delta\theta_3^{(k)}$ (rd)	$\Delta l^{(k)}$
0	-1,05(-60 ⁰)	1	0,207	-0,159	0,318	0,4824
1	-0,729(-41.8 ⁰)	1,482	-0,0292	0,0408	-0,0547	-0,0656
2	-0,7839(-44.9 ⁰)	1,4164	-0,0011	0,0011	-0,0016	-0,0022
3	-0,7855(-45 ⁰)	1,4142	-5,8.10 ⁻⁵	-7,2.10 ⁻⁵	1.10 ⁻⁴	1,4.10 ⁻⁵

4.8 Análise de velocidades e acelerações

As seções anteriores trataram da análise cinemática de posições. Dentre as aplicações da análise de velocidades e acelerações encontram-se a avaliação de desempenho, planejamento de trajetórias, etc. Derivando-se em relação à variável tempo a eq.72, obtêm-se a expressão da velocidade do ponto P na base A .

$$\begin{bmatrix} {}^A\dot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{[{}^A\dot{T}_B]}_{\text{arrastamento}} \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{[{}^AT_B]}_{\text{relativa}} \begin{bmatrix} {}^B\dot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Analogamente, derivando-se a eq. anterior em relação ao tempo, obtêm-se a expressão da aceleração do ponto P em relação à base A .

$$\begin{bmatrix} {}^A\ddot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{[{}^A\ddot{T}_B]}_{\text{arrastamento}} \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} + 2\underbrace{[{}^A\dot{T}_B]}_{\text{coriolis}} \begin{bmatrix} {}^B\dot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{[{}^AT_B]}_{\text{relativa}} \begin{bmatrix} {}^B\ddot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Exemplo 4.5: Robô RR . Para o robô da fig.36, anteriormente mencionado no exemplo 4.1, podemos determinar a velocidade do ponto P , derivando-se em relação ao tempo a eq. 49

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^0T_2] \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Assim, obtêm-se

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^0\dot{T}_2] \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} + [{}^0T_2] \begin{bmatrix} {}^2\dot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

sendo

$$[{}^0T_2] = [{}^0T_1][{}^1T_2] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \cos\theta_1 \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \text{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[{}^0\dot{T}_2] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -l_1 \text{sen}\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = [l_2 \quad 0]^T$$

$$\begin{bmatrix} {}^2\dot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]^T$$

Conseqüentemente, o vetor ${}^0\dot{\mathbf{r}}_P$ será

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_P = \begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_P \\ {}^0\dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - l_1 \text{sen}\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ l_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_1 \text{cos}\theta_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Podemos rearranjar a eq. anterior da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}\theta_1 - l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

De modo geral, a análise cinemática de velocidade de um mecanismo pode ser formulada a partir da equação geral

$$J_D \dot{\mathbf{q}}_D = -J_I \dot{\mathbf{q}}_I \quad (51)$$

sendo $\dot{\mathbf{q}}_I$, o vetor cujos elementos representam as derivadas em relação ao tempo das coordenadas independentes, no caso, as velocidades associadas aos atuadores; $\dot{\mathbf{q}}_D$, outro vetor cujos elementos correspondem às derivadas temporais das coordenadas dependentes, no caso, as velocidades associadas ao ponto P da garra, as matrizes J_D e J_I são denominadas jacobianos das coordenadas independentes e dependentes, respectivamente. O vetor $\dot{\mathbf{q}}_I$ possui dimensão $M \times 1$, enquanto que o vetor $\dot{\mathbf{q}}_D$ tem dimensão $(n - M) \times 1$, sendo M a mobilidade do mecanismo e n o número total de coordenadas.

Seguindo esta notação, ao se impor as velocidades das juntas ativas, o vetor $\dot{\mathbf{x}}$ pode ser calculado da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{q}}_D = -J_D^{-1} J_I \dot{\mathbf{q}}_I$$

Por outro lado, especificando-se a velocidade da garra, ou peça que realiza o movimento de saída, pode-se determinar o vetor $\dot{\mathbf{q}}_I$

$$\dot{\mathbf{q}}_I = -J_I^{-1} J_D \dot{\mathbf{q}}_D$$

Voltando ao exemplo 4.5, a aceleração do ponto P, em relação à base 0, vale

$$\begin{bmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^0\ddot{T}_2] \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{r}}_P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2[-\text{cos}(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] - l_1 \text{cos}\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \text{sen}\theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ l_2[-\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] - l_1 \text{sen}\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \text{cos}\theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.6: Mecanismo biela-manivela \underline{RRRP} . Note que a notação do ângulo para a peça 3 é diferente daquela adotada na fig.40. Como este mecanismo possui mobilidade unitária, considere a situação em que o eixo de um motor rotativo esteja acoplado à peça móvel 2 (manivela). Para esta análise, admita que o movimento imposto pelo motor seja completamente conhecido. Conseqüentemente, θ_2 , $\dot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_2$ não são incógnitas, mas seus valores são conhecidos para qualquer configuração ocupada pelo mecanismo durante o seu ciclo de movimento. Além disto, adotaremos a seguinte simplificação na notação empregada durante o desenvolvimento das equações

$$\text{cos}\theta_j = c_j \quad \text{sen}\theta_j = s_j \quad j = 2, 3$$

$$\begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^1T_2] \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 c_2 \\ L_2 s_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

sendo

$$[{}^1T_2] = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{r}_A = [L_2 \quad 0]^T$$

Por outro lado,

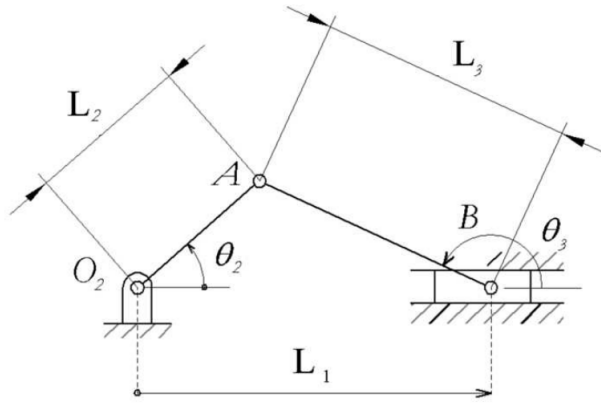


Figura 41: Biela-manivela2

$$\begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^1T_3] \begin{bmatrix} {}^3\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3c_3 + L_1 \\ L_3s_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Igualando os resultados das eq.s(52) e (53), conclui-se que

$$L_2c_2 = L_3c_3 + L_1 \quad L_2s_2 = L_3s_3$$

Derivando-se em relação ao tempo a eq.(52)

$$\begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^1\dot{T}_2] \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} + [{}^1T_2] \begin{bmatrix} {}^2\dot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^1\dot{T}_2] \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_2\dot{\theta}_2 & -c_2\dot{\theta}_2 & 0 \\ c_2\dot{\theta}_2 & -s_2\dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2s_2\dot{\theta}_2 \\ L_2c_2\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Derivando-se em relação ao tempo a eq.(53)

$$\begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^1\dot{T}_3] \begin{bmatrix} {}^3\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} + [{}^1T_3] \begin{bmatrix} {}^3\dot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^1\dot{T}_3] \begin{bmatrix} {}^3\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_3\dot{\theta}_3 & -c_3\dot{\theta}_3 & \dot{L}_1 \\ c_3\dot{\theta}_3 & -s_3\dot{\theta}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_3s_3\dot{\theta}_3 + \dot{L}_1 \\ L_3c_3\dot{\theta}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Igualando os resultados das eq.s(54) e (55), conclui-se que

$$-L_2s_2\dot{\theta}_2 = -L_3s_3\dot{\theta}_3 + \dot{L}_1 \quad L_2c_2\dot{\theta}_2 = L_3c_3\dot{\theta}_3$$

Conseqüentemente,

$$\dot{\theta}_3 = \left(\frac{L_2c_2}{L_3c_3} \right) \dot{\theta}_2$$

$$\dot{L}_1 = L_2 \left(s_2 + c_2 \frac{s_3}{c_3} \right) \dot{\theta}_2$$

De acordo com a notação da eq.(51),

$$J_D = 1 \quad J_I = -L_2 \left(s_2 + c_2 \frac{s_3}{c_3} \right)$$

Deve-se observar que no caso em J_I for nulo, o mecanismo biela-manivela ocupa uma configuração singular. Na verdade, há duas configurações singulares possíveis que correspondem ao alinhamento

entre os pontos O , A e B . Estas configurações podem se tornar críticas, eventualmente ocasionando travamentos indesejáveis.

Derivando-se em relação ao tempo as eq.(54) e (55), obtém-se

$$\begin{bmatrix} {}^1\ddot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^1\ddot{T}_2] \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2(-c_2\dot{\theta}_2^2 - s_2\ddot{\theta}_2) \\ L_2(-s_2\dot{\theta}_2^2 + c_2\ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} {}^1\ddot{\mathbf{r}}_A \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^1\ddot{T}_3] \begin{bmatrix} {}^3\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3(-c_3\dot{\theta}_3^2 - s_3\ddot{\theta}_3) + \ddot{L}_1 \\ L_3(-s_3\dot{\theta}_3^2 + c_3\ddot{\theta}_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Igualando-se as eq.(56) e (57), e rearranjando as equações resultantes obtém-se o seguinte sistema de equações que permite calcular as variáveis $\ddot{\theta}_3$ e \ddot{L}_1 .

$$\begin{bmatrix} -L_3s_3 & 1 \\ L_3c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{L}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2(-c_2\dot{\theta}_2^2 - s_2\ddot{\theta}_2) + L_3c_3\dot{\theta}_3^2 \\ L_2(-s_2\dot{\theta}_2^2 + c_2\ddot{\theta}_2) + L_3s_3\dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix}$$

4.9 Exercícios

Ex.4.1: Dado o mecanismo da fig.42 e admitindo que os comprimentos das peças 2 e 3 sejam, respectivamente, 0,2 m e 0,15 m, que a distância entre os pontos B e O_4 seja 0,15 m, que os ângulos de inclinação das peças 2 e 3, em relação à linha horizontal sejam 45° e -30° , respectivamente, determine as coordenadas horizontal e vertical dos pontos B e O_4 .

Ex. 4.2 : Dado o mecanismo da fig.43, determine, literalmente, as coordenadas x e y do ponto P em função dos ângulos de inclinação das peças 2 e 4, admitidos conhecidos. Resolva o problema inverso, ou seja, dadas as coordenadas de P , determine os ângulos de inclinação das peças 2 e 4. Para ambos os casos, indique as possíveis configurações de montagem do mecanismo. Considere conhecidos os parâmetros do mecanismo que julgar necessários.

Ex.4.3: Para o robô da fig.44, considere que os comprimentos das peças 1, 2 e 3, respectivamente, sejam $L_1 = L_2 = 1m$, $L_3 = 0,5m$, que as coordenadas absolutas do ponto P sejam $[1 \ 0,5]^T$ e que a orientação da garra seja $-\mathbf{j}_0$ (vertical, de cima para baixo). Determine as coordenadas do ponto Q (origem da base $O_3x_3y_3$), em relação à base fixa Ox_0y_0 , bem como os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 .

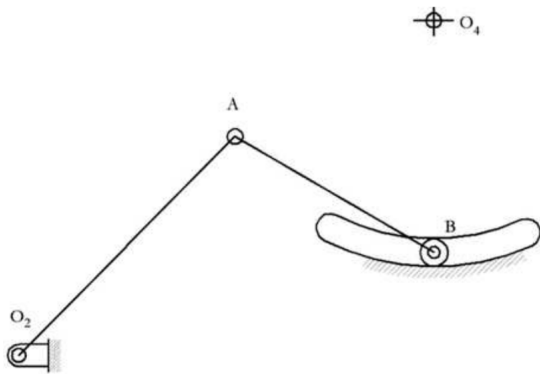


Figura 42:

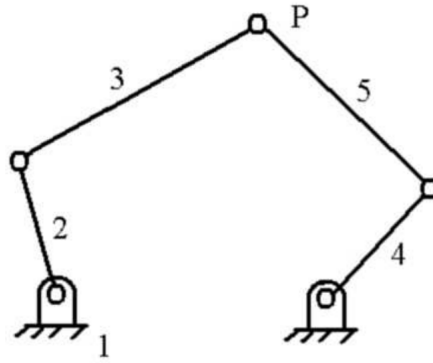


Figura 43:

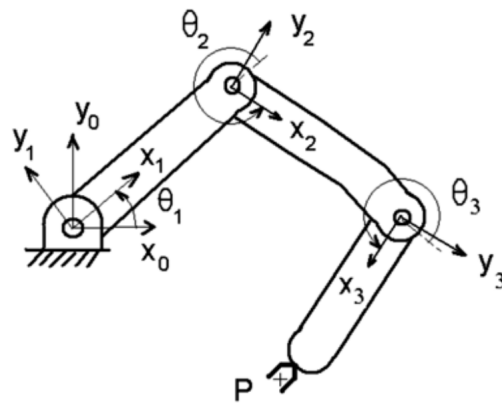


Figura 44:

- Ex.4.4:** Para o robô da fig.45:
- determine a relação entre as coordenadas $P(x,y)$ e l_1, θ_2 , literalmente (1 pt);
 - considerando que o ponto P se mova de P_1 para P_2 , à velocidade constante de 1 m/s, calcule as coordenadas de P após 0,1 s, bem como $l_1(m)$ e $\theta_2(^\circ)$ correspondentes (0,5 pt);
 - determine, literalmente, as expressões das variáveis $\dot{l}_1, \dot{\theta}_2$ em função das coordenadas de $P(x,y)$ e da sua velocidade \vec{V}_P (1 pt);
 - calcule os valores das variáveis $\dot{l}_1(m/s)$ e $\dot{\theta}_2(rd/s)$ para a configuração ocupada pelo robô definida no item *b* (0,5 pt);
 - determine, literalmente, as expressões das variáveis $\ddot{l}_1, \ddot{\theta}_2$ em função das coordenadas de $P(x,y)$ e da sua velocidade \vec{V}_P (1 pt);
 - calcule os valores das variáveis $\ddot{l}_1(m/s^2)$ e $\ddot{\theta}_2(rd/s^2)$ para a configuração ocupada pelo robô definida no item *b* (0,5 pt).

Obs: O item *b* pode ser resolvido analiticamente ou numericamente. Se sua preferência for pela solução numérica, admita que a configuração ocupada pelo robô, quando a garra passa pelo ponto P_1 , seja sua estimativa inicial. Neste caso, $l_1 = 0,54m$ e $\theta_2 = 23,6^\circ$.

Ex.4.5: A figura 46 apresenta o diagrama

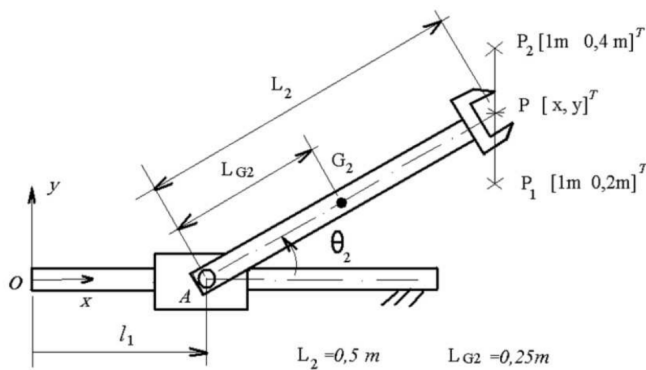


Figura 45:

cinemático de um mecanismo plano, com mobilidade igual a dois, empregado para posicionar uma ferramenta localizada no ponto P . São dados: $y = 1\text{m}$, $D = 0,5\text{m}$, $L = 0,7\text{m}$, $\theta_3 = 60^\circ$, $\theta_4 = 158^\circ$, ${}^1\dot{\mathbf{r}}_P = [0,25\text{m/s} \ 0]^T$. Admitindo que os seus atuadores sejam responsáveis pelo posicionamento das peças 2 e 5, pede-se:

a) as equações que relacionam as variáveis d_2 e d_5 , deslocamentos impostos pelos atuadores, com as coordenadas x e y do ponto P . Defina claramente a localização do seu sistema de referência.

b) se as variáveis x e y forem conhecidas, determine as incógnitas d_2 e d_5 . Desenhe as formas de montagem possíveis para o mecanismo.

c) se as variáveis d_2 e d_5 forem conhecidas, determine as incógnitas x e y . Desenhe as formas de montagem possíveis para o mecanismo nesta situação.

d) o vetor-velocidade do ponto A

e) o vetor-velocidade angular da peça 3

f) o vetor-aceleração de P , admitindo que a ${}^1\ddot{\mathbf{r}}_A = [0 \ 0,137\text{m/s}^2]^T$ e $\ddot{\theta}_3 = -0,098\text{rd/s}^2\mathbf{k}$

Observação: Resolva os itens a , b e c literalmente e os itens d , e e f numericamente.

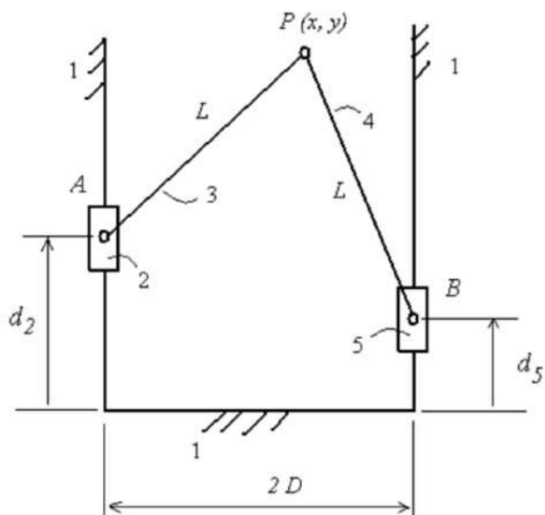


Figura 46:

5 Análise Dinâmica: formulação de Gibbs-Appell

5.1 Introdução

Nesta seção, vamos tratar de uma formulação alternativa, elaborada por Gibbs-Appell. Evidentemente que a primeira pergunta que surge é: por que outro método? Aprender outra maneira, sempre nos causa uma certa apreensão, porque nos deparamos com algo novo, distinto daquilo que já conhecemos e estamos acostumados. Significa, basicamente, sair da nossa *zona de conforto*. Além disso, se apresentamos outro método, certamente deve haver alguma desvantagem em utilizar o método que já vimos anteriormente, aquele emprega o formalismo de Newton-Euler. E se existem desvantagens, quais seriam? Bem, podemos enumerar algumas delas que são decorrentes do próprio processo de geração das equações dinâmicas. Primeira, há a necessidade de se desmontar o mecanismo, ou seja, realizar a separação os corpos (elos) que encontram-se unidos pelas juntas. Segunda, devem ser construídos diagramas de corpo livre para cada elo, o que acarreta a inclusão na análise das forças/momentos reativos. Terceira, o número de equações obtidas é muito maior que a mobilidade do mecanismo. Geralmente, este número é o número de corpos N multiplicado pela ordem λ correspondente ao espaço de movimentação do mecanismo.

Assim, a boa notícia é que o método de Gibbs-Appell não possui estas desvantagens. Não existe a necessidade de se desmontar o mecanismo. No equacionamento, os esforços reativos não são incluídos e o número de equações geradas coincide com a mobilidade M do mecanismo que é inferior a $N.\lambda$.

Este método, na forma como será apresentado aqui, é o resultado das contribuições de pesquisadores responsáveis pelo seu desenvolvimento, Gibbs, Appell, Maggi, Jourdain e Kane. Gibbs nos E.U.A. e Appell na Alemanha, desenvolveram de forma independente os fundamentos teóricos de um método para obtenção das equações dinâmicas a partir da energia das acelerações. Na Itália, Maggi propôs uma matriz especial que proporciona a eliminação dos multiplicadores de Lagrange, nas equações dinâmicas empregadas para sistemas holônomos. O inglês Jourdain, por sua vez, apresentou o princípio das potências virtuais. Finalmente, a contribuição de Kane que, se por um lado, foi menor em termos teóricos do que seus antecessores, por outro foi grandiosa no tocante à estruturação do processo de geração das equações dinâmicas, visando a sua implementação computacional.

5.2 Formulação

As equações dinâmicas, de acordo com a formulação de Gibbs-Appell, podem ser expressas matematicamente segundo a notação matricial da seguinte forma

$$C^T D \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (58)$$

Nesta equação, $C_{m \times n}^T$ e $D_{n \times \lambda N}$ são matrizes, enquanto que $\mathbf{f}_{\lambda N \times 1}$ e $\mathbf{0}_{m \times 1}$ são vetores. As dimensões das matrizes e vetores estão associadas à mobilidade m (ou número de graus de liberdade), ao número de coordenadas generalizadas n , ao espaço λ de movimentação do mecanismo e a N , número total de elos móveis (corpos). Em geral, a relação entre m e n , é $m \leq n$. Quando m for igual a n , $C^T = \mathbf{1}_{m \times m}$. Quando m for inferior a n , há duas possibilidades:

- o analista prefere utilizar coordenadas redundantes ou,
- o mecanismo possui uma ou mais cadeias cinemáticas fechadas.

Em ambos os casos, há um conjunto de coordenadas independentes e um outro conjunto dependente do primeiro. Assim, o próximo passo é apresentar ao leitor como obter a matriz C .

5.2.1 A matriz C

Sejam q_1, q_2, \dots, q_n as coordenadas generalizadas. Então, a partir da inspeção do sistema multi-corpos e pelo desenvolvimento da análise cinemática, é possível determinar um vetor ϕ de funções nulas $p \times 1$ cujas variáveis sejam q_1, q_2, \dots, q_n . Este vetor \mathbf{q} pode ser dividido em dois vetores, um

que contém as coordenadas independentes, $\mathbf{q}_I = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$, enquanto o outro, as dependentes $\mathbf{q}_D = [q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n]^T$. Além disso, sejam $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, as derivadas em relação ao tempo de q_1, q_2, \dots, q_n . Estas derivadas são chamadas de velocidades generalizadas. Assim, a derivada do vetor Φ em relação ao tempo será

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{q}_I} \frac{d\mathbf{q}_I}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{q}_D} \frac{d\mathbf{q}_D}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{q}_D} \frac{d\mathbf{q}_D}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{q}_I} \frac{d\mathbf{q}_I}{dt}$$

$$J_D \dot{\mathbf{q}}_D = -J_I \dot{\mathbf{q}}_I$$

$$\dot{\mathbf{q}}_D = -J_D^{-1} J_I \dot{\mathbf{q}}_I = J \dot{\mathbf{q}}_I$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_I \\ \dot{\mathbf{q}}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times m} \\ J_{n-m \times m} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_I$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \\ \dot{q}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times m} \\ J_{n-m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad (59)$$

Assim, a matriz C pode ser definida como

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times m} \\ J_{n-m \times m} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Thomas Kane, diferentemente de seus predecessores que utilizaram o vetor $\dot{\mathbf{q}}$ para as velocidades generalizadas, preferiu definir o vetor \mathbf{u} como sendo

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times m} \\ A_{n-m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (62)$$

Frequentemente, Y é escolhida como a matriz identidade. Kane observou que as equações dinâmicas podem tornar-se menos extensas pela determinação de uma matriz especial Y . A matriz A é retangular de dimensões $n-m \times m$ e corresponde a um tipo de jacobiano que permite obter as velocidades dependentes u_{m+1}, \dots, u_n em relação a u_1, u_2, \dots, u_m . Finalmente, a matriz C pode ser definida como

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times m} \\ A_{n-m \times m} \end{bmatrix} \quad (63)$$

5.3 O produto da matriz D pelo vetor \mathbf{f}

Para obtenção das equações dinâmicas, representadas nesta seção pela Eq.58, além da transposta da matriz C , apresentada anteriormente, é necessário determinar a matriz D e o vetor \mathbf{f} . Sobre o significado deste produto, pode-se dizer que associa-se às forças generalizadas no sentido em que Lagrange as definiu, quando se trata de forças ou momentos ativos de natureza conservativa (elástica ou de campo gravitacional) ou não-conservativa (torques de atuadores, atrito). Os elementos da matriz D , de dimensões $n \times \lambda N$, correspondem a derivadas parciais das velocidades lineares \mathbf{v}_{G_k} e angulares ω_k , $k = 1, \dots, N$, em relação às velocidades generalizadas u_i , $i = 1, \dots, n$. Sua expressão é apresentada a seguir

$$D_{n \times \lambda N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_{G_1}^T}{\partial u_1} & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_2}^T}{\partial u_1} & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_N}^T}{\partial u_1} & \frac{\partial \omega_N^T}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{G_1}^T}{\partial u_2} & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_2} & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_2}^T}{\partial u_2} & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_N}^T}{\partial u_2} & \frac{\partial \omega_N^T}{\partial u_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{G_1}^T}{\partial u_n} & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_n} & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_2}^T}{\partial u_n} & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_N}^T}{\partial u_n} & \frac{\partial \omega_N^T}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (64)$$

O vetor \mathbf{f} , por sua vez, possui dimensões $\lambda N \times 1$. Suas componentes estão associadas às forças/momentos ativos que atuam nos corpos de 1 a N , além das forças de inércia e dos momentos das forças de inércia destes corpos.

$$\mathbf{f}_{\lambda N \times 1} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_{at,1} - m_1 \mathbf{a}_{G_1} \\ \sum \mathbf{M}_{at,1} - (I_k \dot{\omega}_1 + \omega_1 \times (I_1 \omega_1)) \\ \sum \mathbf{F}_{at,2} - m_2 \mathbf{a}_{G_2} \\ \sum \mathbf{M}_{at,2} - (I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times (I_2 \omega_2)) \\ \vdots \\ \sum \mathbf{F}_{at,N} - m_N \mathbf{a}_{G_N} \\ \sum \mathbf{M}_{at,N} - (I_N \dot{\omega}_N + \omega_N \times (I_N \omega_N)) \end{bmatrix} \quad (65)$$

De modo a esclarecer as expressões anteriores, considere que vetor \mathbf{e} seja o produto da matriz D pelo vetor \mathbf{f} . Assim, o elemento e_i deste vetor será

$$e_i = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{G_k}}{\partial u_i} \cdot \left(\sum \mathbf{F}_{at,k} - m_k \mathbf{a}_{G_k} \right) + \frac{\partial \omega_k}{\partial u_i} \cdot \left(\sum \mathbf{M}_{at,k} - (I_k \dot{\omega}_k + \omega_k \times (I_k \omega_k)) \right) \right] \quad (66)$$

$i = 1, \dots, n$

Considere o pêndulo da Fig.47. Construtivamente, este corresponde a uma barra conectada a uma base fixa por uma junta de rotação. O pêndulo é capaz de realizar movimentos no plano vertical. Para efeitos de simplificação na modelagem dinâmica, admita que este esteja sujeito à força de campo gravitacional $-mg\mathbf{j}_0$ e também à ação de um motor rotativo, cujo eixo encontra-se acoplado à barra, aplicando um torque $\tau\mathbf{k}_0$. De acordo com o que foi apresentado anteriormente, haverá apenas uma única coordenada generalizada $q = \theta$ e, portanto, $n = m = 1$. O pêndulo é constituído por apenas um único corpo e, assim, $N = 1$. Consequentemente, a matriz C se torna o escalar 1 e, a partir das Eq.(58,64), conclui-se que $D\mathbf{f} = \mathbf{e} = 0$. Da análise cinemática, sabe-se que o vetor velocidade angular será $\omega\mathbf{k}_0$, enquanto que o vetor-velocidade \mathbf{v}_G do ponto G será

$$\mathbf{v}_G = L\dot{\theta}(-\text{sen}\theta\mathbf{i}_0 + \text{cos}\theta\mathbf{j}_0)$$

e se $u = \dot{q}$, as pseudo-velocidades $\frac{\partial \mathbf{v}_G}{\partial u}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial u}$ serão, respectivamente,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_G}{\partial u} = L(-\text{sen}\theta\mathbf{i}_0 + \text{cos}\theta\mathbf{j}_0) \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} = \mathbf{k}_0$$

Substituindo na Eq.(66),

$$e = \frac{\partial \mathbf{v}_G}{\partial u} \cdot (-mg\mathbf{j}_0) + \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot (\tau\mathbf{k}_0) = L(-\text{sen}\theta\mathbf{i}_0 + \text{cos}\theta\mathbf{j}_0) \cdot (-mg\mathbf{j}_0) + \mathbf{k}_0 \cdot (\tau\mathbf{k}_0) = 0$$

Finalmente, obtém-se a expressão matemática que permite calcular o torque τ em função do momento associado à força gravitacional

$$\tau = mgL \cos \theta$$

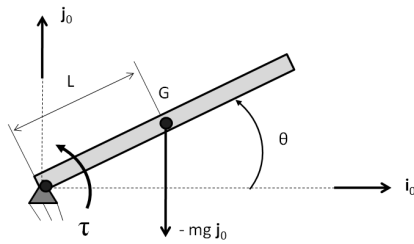


Figura 47: Pêndulo

5.4 Fases da Formulação de Gibbs-Appell

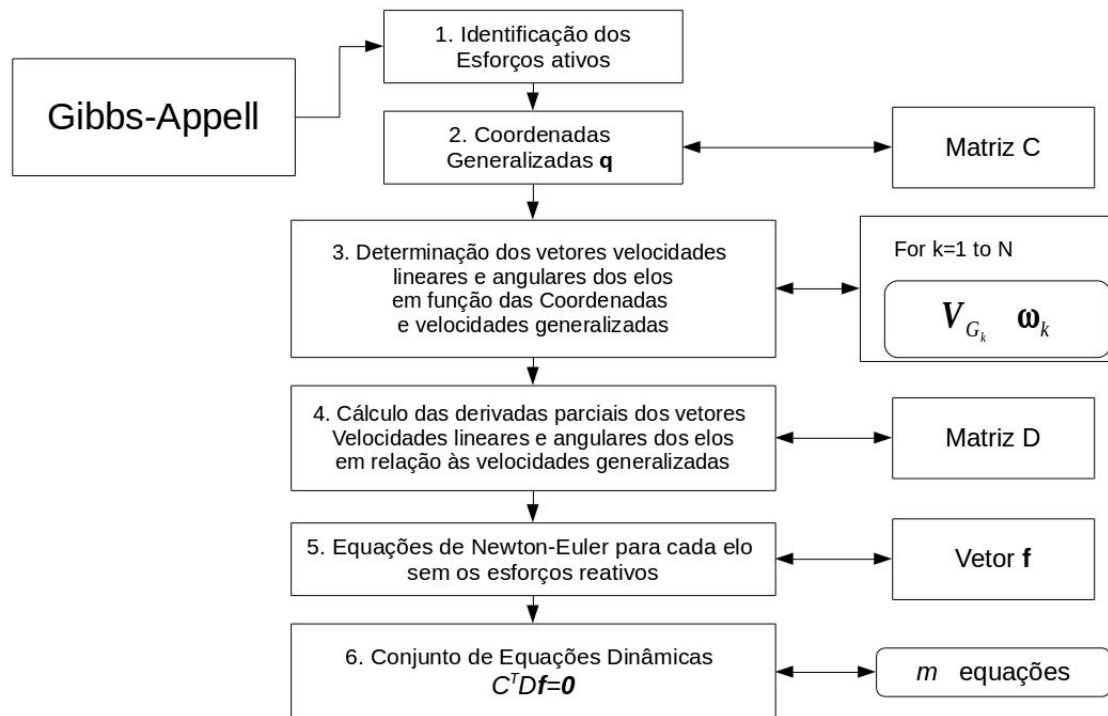


Figura 48: Fases da formulação de Gibbs-Appell

5.5 Robô de cadeia cinemática aberta e plano RP

Inicialmente, é necessário um esclarecimento acerca desta topologia de robô. A Fig.49 apresenta um robô de cadeia cinemática aberta, que opera no plano vertical, e é formado por 3 elos, 2 móveis e um imóvel. O elo imóvel, identificado pelo número 0 será denominado de base fixa. Os demais elos serão identificados pelos números 1 e 2, e correspondem, respectivamente, à barra oscilante e à garra. O elo 0 encontra-se conectado ao elo 1 por meio de uma junta de rotação, representada pela letra R, e este, por sua vez, conecta-se ao elo 2 por uma junta prismática, representada pela letra P. As letras R e P encontram-se sublinhadas para indicar que estas juntas são ativas, ou seja, há atuadores (motores) rotativos e lineares entre os seus elos. Em decorrência disto, o espaço de movimentação do robô corresponde ao plano vertical, $\lambda = 3$, sendo que há 2 elos (corpos) móveis e, portanto, $N = 2$.

Ainda de acordo com a Fig.49, nota-se o emprego das coordenadas q_1 e q_2 para descrever os

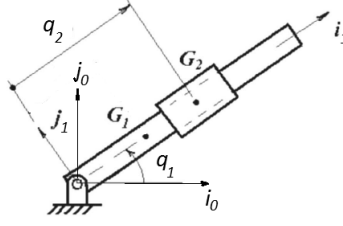


Figura 49: Robô RP

deslocamentos relativos entre elos e, desta forma, $n = 2$. Com relação à modelagem, os efeitos dinâmicos a serem considerados decorrem da presença dos atuadores 1 e 2, das forças de inércia associadas ao movimento do elo 2 e da força de campo gravitacional também atuante sobre o elo 2. Como $m = n = 2$, a matriz C será

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empregando-se a notação vetorial, os vetores posição do centro de massa do elo 2, \mathbf{r}_{G_2} , velocidade deste mesmo ponto, \mathbf{v}_{G_2} e aceleração correspondente, \mathbf{a}_{G_2} , serão

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{G_2} &= q_2 \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{v}_{G_2} &= \dot{q}_2 \mathbf{i}_1 + q_2 \dot{q}_1 \mathbf{j}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{G_2} &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{G_2} = \frac{d}{dt} (\dot{q}_2 \mathbf{i}_1 + q_2 \dot{q}_1 \mathbf{j}_1) = \ddot{q}_2 \mathbf{i}_1 + \dot{q}_2 \dot{q}_1 \mathbf{j}_1 + q_2 \ddot{q}_1 \mathbf{j}_1 + \dot{q}_2 \dot{q}_1 \mathbf{j}_1 = \\ &= \ddot{q}_2 \mathbf{i}_1 + \dot{q}_2 (\omega_1 \times \mathbf{i}_1) + \dot{q}_2 \dot{q}_1 \mathbf{j}_1 + q_2 \ddot{q}_1 \mathbf{j}_1 + q_2 \dot{q}_1 (\omega_1 \times \mathbf{j}_1) = \ddot{q}_2 \mathbf{i}_1 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \mathbf{j}_1 + q_2 \ddot{q}_1 \mathbf{j}_1 - q_2 \dot{q}_1^2 \mathbf{i}_1 \\ &= (\ddot{u}_2 - q_2 u_1^2) \mathbf{i}_1 + (2u_1 u_2 + q_2 \dot{u}_1) \mathbf{j}_1 \end{aligned}$$

Nota-se que as componentes destes vetores foram definidas na base vetorial fixa ao elo 1, $O\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1\mathbf{k}_1$. A seguir, apresenta-se a dedução das expressões dos mesmos vetores, segundo a notação matricial.

$${}^1\mathbf{r}_{G_2} = q_2 \mathbf{i}_1 = q_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{r}_{G_2} = [{}^0R_1] {}^1\mathbf{r}_{G_2}$$

sendo

$$[{}^0R_1] = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{v}_{G_2} = \dot{q}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q_2 \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{a}_{G_2} = \frac{d}{dt} [{}^0R_1] {}^1\mathbf{v}_{G_2} = [{}^0\dot{R}_1] {}^1\mathbf{v}_{G_2} + [{}^0R_1] {}^1\dot{\mathbf{v}}_{G_2}$$

$$[{}^0\dot{R}_1] = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 \\ c_1 & -s_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1$$

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_{G_2} = \ddot{q}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\dot{q}_2 \dot{q}_1 + q_2 \ddot{q}_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{a}_{G_2} = \begin{bmatrix} \dot{u}_2 - q_2 u_1^2 \\ 2u_1 u_2 + q_2 \dot{u}_1 \end{bmatrix}$$

Na sequência, será apresentada a determinação dos elementos da matriz D .

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_{G_1} = l_1 u_1 \mathbf{j}_1 & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_1}}{\partial u_1} = l_1 \mathbf{j}_1 & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_1}}{\partial u_2} = 0 \\ \omega_1 = u_1 \mathbf{k}_1 & \frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} = \mathbf{k}_1 & \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} = 0 \\ \mathbf{v}_{G_2} = q_2 u_1 \mathbf{j}_1 + u_2 \mathbf{i}_1 & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_2}}{\partial u_1} = q_2 \mathbf{j}_1 & \frac{\partial \mathbf{v}_{G_2}}{\partial u_2} = \mathbf{i}_1 \\ \omega_2 = u_1 \mathbf{k}_1 & \frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} = \mathbf{k}_1 & \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{G_1}^T}{\partial u_1} &= [0 \quad l_1] & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_1} &= 1 & \frac{\partial v_{G_2}^T}{\partial u_2} &= [0 \quad q_2] & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_1} &= 1 \\ \frac{\partial v_{G_1}^T}{\partial u_2} &= [0 \quad 0] & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_2} &= 0 & \frac{\partial v_{G_2}^T}{\partial u_2} &= [1 \quad 0] & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_2} &= 0 \end{aligned}$$

$$D = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & l_1 & 1 & 0 & q_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A seguir, apresenta-se o vetor \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 - m_2 g \sin q_1 - m_2 (u_2 - q_2 u_1^2) \\ -m_2 g \cos q_1 - m_2 (2u_1 u_2 + q_2 \dot{u}_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, substituindo as matrizes C e D , juntamente com o vetor \mathbf{f} na eq.(58), obtém-se as equações para as análises dinâmicas inversa e direta.

Dinâmica Inversa:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= q_2 m_2 (g \cos(q_1) + 2u_1 u_2 + q_2 \dot{u}_1) \\ \tau_2 &= m_2 (g \sin(q_1) + \dot{u}_2 - q_2 u_1^2) \end{aligned}$$

Dinâmica Direta:

$$\begin{aligned} \text{eq. dif. cinemáticas} &\begin{cases} \dot{q}_1 = u_1 \\ \dot{q}_2 = u_2 \end{cases} \\ \text{eq. dif. dinâmicas} &\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{1}{q_2} \left(\frac{\tau_1}{q_2 m_2} - g \cos q_1 - 2u_1 u_2 \right) \\ \dot{u}_2 = \frac{\tau_2}{m_2} - g \sin(q_1) + q_2 u_1^2 \end{cases} \end{aligned}$$

5.6 Mecanismo de cadeia aberta e plano PR

A Fig.50 apresenta um robô de cadeia cinemática aberta, que opera no plano vertical, e é formado por 3 elos, 2 móveis e um imóvel. O elo imóvel, identificado pelo número 0 será denominado de base fixa. Os demais elos serão identificados pelos números 1 e 2, e correspondem, respectivamente, ao bloco deslizante e à garra. O elo 0 encontra-se conectado ao elo 1 por meio de uma junta prismática, representada pela letra P, e este, por sua vez, conecta-se ao elo 2 por uma junta de rotação, representada pela letra R. Em decorrência disto, o espaço de movimentação do robô corresponde ao plano vertical, $\lambda = 3$, sendo que há 2 elos (corpos) móveis e, portanto, $N = 2$.

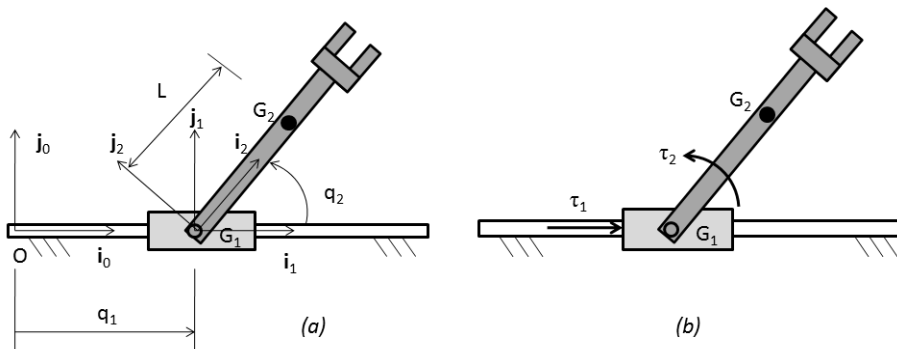


Figura 50: Robô PR

Ainda de acordo com a Fig.50, nota-se o emprego das coordenadas q_1 e q_2 para descrever os deslocamentos relativos entre elos e, desta forma, $n = 2$. Com relação à modelagem, os efeitos

dinâmicos a serem considerados decorrem da presença dos atuadores 1 e 2, além das forças de inércia associadas aos movimentos dos elos 1 e 2. Como $m = n = 2$, a matriz C será $\mathbf{1}_{2 \times 2}$. Segundo a notação vetorial, os vetores \mathbf{r}_{G_1} , \mathbf{r}_{G_2} , \mathbf{v}_{G_1} e \mathbf{v}_{G_2} serão

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{G_1} &= q_1 \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{r}_{G_2} &= q_1 \mathbf{i}_0 + L \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{v}_{G_1} &= \dot{q}_1 \mathbf{i}_0 = u_1 \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{v}_{G_2} &= \dot{q}_1 \mathbf{i}_0 + L \dot{\mathbf{i}}_2 = u_1 \mathbf{i}_0 + L \dot{q}_2 \mathbf{j}_2 = u_1 \mathbf{i}_0 + L u_2 \mathbf{j}_2\end{aligned}$$

Por outro lado, empregando a notação matricial, os vetores \mathbf{r}_{G_2} e \mathbf{v}_{G_2} poderiam ser determinados da seguinte forma

$${}^0 \mathbf{r}_{G_2} = q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + L [{}^0 R_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo

$$\begin{aligned}[{}^0 R_2] &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_{G_2} &= \frac{d^0 \mathbf{r}_{G_2}}{dt} = \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + L [{}^0 \dot{R}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} -m_1 \dot{u}_1 + \tau_1 \\ 0 \\ 0 \\ -m_2 (\dot{u}_1 \cos q_2 - L u_2^2) \\ -m_2 (-\dot{u}_1 \sin q_2 + L \dot{u}_2) \\ -I_2 \dot{u}_2 + \tau_2 \end{bmatrix} \\ D &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 1 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Dinâmica Inversa:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (m_1 + m_2) \dot{u}_1 + m_2 L (-\cos q_2 u_2^2 - \sin q_2 \dot{u}_2) \\ \tau_2 &= m_2 L (-\dot{u}_1 \sin q_2) + (m_2 L^2 + I_2) \dot{u}_2\end{aligned}$$

5.7 Mecanismo plano PRRRR

Topologicamente, o robô da Fig.51 possui cadeia cinemática fechada, opera apenas no plano vertical ($\lambda = 3$), e é formado por 5 elos, 4 móveis e um imóvel. Assim, o elo imóvel 0 encontra-se vinculado ao elo 1 mediante o emprego de uma junta prismática, representada pela letra P, sendo que este elo se conecta ao elo 3 por uma junta de rotação, representada pela letra R. Na sequência, o elo 3 encontra-se vinculado ao elo 4, e este ao elo 2 que, por sua vez, se conecta ao elo 0. Nestes casos, empregam-se juntas de rotação. Da análise da mobilidade deste robô, constata-se que $m = 2$. Com relação à modelagem, apresentada na fig.50b, os efeitos dinâmicos a serem considerados decorrem da presença dos atuadores acoplados aos elos 1 e 2, das forças de inércia e de campo gravitacional sobre os elos 1, ..., 4, além da força de interação com o meio \mathbf{F} atuante no ponto P . Deve-se destacar também que a massa do elo 3 foi dividida igualmente entre o elo 1 e o ponto P . Analogamente, a massa do elo 4 foi igualmente compartilhada entre o ponto P e o elo 2. Desta forma, o elo 1 e o ponto P possuem massa concentrada, enquanto que apenas o elo 2 contém inércia distribuída. Com relação ao número de corpos móveis, serão considerados apenas os elos 1 e 2, além do ponto P e, portanto, $N = 3$.

Ainda de acordo com a Fig.51, nota-se o emprego das coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_6 para descrever os deslocamentos relativos entre elos. No entanto, em virtude das simplificações da modelagem, utilizar-se-ão apenas as coordenadas q_1, q_2, q_5 e q_6 e, portanto, $n = 4$. A seguir, o modelo matemático deste robô será desenvolvido e, para tanto, será necessário determinar os elementos da equação abaixo, ou seja, as matrizes C e D e o vetor \mathbf{f} .

$$C^T {}_{2 \times 4} D {}_{4 \times 9} \mathbf{f}_{9 \times 1} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

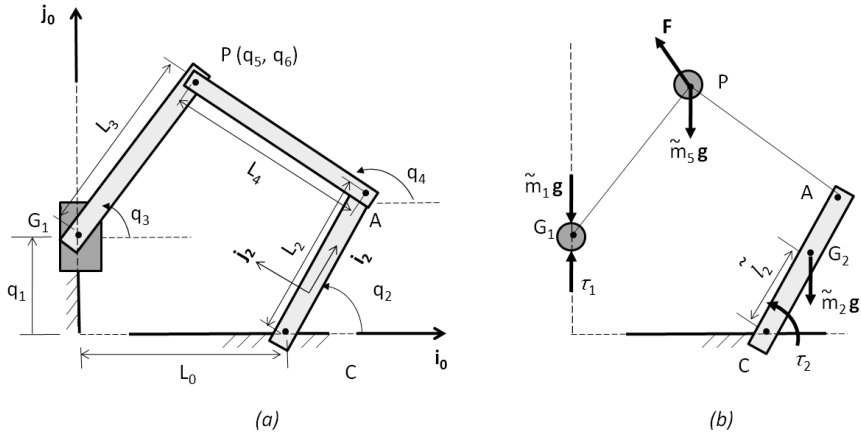


Figura 51: Robô PRRRR: (a) bases vetoriais, coordenadas generalizadas e parâmetros; (b) modelagem dinâmica

Matriz C. Para a determinação da matriz C , definida pela Eq.(62), é necessário obter a relação entre as velocidades generalizadas \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \dot{q}_5 e \dot{q}_6 . Para tanto, toma-se como ponto de partida que a distância entre os pontos P e G_1 é constante e igual a L_3 . Os vetores-posição dos pontos P e G_1 , segundo a notação matricial, definidos na base vetorial $\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$ serão

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{r}_{G_5} = {}^0\mathbf{r}_P &= \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} & {}^0\mathbf{r}_{G_1} &= q_1\mathbf{j}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{G_1})^T(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{G_1}) &= L_3^2 \\ \begin{bmatrix} q_5 & q_6 - q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 - q_1 \end{bmatrix} &= L_3^2 \end{aligned}$$

Analogamente, a distância entre os pontos P e A é constante e igual a L_4 . O vetor-posição do ponto A será

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{r}_A &= \begin{bmatrix} L_0 + L_2c_2 \\ L_2s_2 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)^T(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) &= L_4^2 \\ \begin{bmatrix} q_5 - L_2c_2 - L_0 & q_6 - L_2s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 - L_2c_2 - L_0 \\ q_6 - L_2s_2 \end{bmatrix} &= L_4^2 \end{aligned}$$

Derivando-se em relação ao tempo as equações da análise cinemática de posição,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q_5^2 + (q_6 - q_1)^2 - L_3^2) &= 0 \\ \frac{d}{dt}((q_5 - L_2c_2 - L_0)^2 + (q_6 - L_2s_2)^2 - L_4^2) &= 0 \end{aligned}$$

obtém-se a seguinte equação matricial,

$$\begin{bmatrix} q_5 & q_6 - q_1 \\ q_5 - L_2c_2 - L_0 & q_6 - L_2s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_6 - q_1 & 0 \\ 0 & -(q_5 - L_2c_2 - L_0)L_2s_2 + (q_6 - L_2s_2)L_2c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo a equação anterior de outra forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

sendo $J = -J_D^{-1}J_I$,

$$J_D = \begin{bmatrix} q_5 & q_6 - q_1 \\ q_5 - L_2c_2 - L_0 & q_6 - L_2s_2 \end{bmatrix}$$

e

$$J_I = - \begin{bmatrix} q_6 - q_1 & 0 \\ 0 & -(q_5 - L_2 c_2 - L_0) L_2 s_2 + (q_6 - L_2 s_2) L_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Realizando a seguinte mudança de variáveis,

$$u_i = \dot{q}_i \quad i=1,2,5,6$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Por fim, a matriz C será

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & J \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

Matriz D. Para a determinação da matriz D , definida pela Eq.(64), é necessário, primeiramente, obter os vetores-velocidade dos baricentros G_1 , G_2 e G_5 , além dos vetores-velocidade ω_1 , ω_2 e ω_5 . O vetor-velocidade do baricentro G_1 , em relação à base vetorial 0, será

$${}^0\mathbf{v}_{G_1} = \dot{q}_1 \mathbf{j}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o vetor-velocidade do baricentro G_2 pode ser obtido a partir da derivação, em relação ao tempo, do vetor-posição \mathbf{r}_{G_2}

$${}^0\mathbf{r}_{G_2} = \begin{bmatrix} L_0 + \tilde{l}_2 c_2 \\ \tilde{l}_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{v}_{G_2} = \tilde{l}_2 \dot{q}_2 \begin{bmatrix} -s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \tilde{l}_2 u_2 \begin{bmatrix} -s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Este mesmo vetor pode ser reescrito com suas componentes na base vetorial 2

$${}^2\mathbf{v}_{G_2} = [{}^2R_0]{}^0\mathbf{v}_{G_2} = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{G_2} = \tilde{l}_2 \dot{q}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{l}_2 u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O vetor-velocidade do baricentro G_5 será

$${}^0\mathbf{v}_{G_5} = {}^0\mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

Os vetores associados às velocidades angulares ω_1 , ω_2 e ω_5 serão

$$\omega_2 = \dot{q}_2 \mathbf{k}_0 = u_2 \mathbf{k}_0$$

$$\omega_5 = \omega_1 = \mathbf{0}$$

Assim, aplicando-se a Eq.(63), a matriz D será

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_1}^T}{\partial u_1} & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_1} & \frac{\partial {}^2\mathbf{v}_{G_2}^T}{\partial u_1} & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_1} & \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_5}^T}{\partial u_1} & \frac{\partial \omega_5^T}{\partial u_1} \\ \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_1}^T}{\partial u_2} & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_2} & \frac{\partial {}^2\mathbf{v}_{G_2}^T}{\partial u_2} & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_2} & \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_5}^T}{\partial u_2} & \frac{\partial \omega_5^T}{\partial u_2} \\ \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_1}^T}{\partial u_5} & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_5} & \frac{\partial {}^2\mathbf{v}_{G_2}^T}{\partial u_5} & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_5} & \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_5}^T}{\partial u_5} & \frac{\partial \omega_5^T}{\partial u_5} \\ \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_1}^T}{\partial u_6} & \frac{\partial \omega_1^T}{\partial u_6} & \frac{\partial {}^2\mathbf{v}_{G_2}^T}{\partial u_6} & \frac{\partial \omega_2^T}{\partial u_6} & \frac{\partial {}^0\mathbf{v}_{G_5}^T}{\partial u_6} & \frac{\partial \omega_5^T}{\partial u_6} \end{bmatrix}_{4 \times 9}$$

$$D = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{l}_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]_{4 \times 9}$$

Vetor f. Para a determinação do vetor \mathbf{f} , definido pela Eq.(65), é necessário, primeiramente, obter os vetores-aceleração dos baricentros G_1 , G_2 e G_5 , além dos vetores-aceleração $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}_5$.

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{a}_{G_1} &= \dot{q}_1 \mathbf{j}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u}_1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{a}_{G_5} &= {}^0\mathbf{a}_P = \begin{bmatrix} \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{a}_{G_2} &= \tilde{l}_2 \left(\begin{bmatrix} -s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \ddot{q}_2 - \begin{bmatrix} c_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \right) = \tilde{l}_2 \left(\begin{bmatrix} -s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \dot{u}_2 - \begin{bmatrix} c_2 \\ s_2 \end{bmatrix} u_2^2 \right) \end{aligned}$$

O vetor-aceleração do baricentro G_2 pode ser reescrito em relação à base vetorial 2

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{a}_{G_2} &= \tilde{l}_2 \begin{bmatrix} -u_2^2 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 &= \ddot{q}_2 \mathbf{k}_0 = \dot{u}_2 \mathbf{k}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_5 &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Por fim, o vetor \mathbf{f} será

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{9 \times 1} &= \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_{at,1} - m_1 \mathbf{a}_{G_1} \\ \sum \mathbf{M}_{at,1} - (I_k \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (I_1 \boldsymbol{\omega}_1)) \\ \sum \mathbf{F}_{at,2} - m_2 \mathbf{a}_{G_2} \\ \sum \mathbf{M}_{at,2} - (I_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (I_2 \boldsymbol{\omega}_2)) \\ \sum \mathbf{F}_{at,5} - m_5 \mathbf{a}_{G_5} \\ \sum \mathbf{M}_{at,5} - (I_5 \dot{\boldsymbol{\omega}}_5 + \boldsymbol{\omega}_5 \times (I_5 \boldsymbol{\omega}_5)) \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{9 \times 1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_1 - \tilde{m}_1 g - \tilde{m}_1 \dot{u}_1 \\ 0 \\ -\tilde{m}_2 (g s_2 + \tilde{l}_2 u_2^2) \\ -\tilde{m}_2 (g c_2 + \dot{u}_2 \tilde{l}_2) \\ \tau_2 - I_2 \dot{u}_2 \\ F_x - \tilde{m}_5 \dot{u}_5 \\ F_y - \tilde{m}_5 g - \tilde{m}_5 \dot{u}_6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 &= m_1 + \frac{m_3}{2} \\ \tilde{m}_2 &= m_2 + \frac{m_4}{2} \\ \tilde{m}_5 &= \frac{m_3 + m_4}{2} \\ \tilde{l}_2 &= \frac{m_2 l_2 + \frac{m_4 L_2}{2}}{\tilde{m}_2} \end{aligned}$$

Equações dinâmicas

$$D\mathbf{f}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \tau_1 - \tilde{m}_1 g - \tilde{m}_1 \dot{u}_1 \\ -\tilde{m}_2 \tilde{l}_2 (g c_2 + \dot{u}_2 \tilde{l}_2) + \tau_2 - I_2 \dot{u}_2 \\ F_x - \tilde{m}_5 \dot{u}_5 \\ F_y - \tilde{m}_5 g - \tilde{m}_5 \dot{u}_6 \end{bmatrix}$$

$$C^T_{2 \times 4} D_{4 \times 9} \mathbf{f}_{9 \times 1} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 - \tilde{m}_1 g - \tilde{m}_1 \dot{u}_1 + J_{11}(F_x - \tilde{m}_5 \dot{u}_5) + J_{21}(F_y - \tilde{m}_5 g - \tilde{m}_5 \dot{u}_6) \\ -\tilde{m}_2 \tilde{l}_2 (g c_2 + \dot{u}_2 \tilde{l}_2) + \tau_2 - I_2 \dot{u}_2 + J_{12}(F_x - \tilde{m}_5 \dot{u}_5) + J_{22}(F_y - \tilde{m}_5 g - \tilde{m}_5 \dot{u}_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = \tilde{m}_1 g + \tilde{m}_1 \dot{u}_1 - J_{11}(F_x - \tilde{m}_5 \dot{u}_5) - J_{21}(F_y - \tilde{m}_5 g - \tilde{m}_5 \dot{u}_6)$$

$$\tau_2 = I_2 \dot{u}_2 + \tilde{m}_2 \tilde{l}_2 (g c_2 + \dot{u}_2 \tilde{l}_2) - J_{12}(F_x - \tilde{m}_5 \dot{u}_5) - J_{22}(F_y - \tilde{m}_5 g - \tilde{m}_5 \dot{u}_6)$$

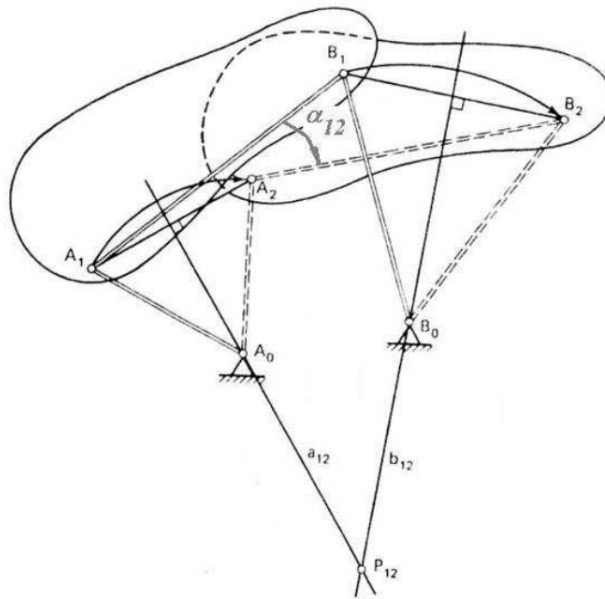


Figura 52: Duas posições exatas: obtenção do quadrilátero articulado e pólo P_{12}

6 Síntese dimensional de mecanismos planos, $M = 1$

Como foi dito na seção 3, o problema que a síntese dimensional se propõe a resolver é a determinação dos parâmetros associados um determinado tipo de mecanismo que, por sua vez, deverá executar uma tarefa específica como, por exemplo, posicionar uma caçamba basculante de um caminhão, de modo que além de girar para descarregar a carga, o seu baricentro deve descrever uma trajetória retilínea e horizontal. Nesta seção, as tarefas específicas abordadas para a síntese dimensional se enquadrarão na categoria de geração de movimento, enquanto que o tipo de mecanismo plano empregado será sempre um quadrilátero articulado. Serão apresentados dois métodos distintos, porém equivalentes, o método geométrico proposto por Burmester (1876) [8] e o método analítico proposto por Suh-Radcliffe (1967) [6].

6.1 Duas posições exatas: método geométrico

O ponto de partida do método geométrico é a especificação das posições ocupadas por um segmento AB , sendo que os índices destes pontos referem-se à posição ocupada (p.ex, 1, primeira, 2, segunda, etc). No caso em que o segmento AB deva passar pelas posições indicadas na fig.52, admitindo-se que os pontos A e B descrevam trajetórias circulares (articulações móveis), os correspondentes pontos-centro A_0 e B_0 se encontram sobre as mediatrizes dos segmentos A_1A_2 e B_1B_2 , respectivamente. A intersecção das duas mediatrizes se dá sobre um ponto bastante especial denominado de pólo P_{12} .

6.2 Três posições exatas: método geométrico

No caso em que o segmento AB deva passar por três posições exatas, há dois caminhos possíveis para a determinação dos comprimentos das peças do quadrilátero. Um deles, mais intuitivo, admite que os pontos A e B , sejam articulações móveis. Assim, as articulações fixas correspondentes A_0 e B_0 se encontrarão nas intersecções das mediatrizes dos segmentos A_1A_2, A_2A_3 e B_1B_2, B_2B_3 , respectivamente. No entanto, em muitas situações este caminho pode resultar em soluções que se encontrem fora da região permitida para instalação das articulações fixas.

O outro caminho, proposto por Burmester consiste em definir a localização das duas articulações fixas, e por uma construção geométrica determinar as correspondentes articulações móveis em uma determinada posição. Considere a fig.53. Na situação indicada, especificou-se a articulação fixa D_0 . Perceba que para três posições, devem existir até três pólos: P_{12}, P_{13} e P_{23} . Contudo, para determinação da articulação móvel D_1 , serão apenas necessários os pólos P_{12} e P_{13} . Trace uma reta unindo o pólo P_{12} com o ponto D_0 . Gire esta reta em torno do pólo P_{12} de um ângulo $-\alpha_{12}/2$.

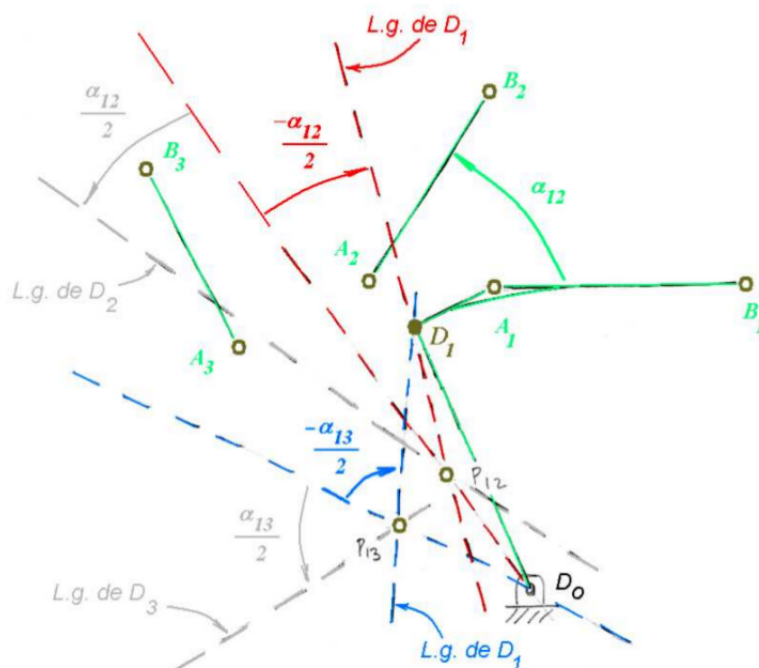


Figura 53: Três posições exatas: obtenção da articulação móvel D_1

Esta reta será o lugar geométrico (*l.g.*) do ponto D_1 . Analogamente, repita este procedimento para o pólo P_{13} , girando a reta de um ângulo $-\alpha_{13}/2$. A intersecção destas duas retas rotacionadas será o ponto D_1 . A consequência deste método é que qualquer ponto escolhido sobre o plano fixo (imóvel) poderá ser uma candidata a articulação fixa e, portanto, há infinitas soluções.

6.3 Quatro posições exatas: método geométrico

No caso em que o segmento AB deva passar por quatro posições exatas, devem existir até 6 pólos. No entanto, Burmester percebeu que são necessários apenas 4 para se determinar as dimensões do quadrilátero articulado. A fig.54 apresenta um exemplo em que foram utilizados os pólos P_{13} , P_{23} , P_{14} e P_{24} . Estes quatro pólos formam um quadrilátero polar com as seguintes características: os vértices de suas diagonais não contém índices comuns e os vértices dos lados contém apenas um índice comum. Tomando-se dois lados opostos do quadrilátero polar, $P_{13}P_{23}$ e $P_{14}P_{24}$, traçando-se os arcos-capazes correspondentes a um determinado ângulo $\gamma/2$ para estes dois segmentos, a(s) intersecção(ões) se existir(em) correspondem a possíveis articulações fixas. Repetindo esta construção dos arcos-capazes para valores de γ entre 0 e 180° , obtém-se uma curva chamada de *curva de pontos-centro* ou simplesmente *C.P.C.*. Na fig.55, observa-se o quadrilátero articulado $A_0A_1B_1B_0$ que conduz o segmento DE pelas posições 1, 2, 3 e 4. As articulações móveis A_1 e B_1 foram obtidas pelo mesmo procedimento da subseção anterior.

6.4 Três posições exatas: método analítico

O mecanismo quadrilátero articulado, cujas dimensões são determinadas nesta seção, é formado por quatro peças, três móveis e uma fixa. Duas dentre as peças móveis, $\overline{AA_0}$ e $\overline{BB_0}$, realizam apenas movimento de rotação. Conseqüentemente, os pontos A_0 e B_0 são articulações fixas, enquanto que os pontos A e B , articulações móveis. Se alguma delas for capaz de desenvolver uma rotação contínua de 360° , se chamará *manivela*. Por outro lado, se realizar um movimento de oscilação angular alternativa, ela será denominada *alavanca*. Nota-se ainda que, na estrutura cinemática deste mecanismo, existe uma terceira peça móvel que acopla as duas anteriores e por essa razão, é denominada de *acoplador*. O acoplador realiza um movimento plano composto de rotação e translação. Com relação à rotação, esta peça se desloca angularmente de α_j , quando este mecanismo se movimenta da posição (configuração) 1 para a posição j . No caso da síntese dimensional de três posições exatas, para a tarefa de *geração de movimento*, descrita na seção 3,

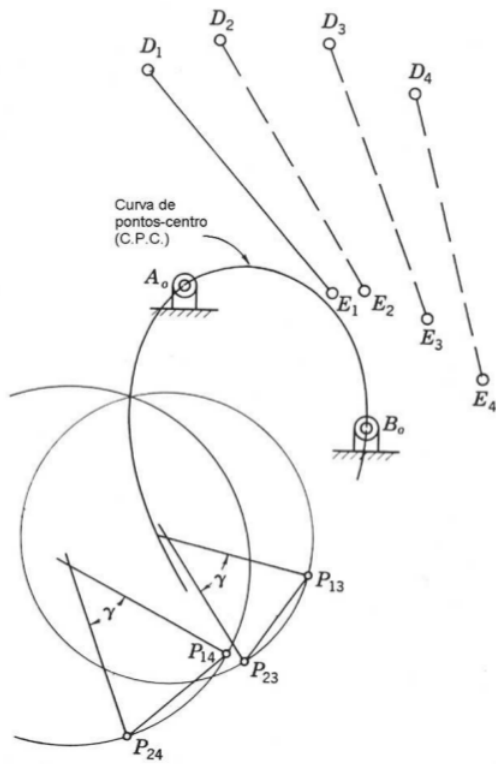


Figura 54: Quatro posições exatas: obtenção das articulações fixas

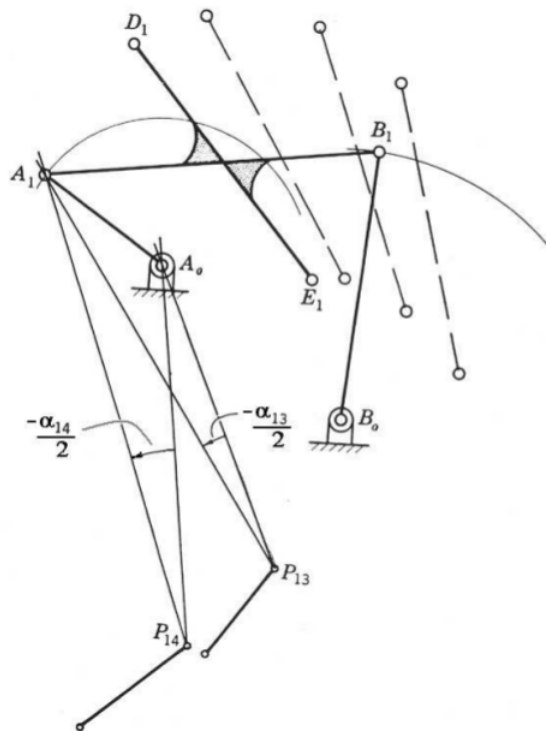


Figura 55: Quatro posições exatas: obtenção do quadrilátero articulado

consideram-se especificadas as coordenadas P_1, P_2 e P_3 , correspondentes às três posições a serem ocupadas pelo ponto P , os ângulos α_2 e α_3 , correspondentes aos deslocamentos angulares da peça acopladora, além das coordenadas das articulações fixas A_0 e B_0 . Para uma dada posição j , podem ser deduzidas as seguintes expressões

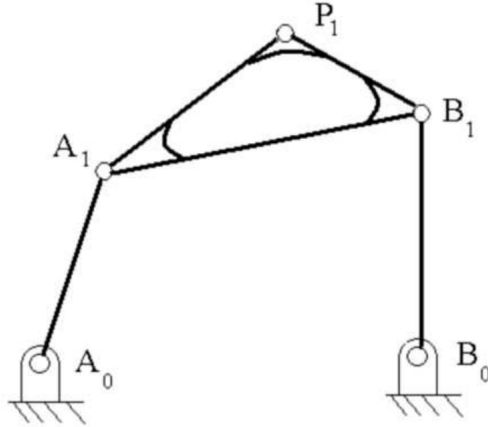


Figura 56: Quadrilátero articulado

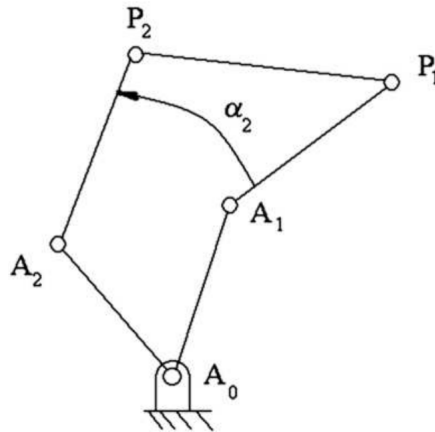


Figura 57: Detalhe de duas posições exatas

$$A_j - A_0 = (A_j - P_j) + (P_j - P_1) + (P_1 - A_0)$$

$$A_j - P_j = -(P_j - A_j) = -R_{\alpha_j}(P_1 - A_1)$$

sendo

$$R_{\alpha_j} = \text{Rot}(\alpha_j, z) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_j & -\text{sen}\alpha_j \\ \text{sen}\alpha_j & \cos\alpha_j \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$(A_j - A_0) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_j a_{1x} - \text{sen}\alpha_j a_{1y} - \cos\alpha_j p_{1x} + \text{sen}\alpha_j p_{1y} + p_{jx} - a_{0x} \\ \text{sen}\alpha_j a_{1x} + \cos\alpha_j a_{1y} - \text{sen}\alpha_j p_{1x} - \cos\alpha_j p_{1y} + p_{jy} - a_{0y} \end{bmatrix}$$

$$(A_1 - A_0) = [a_{1x} - a_{0x} \quad a_{1y} - a_{0y}]^T$$

$$(A_j - A_0)^T (A_j - A_0) = (A_1 - A_0)^T (A_1 - A_0) \quad (j = 2, 3) \quad (67)$$

A equação (67) expressa a propriedade de que a peça denominada *alavanca* ou *manivela*, $\overline{AA_0}$, possui comprimento constante. Substituindo-se as coordenadas de A_0, A_1 e A_j na eq.(67), obtem-se o seguinte sistema linear de equações nas incógnitas a_{1x} e a_{1y} .

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & B \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} \quad (68)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= 2c\alpha_2 r_{2x} + 2s\alpha_2 r_{2y} + 2a_{0x} \\
B &= -2r_{2x}s\alpha_2 + 2r_{2y}c\alpha_2 + 2a_{0y} \\
C &= a_{0x}^2 + a_{0y}^2 - r_{2x}^2 - r_{2y}^2 \\
D &= 2c\alpha_3 r_{3x} + 2s\alpha_3 r_{3y} + 2a_{0x} \\
E &= -2r_{3x}s\alpha_3 + 2r_{3y}c\alpha_3 + 2a_{0y} \\
F &= a_{0x}^2 + a_{0y}^2 - r_{3x}^2 - r_{3y}^2 \\
r_{2x} &= -c\alpha_2 p_{1x} + s\alpha_2 p_{1y} + p_{2x} - a_{0x} \\
r_{2y} &= -s\alpha_2 p_{1x} - c\alpha_2 p_{1y} + p_{2y} - a_{0y} \\
r_{3x} &= -c\alpha_3 p_{1x} + s\alpha_3 p_{1y} + p_{3x} - a_{0x} \\
r_{3y} &= -s\alpha_3 p_{1x} - c\alpha_3 p_{1y} + p_{3y} - a_{0y}
\end{aligned}$$

Consequentemente, a solução analítica é simples. Deve-se repetir o procedimento para determinar B_1 .

6.5 Exemplo

Dimensione um mecanismo quadrilátero articulado que satisfaça às especificações de projeto definidas nas tabelas 2 e 3. Admita que as coordenadas dos pontos A_0 e B_0 sejam, respectivamente, $[5m \ 0]^T$ e $[0 \ 0]^T$. Aplicando-se a eq.(68), obtêm-se as coordenadas dos pontos A_1 e B_1 , apresentadas na tabela 4, correspondentes à 1a. posição a ser ocupada pelo mecanismo.

Tabela 2 - Coordenadas do ponto P

$n.^0$	$x[m]$	$y[m]$
1	1,0	1,0
2	2,0	0,5
3	3,0	1,5

Tabela 3 - Ângulos α

$n.^0$	$\alpha[graus]$
2	0,0
3	45

Tabela 4 - Coordenadas dos pontos A_1 e B_1

$n.^0$	$x[m]$	$y[m]$
A_1	3,548	-1,655
B_1	0,994	3,238

6.6 Quatro posições exatas

Dados: $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, P_1, P_2, P_3, P_4$

$$(A_j - A_0)^T(A_j - A_0) = (A_1 - A_0)^T(A_1 - A_0) \quad (j = 2, 3, 4) \quad (69)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & B \\ D & E \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ F \\ I \end{bmatrix} \quad (70)$$

sendo

$$\begin{aligned}
G &= 2c\alpha_4 r_{4x} + 2s\alpha_4 r_{4y} + 2a_{0x} \\
H &= -2r_{4x}s\alpha_4 + 2r_{4y}c\alpha_4 + 2a_{0y} \\
I &= a_{0x}^2 + a_{0y}^2 - r_{4x}^2 - r_{4y}^2
\end{aligned}$$

$$r_{4x} = -c\alpha_4 p_{1x} + s\alpha_4 p_{1y} + p_{4x} - a_{0x}$$

$$r_{4y} = -s\alpha_4 p_{1x} - c\alpha_4 p_{1y} + p_{4y} - a_{0y}$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{A} & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = 0 \quad (71)$$

Admita que a_{0x} seja conhecido. A solução numérica por Newton-Raphson, apenas na incógnita a_{0y} , é relativamente simples. Por outro lado, a solução analítica, resulta em uma equação polinômial de 3o. grau na incógnita a_{0y} cujos coeficientes são de demorada obtenção. Em suma, é uma solução trabalhosa.

6.7 Exemplo

Dimensione um mecanismo quadrilátero articulado que satisfaça às especificações de projeto definidas nas tabelas 5 e 6. Admita que as coordenadas a_{0x} e b_{0x} dos pontos A_0 e B_0 sejam, respectivamente, $-20,195cm$ e $-29,167cm$. Aplicando-se a eq.(71), obtem-se as coordenadas a_{0y} e b_{0y} dos pontos A_0 e B_0 . Com estes dados, utilizando a eq.(68), podem ser calculadas as coordenadas dos pontos A_1 e B_1 , apresentadas na tabela 7, correspondentes à 1a. posição a ser ocupada pelo mecanismo.

Tabela 5 - Coordenadas do ponto P

$n.^0$	$x[cm]$	$y[cm]$
1	0,0	0,0
2	5,0	8,0
3	10	15
4	18	20

Tabela 6 - Ângulos α

$n.^0$	$\alpha[graus]$
2	10
3	20
4	30

Tabela 7 - Coordenadas dos pontos A_0 , B_0 , A_1 e B_1

$n.^0$	$x[cm]$	$y[cm]$
A_0	-20,195	25,566
B_0	-29,167	42,355
A_1	-25,349	25,379
B_1	-37,086	36,093

6.8 Exercício

Dimensione um mecanismo quadrilátero articulado que satisfaça às especificações de projeto definidas nas tabelas 8 e 9. Admita que as coordenadas dos pontos A_0 e B_0 sejam, respectivamente, $[-16,06cm \ 23,8cm]^T$ e $[-9,2cm \ 36,9cm]^T$. A resposta encontra-se na tabela 10, que corresponde às coordenadas das articulações móveis na 1a. posição a ser ocupada pelo mecanismo.

Tabela 8 - Coordenadas do ponto P

$n.^0$	$x[cm]$	$y[cm]$
1	-19,21	-1,62
2	-19,37	12,18
3	-13,33	54,60

Tabela 9 - Ângulos α

$n.^0$	$\alpha[graus]$
2	-13,86
3	-179,01

Tabela 10 - Coordenadas dos pontos A_1 e B_1

$n.^0$	$x[cm]$	$y[cm]$
A_1	-68,37	27,52
B_1	-54,13	51,87

7 Análise cinemática de mecanismos tridimensionais

7.1 Introdução

O tópico fundamental desta seção é a generalização da análise cinemática de mecanismos para o espaço tridimensional. O assunto predominante será a análise de posições com o emprego das matrizes de transformação homogênea, definidas anteriormente na seção 4 para o caso plano. Serão apresentados três exemplos que ilustram a aplicação das matrizes de transformação tanto em mecanismos de cadeia cinemática fechada como aberta.

7.2 Descrição da localização segundo a notação matricial

Esta subseção representa uma generalização do conteúdo apresentado na subseção 4.2, sendo que as diferenças principais referem-se às matrizes de rotação, que são 3×3 e seus elementos variam bastante dependendo do eixo escolhido para rotação, bem como à seqüência utilizada para a composição de rotações [5, 2].

$$\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^A T_B] \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

sendo

$$[{}^A T_B] = \begin{bmatrix} [{}^A R_B] & {}^A\mathbf{r}_{O_B} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$[{}^A R_B] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}^T = [0 \ 0 \ 0]$$

Casos:

- somente translação

$$[{}^A R_B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A\mathbf{r}_{O_B} = [d_x \ d_y \ d_z]^T$$

- somente rotação em torno do eixo z

$$[{}^A R_B] = Rot(z, \gamma) = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A\mathbf{r}_{O_B} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

- somente rotação em torno do eixo y

$$[{}^A R_B] = Rot(y, \beta) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}$$

$${}^A\mathbf{r}_{O_B} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

- somente rotação em torno do eixo x

$$[{}^A R_B] = Rot(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

$${}^A\mathbf{r}_{O_B} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

- composição de rotações: ângulos de Euler
(a) rotações em torno de eixos fixos

$$[{}^A R_B] = \underbrace{Rot(x, \alpha)}_{3a.} \underbrace{Rot(y, \beta)}_{2a.} \underbrace{Rot(z, \gamma)}_{1a.}$$

$$[{}^A R_B] = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

- (b) rotações em torno de eixos móveis

$$[{}^A R_B] = \underbrace{Rot(z, \gamma)}_{1a.} \underbrace{Rot(x', \alpha)}_{2a.} \underbrace{Rot(z'', \beta)}_{3a.}$$

$$[{}^A R_B] = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotação de um ângulo θ em torno do eixo que passa pelo vetor \mathbf{u} ¹

$$[{}^A R_B] = Rot(\mathbf{u}, \theta) = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0q_3 + q_1q_2) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_0q_3 + q_1q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(-q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

sendo

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$$

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$q_1 = \text{sen} \frac{\theta}{2} u_x \quad q_2 = \text{sen} \frac{\theta}{2} u_y \quad q_3 = \text{sen} \frac{\theta}{2} u_z$$

$$\Delta = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

7.3 Mecanismo $RSSR$

O mecanismo $RSSR$, apesar de possuir mobilidade 2, o giro da peça acopladora (segmento AB) pode ser desconsiderado para a análise de posições. Desta maneira, o objetivo do desenvolvimento descrito a seguir é relacionar os ângulos θ_1 e θ_3 , correspondentes aos deslocamentos angulares das peças 1 e 3, conforme fig.58. A peça 1 realiza rotação completa (360°) em torno do eixo y_0 , enquanto que a peça 3 oscila angularmente em torno de um eixo paralelo a x_0 .

$$\begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^0 T_1] \begin{bmatrix} {}^1 \mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

sendo

$$[{}^0 T_1] = Rot(\theta_1, y_0) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 \mathbf{r}_A = [0, L_1, H_1]^T$$

Conseqüentemente,

$${}^0 \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} H_1 s_1 \\ L_1 \\ H_1 c_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{r}_B \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^0 T_3] \begin{bmatrix} {}^3 \mathbf{r}_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

¹Bottema, O.; Roth, B. *Theoretical Kinematics*, Dover, 1990 e Tsai, L.-W. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*, John Wiley and Sons, 1999

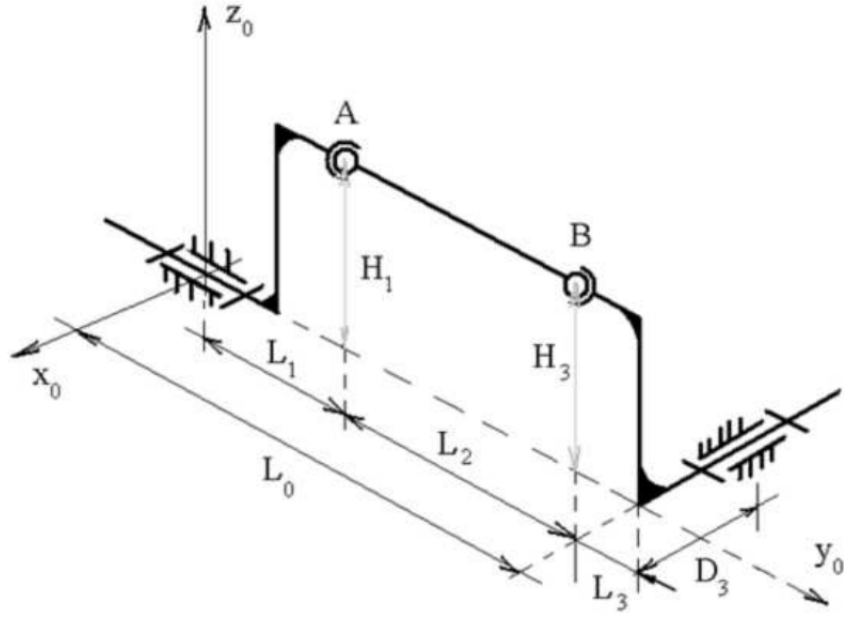


Figura 58: Mecanismo \underline{RSSR}

sendo

$${}^0T_3 = Rot(\theta_3, x_0)Trans(-D_3, x_0)Trans(L_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -D_3 \\ 0 & c_3 & -s_3 & L_0 \\ 0 & s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{r}_B = [D_3, -L_3, H_3]^T$$

Conseqüentemente,

$${}^0\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_3c_3 - H_3s_3 + L_0 \\ -L_3s_3 + H_3c_3 \end{bmatrix}$$

Como o comprimento da peça 2 é constante e igual a L_2 ,

$$({}^0\mathbf{r}_A - {}^0\mathbf{r}_B)^T ({}^0\mathbf{r}_A - {}^0\mathbf{r}_B) = L_2^2 \quad (73)$$

Desenvolvendo-se a eq.(73), obtem-se

$$Ec_3 + Fs_3 + G = 0 \quad (74)$$

sendo

$$E = 2[(L_1 - L_0)L_3 - H_1H_3c_1]$$

$$F = 2[(L_1 - L_0)H_3 + H_1L_3c_1]$$

$$G = H_1^2 + H_3^2 + (L_1 - L_0)^2 + L_3^2 - L_2^2$$

Para $\theta_1 = 0^\circ$, $H_1 = H_3 = 1m$, $L_1 = L_3 = 0$, $L_0 = L_2 = 1m$, determine θ_3 . Substituindo os valores dos parâmetros e da variável de entrada, obtem-se

$$E = -2 \quad F = -2 \quad G = 2$$

Portanto, há duas soluções, sendo que uma delas é $\theta_3' = 0^\circ$ e a outra, $\theta_3'' = 90^\circ$. No entanto, do ponto de vista da viabilidade, a primeira é a correta.

7.4 Mecanismo \underline{RUR}

O mecanismo \underline{RUR} , também conhecido como transmissão por junta universal ou cardã, é responsável pela transferência de potência entre dois eixos concorrentes. O desvio angular entre os eixos ocasiona uma diferença entre a velocidade angular do eixo de entrada (motor) e o eixo de saída (movido). O desenvolvimento a seguir tem por objetivo relacionar os ângulos de entrada ϕ_1 e de saída ϕ_2 e, conseqüentemente, as respectivas velocidades angulares.

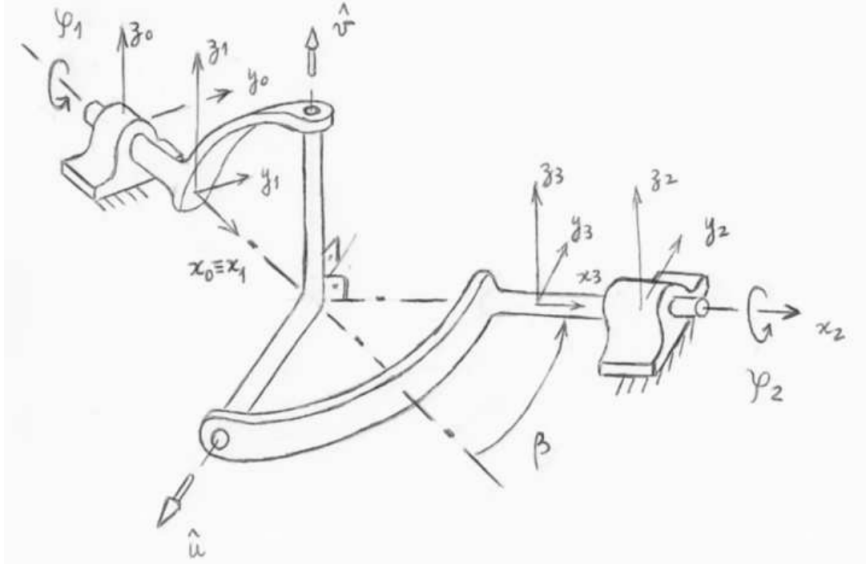


Figura 59: Mecanismo \underline{RUR}

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{v} &= [{}^0R_1]^1\mathbf{u} = \text{Rot}(\phi_1, x_0)^1\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi_1 & -s\phi_1 \\ 0 & s\phi_1 & c\phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -s\phi_1 \\ c\phi_1 \end{bmatrix} \\
 {}^0\mathbf{u} &= [{}^0R_2][{}^2R_3]^3\mathbf{u} = \text{Rot}(\beta, z_0)\text{Rot}(\phi_2, x_2)^3\mathbf{u} = \\
 &= \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi_2 & -s\phi_2 \\ 0 & s\phi_2 & c\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\beta c\phi_2 \\ -c\beta c\phi_2 \\ -s\phi_2 \end{bmatrix} \\
 {}^0\mathbf{u} \cdot {}^0\mathbf{v} &= {}^0\mathbf{u}^T {}^0\mathbf{v} = 0
 \end{aligned}$$

$$tg\phi_1 \quad c\beta = tg\phi_2 \quad (75)$$

De acordo com a eq.(75), pode-se observar que se β for nulo, os ângulos ϕ_1 (de entrada) e ϕ_2 (de saída) serão idênticos. Por outro lado, se β for $\pm 90^\circ$, o ângulo ϕ_2 será nulo e haverá travamento da transmissão cardã. Do ponto de vista prático, recomenda-se que o ângulo β seja $\leq 45^\circ$. Derivando-se em relação ao tempo a eq.(75) e simplificando-se a expressão obtida, chega-se em

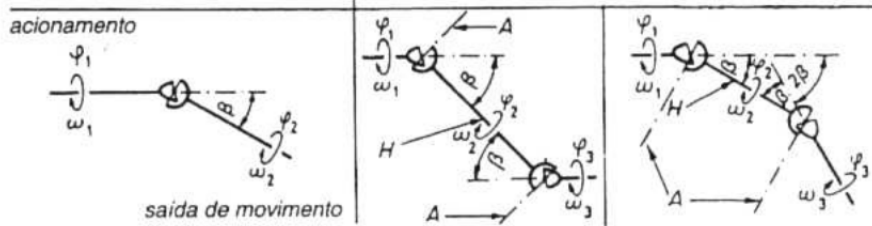
$$\dot{\phi}_2 = \frac{c\beta}{1 - s^2\beta s^2\phi_1} \dot{\phi}_1 \quad (76)$$

Outra conseqüência importante das deduções anteriores ocorre quando utiliza-se mais de uma transmissão cardã acoplada à anterior². Na situação em que os três eixos envolvidos encontram-se no mesmo plano e quando o eixo de saída for paralelo ao eixo de entrada (cfr. fig.60), haverá tanto igualdade entre os ângulos de entrada ϕ_1 e saída ϕ_3 , como entre as correspondentes velocidades angulares. Verifica-se esta mesma propriedade se os três eixos estiverem no mesmo plano e o ângulo entre os eixos de entrada e saída for 2β .

²Gieck *Manual de Fórmulas Técnicas*, Hemus, 1996

Junta Cardã

para acionamento uniforme, a saída de movimento é:
 não uniforme | uniforme através do eixo auxiliar H



Se todos os eixos estiverem num mesmo plano, tem-se:

$$\tan \varphi_2 = \tan \varphi_1 \cdot \cos \beta \quad \tan \varphi_3 = \tan \varphi_1 \quad \tan \varphi_3 = \tan \varphi_1$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi_1} \quad \omega_3 = \omega_1 \quad \omega_3 = \omega_1$$

$$a_2 = \omega_1^2 \frac{\sin^2 \beta \cdot \cos \beta \cdot \sin 2\varphi_1}{(1 - \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi_1)^2}$$

Ambos os eixos A das juntas de eixo auxiliar devem ser paralelas

Quanto mais o ângulo de deflexão β aumenta, tanto maior será a aceleração máxima a e com ela também o momento de aceleração M_a . Na prática, $\beta \leq 45^\circ$.

Figura 60: Situações de transmissão uniforme e não-uniforme

7.5 Robô RRR

A arquitetura do robô RRR já foi descrita na seção 3 e a sua versão plana (RR) teve sua análise cinemática desenvolvida na seção 4. A seguir, apresenta-se uma formulação matemática tendo por objetivo relacionar as coordenadas associadas aos três motores rotativos a saber, θ_1 , θ_2 e θ_3 , com as coordenadas da garra, representadas pelo ponto P . Admita que a distância H , indicada na fig.61, seja nula.

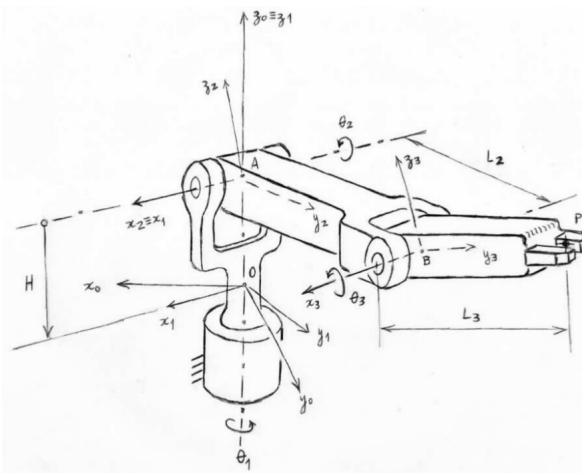


Figura 61: Robô RRR

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^0T_1][{}^1T_2][{}^2T_3] \begin{bmatrix} {}^3\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 & L_2 \\ 0 & s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(L_3c_{23} + L_2c_2) \\ c_1(L_3c_{23} + L_2c_2) \\ L_3s_{23} + L_2s_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

Admitindo-se que $L_2 = L_3 = 1m$, $\theta_1 = -45^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$ e $\theta_3 = 30^\circ$, pode-se determinar x, y, z . Esta análise de posições chama-se cinemática direta, isto porque as variáveis associadas aos atuadores são conhecidas. Substituindo os parâmetros e as variáveis dadas na eq.(77), obtém-se

$$\begin{aligned} x &= -\text{sen}(-45^\circ)[\cos(90^\circ) + \cos(60^\circ)] = \sqrt{2}/4 \\ y &= \cos(-45^\circ)[\cos(90^\circ) + \cos(60^\circ)] = \sqrt{2}/4 \\ z &= \text{sen}(90^\circ) + \text{sen}(60^\circ) = 1 + \sqrt{3}/2 \end{aligned} \quad (78)$$

Considere agora o problema contrário, ou seja, admita como dados $L_2 = L_3 = 1m$, $x = \sqrt{2}/4$, $y = \sqrt{2}/4$ e $z = 1 + \sqrt{3}/2$ e determine $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Esta análise de posições a ser desenvolvida a seguir, chama-se cinemática inversa, isto porque as variáveis associadas à ferramenta ou garra são conhecidas. A partir da eq.(77),

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= L_3c_{23} + L_2c_2 \\ z &= L_3s_{23} + L_2s_2 \end{aligned}$$

Assim,

$$(L_3c_{23})^2 + (L_3s_{23})^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - L_2c_2\right)^2 + (z - L_2s_2)^2$$

Desenvolvendo a equação anterior, chega-se à expressão

$$Ec_2 + Fs_2 + G = 0$$

sendo

$$E = -2\sqrt{x^2 + y^2}L_2 \quad F = -2zL_2 \quad G = x^2 + y^2 + z^2 + L_2^2 - L_3^2 \quad (79)$$

Resolvendo a eq.(79) pelo método analítico apresentado na seção 4, chega-se a $\theta'_2 = 90^\circ$, $\theta'_3 = -30^\circ$, $\theta''_2 = 60^\circ$, $\theta''_3 = 30^\circ$. A obtenção de θ_1 é realizada pela substituição das variáveis calculadas na eq.(77). Desta maneira, $\theta_1 = -45^\circ$.

7.6 Exercícios

Ex.6.1: Dado o mecanismo da fig.62, utilizado como estrutura cinemática de um robô de cadeia aberta:

- indique, na própria figura, a localização dos sistemas de referência vinculados às peças móveis;
- determine as matrizes de transformação homogênea entre os sistemas de referência;
- determine, literalmente, as coordenadas x , y e z do ponto P , pertencente à garra, em função de d_1, θ_2, θ_3 , deslocamentos impostos pelos atuadores, e D, H, V, L_1, L_2 , parâmetros do mecanismo;
- determine as coordenadas x, y e z , admitindo que $d_1 = 0,7m, \theta_2 = 60^\circ, \theta_3 = 30^\circ, D = H = V = 0,1m, L_1 = L_2 = 1,0m$;
- examinando as equações do item c , estime o número de configurações possíveis de montagem do mecanismo analisado.

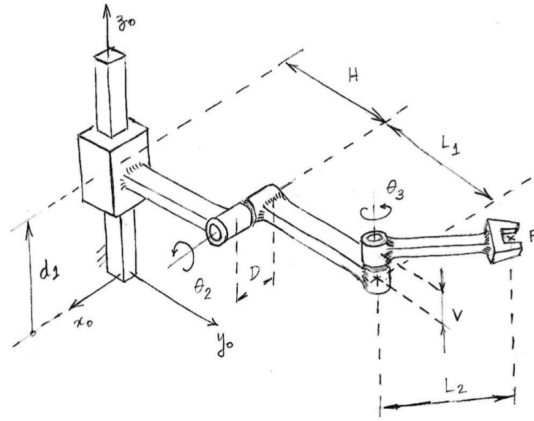


Figura 62: Robô PRR

Ex.6.2: Considere o robô paralelo tridimensional da fig.63, que contém uma base fixa triangular de lado $L = 1,0m$, com vértices A, B e C , além de uma plataforma móvel também triangular cujos vértices são os pontos M, N e P , de lado $l = 0,2m$. Em cada um dos vértices destes triângulos equiláteros, localiza-se uma junta esférica S e conectando a plataforma móvel à base, existem seis pernas de comprimento variável d_j , com $j = 1, \dots, 6$. Assim, para viabilizar esta alteração de comprimento, em cada uma das 6 pernas, existe uma junta prismática P . Admita a presença de dois sistemas de referência: um deles $Ox_0y_0z_0$ com origem no ponto médio do lado AC do triângulo da base e o outro $Mx_1y_1z_1$ no triângulo da plataforma, conforme indicado na fig.63.

- determine as coordenadas dos pontos M, N e P em relação à base $Mx_1y_1z_1$;
- determine as coordenadas dos pontos M, N e P em relação à base $Ox_0y_0z_0$, admitindo que a plataforma móvel sofra os seguintes movimentos nesta seqüência: $Trans(0, 866m, z_0)$, $Trans(0, 2m, x_0)$, $Rot(\gamma = 15^\circ, z_0)$ e $Rot(\alpha = 30^\circ, x_1)$;
- determine os comprimentos de cada uma das 6 pernas, para que a plataforma alcance a posição e orientação definidas no item c .

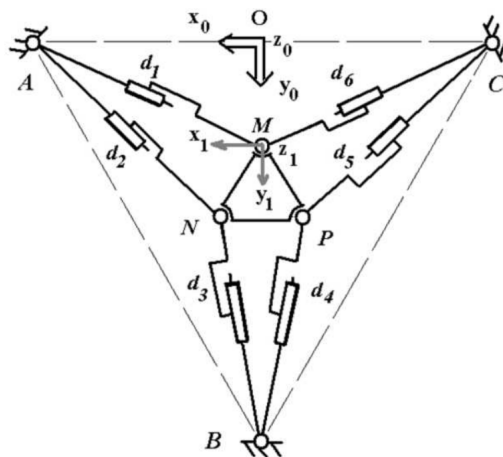


Figura 63: Vista de topo do robô 6 SPS

Referências

- [1] Shigley, J. E. *Cinemática dos mecanismos* Edgar Blücher, 1970a.
- [2] Tsai L.-W. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators* John Wiley and Sons, 1999.
- [3] Hervé J. M. The mathematical group structure of the set of displacements *Mech. Mach. Theory*, 29: 73–81, 1994.
- [4] Hervé J. M. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design *Mech. Mach. Theory*, 34: 719–730, 1999.
- [5] Craig, J.J. *Introduction to robotics* Addison-Wesley Longman Publishing, 1989.
- [6] Suh, C.-H; Radcliffe, C.W. *Kinematics and mechanisms design* John Wiley and Sons, 1978.
- [7] Erdman, A.; Sandor, G. *Mechanism design: analysis and synthesis, vol.I* Prentice-Hall, 1997.
- [8] Erdman, A.; Sandor, G. *Advanced Mechanism design: analysis and synthesis, vol.II* Prentice-Hall, 1984.
- [9] Kane, T.R.; Levinson, D.A. *Dynamics, theory and applications* McGraw-Hill, 1985.
- [10] Lanczos, C. *The Variational Principles of Mechanics* Dover, 1983.
- [11] Shigley, J. E. *Dinâmica das máquinas* Edgar Blücher, 1970b.