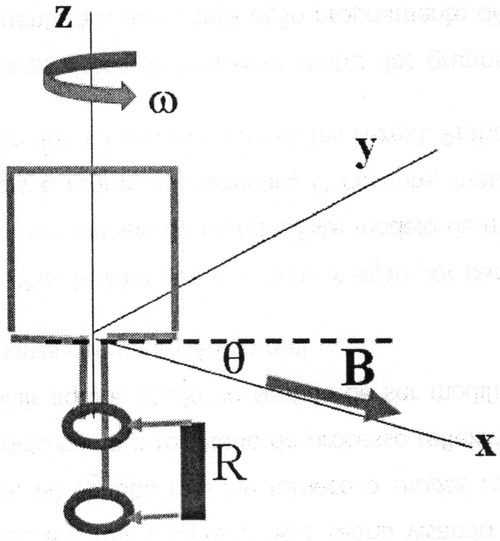
4300303
Eletromagnetismo I
Segundo Semestre 2014

Terceira Prova

1. Uma espira quadrada de lado a está montada em um eixo vertical e gira com velocidade angular ω. Os terminais da espira são ligados a dois anéis condutores, separados entre si. Um resistor de resistência R é conectado a estes anéis através de buchas condutoras de carvão. A espira está imersa em um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{e}_z$.

a)(1,0) Determine a expressão da corrente que circula pela resistência.

b)(1,0) Determine a expressão do torque externo que tem que ser aplicado à espira para mantê-la girando com velocidade angular constante.



---

2. Considere uma onda plana incidindo na interface entre dois meios segundo o ângulo de Brewster, isto é, $\theta_1 = \theta_B$; $\tan\theta_B = n_2/n_1$. O campo elétrico da onda incidente é dado por

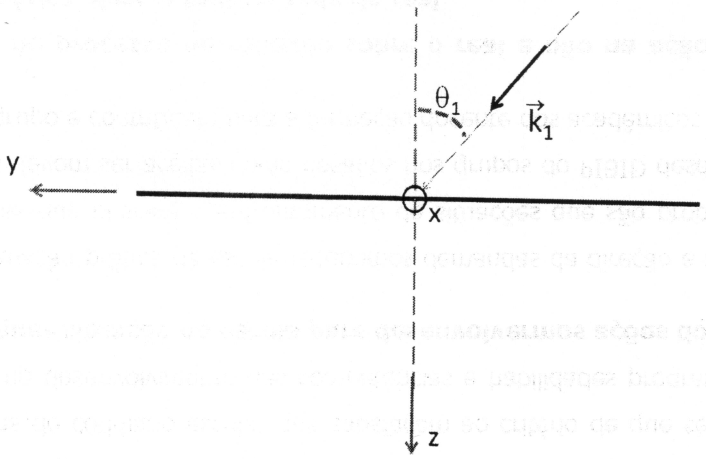
$$\vec{E}_1 = [E_s\hat{e}_x + E_p\cos\theta_1\hat{e}_y - E_p\sin\theta_1\hat{e}_z]e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t)}$$

a)(1,0) Mostre que os coeficientes de reflexão, r_s , e de transmissão, t_s , da componente do campo da onda perpendicular ao plano de incidência, para este caso, são dados por

$$r_s = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}; \quad t_s = \frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}.$$

b)(2,0) Mostre que a expressão para o campo elétrico total transmitido para o meio 2 é

$$\vec{E}_2 = \left[\frac{2n_1^2}{n_1^2+n_2^2} E_s \hat{e}_x + \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_B E_p\left(\hat{e}_y - \frac{n_1}{n_2}\hat{e}_z\right)\right] e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t)} .$$



3.

a)(2,0) Em aula vimos que a Equação de Helmholtz para uma função escalar $\varphi(\vec{r})$,

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = -g(\vec{r}) ,$$

pode ser solucionada se determinarmos a <u>Função de Green</u> $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ para o problema, que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,').$$

<u>Prove</u> que, se $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ de fato satisfizer esta equação, então,

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}\,')g(\vec{r}\,')d\tau'.$$

b)(1,0) Em aula mostramos que o potencial vetor para uma antena tipo dipolo curto é dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(r,\theta;t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{e}_z.$$

A partir deste resultado, obtenha a expressão para o campo magnético $\vec{B}(\vec{r},t)$ da onda eletromagnética emitida pelo dipolo.

---

4. O campo elétrico de uma onda eletromagnética é dado por

$$\vec{E} = E_0\cos\left[\omega\left(\frac{y}{c}-t\right)\right]\hat{e}_x + E_0\sin\left[\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)\right]\hat{e}_y.$$

a)(1,0) Determine a expressão do vetor de Poynting $\vec{S}(\vec{r},t)$ correspondente a esta onda.

b)(1,0) Determine a expressão completa do tensor de Maxwell correspondente a esta onda, $\overleftrightarrow{T}$, usando sua representação matricial em coordenadas cartesianas.

Formulário

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}.d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};\ \nabla \cdot \vec{B} = 0;\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B};\ \vec{m} = I\vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B};\ T_{ij} = \epsilon_0\left[E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right]$$

$$\int [\varphi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \varphi] d\tau = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS$$

Coordenadas Esféricas

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\varphi$$

$$r_s = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2};\quad t_s = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$$

$$r_p = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2};\quad t_p = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}$$

$$r_s = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)};\ t_s = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)};\ r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_2 + \theta_1)};$$

$$t_p = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$