Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2° Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 32

Terminamos a aula passada derivando as expressões dos potenciais retardados para um dipolo curto, dos quais derivamos os campos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{e}_\theta$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{e}_\varphi$$

Portanto, para grandes distâncias, $d/r \ll 1$; $\lambda/r \ll 1$, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão em fase e são perpendiculares entre si. No entanto, eles não são ondas planas, mas sim ondas esféricas, caracterizadas pelo fator $(sen\theta/r)$.

O vetor de Poynting, ou seja, a potência transmitida por unidade de área, é dado por

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left(\frac{sen\theta}{r}\right)^2 [cos[\omega(t-r/c)]]^2\,\hat{e}_r$$

$$\therefore \vec{S}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\left(\frac{sen\theta}{r}\right)\left[1 + cos\left[2\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right]\hat{e}_r$$

onde usamos a relação $cos^2\theta = [1+cos(2\theta)]/2$. Portanto, a média num período, ou intensidade da radiação do dipolo curto, é dada por

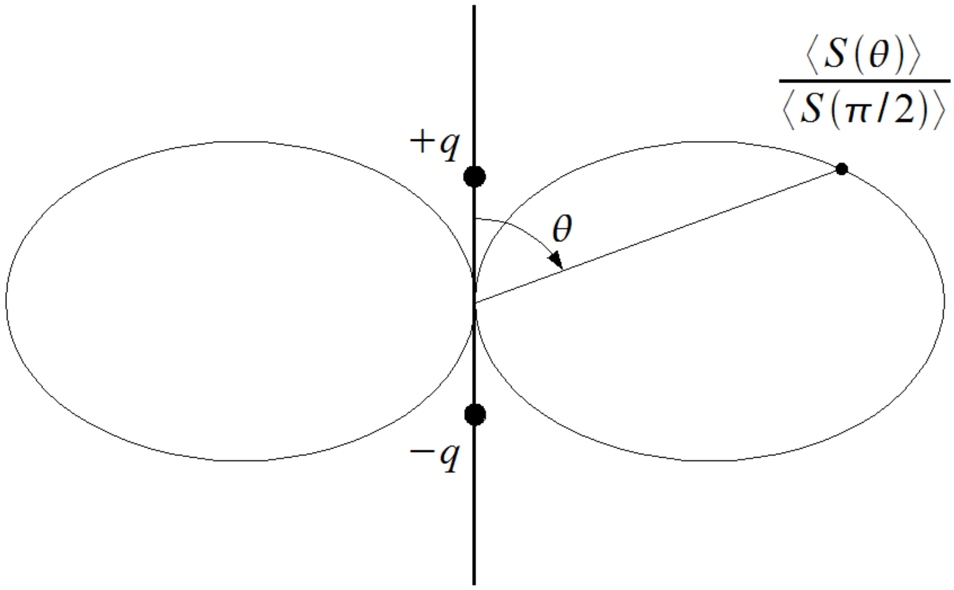
$$\boxed{\langle\vec{S}\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\frac{sen^2\theta}{r^2}\hat{e}_r}$$

É importante explorar algumas consequências desta expressão, que são importantes do ponto de vista físico.

i) A intensidade é proporcional ao quadrado do momento de dipolo. Portanto, se a separação entre as cargas for dobrada, a intensidade da radiação emitida quadruplica

ii) A intensidade é proporcional à quarta potência é proporcional à quarta potência da frequência. Este é um resultado muito importante e geral; válido mesmo para antenas longas.

iii) A potência radiada é direcionada principalmente na direção perpendicular ao eixo do dipolo; não há radiação ao longo do dipolo. Isto é um consequência do fator $sen^2\theta$ e é geralmente representado num diagrama de radiação, como mostrado na figura (lembre-se do argumento utilizado para explicar fisicamente o ângulo de Brewster).



Para calcular a potência média total radiada pelo dipolo, temos que integrar $\langle\vec{S}\rangle$ sobre a superfície de uma esfera de raio r arbitrário, com centro no centro do dipolo,

$$\langle P\rangle = \int \langle\vec{S}\rangle \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int \frac{sen^2\theta}{r^2} r^2\, sen(\theta)\, d\theta d\varphi$$

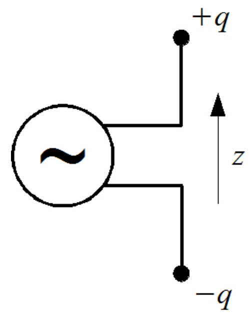
onde usamos o resultado

$$\int sen^3(\theta) d\theta = -cos(\theta) + \frac{cos^2(\theta)}{3}$$

Assim a potencia total (média no tempo) radiada por um dipolo curto é dada por

$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

Agora vamos explorar a expressão para a potência radiada por um dipolo para obter um resultado muito importante. Voltando ao modelo original, o dipolo curto foi modelado como um fio de comprimento d, onda as cargas em seus extremos oscilam harmonicamente segunda a equação



$$q(t) = \pm q_0 cos(\omega t)$$

Nós podemos visualizar esta oscilação das cargas como se elas estivessem oscilando entre os terminais da antena (ao longo do eixo) de acordo com

$$z(t) = \frac{d}{2} cos(\omega t) \qquad \left[z = -\frac{d}{2} cos(\omega t) \text{para a carga negativa} \right]$$

Então a velocidade e aceleração da carga serão dadas por

$$v(t) = -\frac{\omega d}{2} sen(\omega t); \qquad a(t) = -\frac{\omega^2 d}{2} cos(\omega t)$$

A potência radiada por cada carga naturalmente deve ser metade da potência radiada pelo dipolo,

$$\langle P \rangle_q = \frac{\langle P \rangle}{2} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{2 \times 12 \pi c}$$

Mas, para cada carga temos que $\omega^4 = 4a^2/d^2$, onde a agora é a amplitude da aceleração da carga; portanto,

$$\langle P \rangle_q = \frac{\mu_0 d^2 q^2 4 a^2}{2 \times 12 c d^2},$$

onde utilizamos $p_0 = qd$ Simplificando os fatores e utilizando $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$, obtemos finalmente

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q^2 a^2}{c^2}$$

que é a expressão da potência radiada por uma carga acelerada, com velocidade não relativística (Griffiths 11.2). Este resultado foi derivado diretamente a partir das Equações de Maxwell, em 1897, pelo físico teórico inglê Sir J. J. Larmor; por isso esta expressão é denominada Fórmula de Larmor.

Com este resultado, encerramos o programa de Eletromagnetismo I. No curso Eletromagnetismo II vamos derivar a expressão dos campos eletromagnéticos produzidos por cargas em movimento utilizando uma formulação mais geral.