Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2° Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 31

Na aula passada resolvemos a Equação de Helmholtz e obtivemos as expressões para os potenciais retardados

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau'$$

afim de facilitar a notação, é comum representar as fontes computadas no tempo retardado entre colchetes,

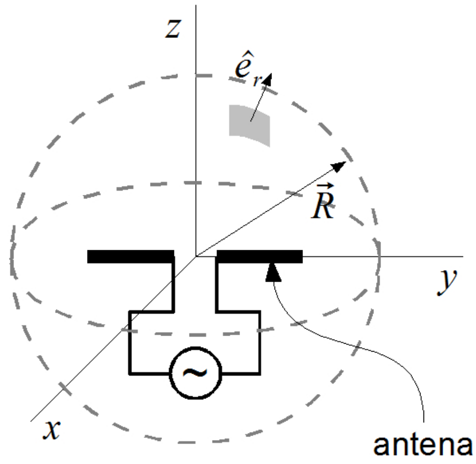
$$\rho\left(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c\right) \equiv [\rho(\vec{r}\,')]; \qquad \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c\right) \equiv [\vec{j}(\vec{r}\,')]$$

de forma que

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{[\rho\left(\vec{r}\,'\right)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau' \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau'$$

Radiação de Dipolo (Griffiths; seção 11.1.2)

Nós vamos utilizar as expressões que determinamos para os potenciais retardados para calcular o campo de radiação do sistema de antena mais elementar que existe, um dipolo elétrico oscilante. Mas antes vamos discutir o que entendemos por campo de radiação. Suponhamos que tenhamos uma pequena antena na origem do sistema de coordenadas produzindo um campo eletromagnético $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B}(\vec{r},t)$. A potência total que atravessa uma esfera de raio R centrada na origem é dada por



$$P = \int \vec{S} \cdot \hat{e}_r dS$$

onde $\vec{S}$ é o vetor de Poyinting, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, e dA é o elemento de área em coordenadas esféricas

$$dA = R^2 sen\theta d\theta d\varphi$$

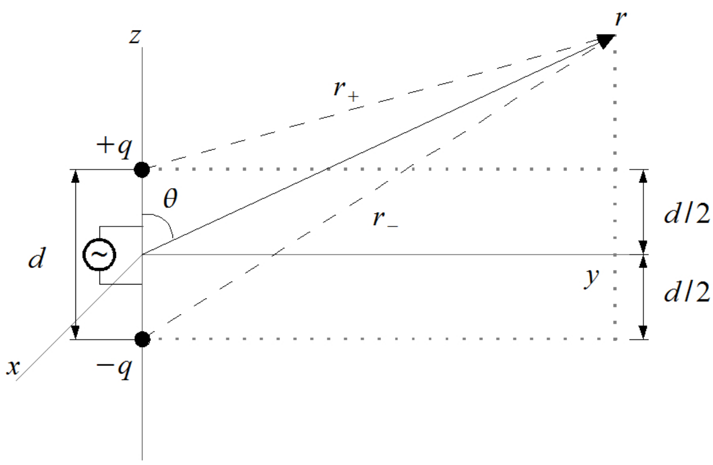
Então,

$$P = \frac{R^2}{\mu_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_r sen\theta d\theta$$

Nós dizemos que uma fonte produz um campo de radiação se a potencia total P não se anula em qualquer que seja a distância da fonte, ou seja, mesmo para $R \to \infty$. Para que isto aconteça, é necessário que $|\vec{E}|$ e $|\vec{B}|$ decresçam com a distância no máximo proporcionalmente a R^{-1}. Se $\vec{E}$ e $\vec{B}$ forem campos estáticos, por exemplo, sabemos que $|\vec{E}| \sim 1/R^2$ (monopolo) e $|\vec{B}| \sim 1/R^3$ (dipolo), de modo que $P \sim 1/R^3 \to 0$ quando $R \to \infty$.

Suponhamos que a fonte esteja num ponto muito distante do universo. Quando ela emite um campo de radiação, a intensidade do sinal naturalmente será muito pequena quando chegar a um observatório terrestre, devido à distância. No entanto, se pudéssemos medir e integrar o sinal numa superfície esférica envolvendo a fonte, obteríamos uma potência constante, independente do raio dessa superfície. Portanto, uma fonte emitindo radiação pode ser sempre detectada, em princípio, independente da distância ao observador. O mesmo não ocorre para campos estáticos.

Uma antena curta pode ser aproximada por um dipolo oscilante, ou seja, duas cargas de sinais contrários, separadas de uma distância d, como mostra a figura, de modo que



$$
\begin{aligned}
q_+(t) &= q_0 cos(\omega t) \\
q_-(t) &= -q_0 cos(\omega t) = q_0 cos(\omega t + \pi)
\end{aligned}
$$

O momento de dipolo, definido como vetor que vai da carga negativa para a positiva, e de módulo $q_0 d$, é dado por

$$\vec{p}(t) = p_0 cos(\omega t)\hat{e}_z$$

A densidade de cargas correspondente as cargas positiva e negativa do dipolo é dada por (lembre-se que $\delta(x)$ tem dimensão de inverso de comprimento)

$$\rho(\vec{r},t) = \left[q_0\, cos(\omega t)\delta(x)\delta(y)\delta\left(z - \frac{d}{2}\right) - q_0\, cos(\omega t)\delta(x)\delta(y)\delta\left(z + \frac{d}{2}\right)\right]$$

Substituindo na expressão para o potencial escalar, temos

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r},t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \quad & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\delta(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{cos\left[\omega\left(t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(z' - \frac{d}{2}\right)\right. \\
& \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\delta(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{cos\left[\omega\left(t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(z' + \frac{d}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

As funções δ impõe que temos que fazer $x' = 0$, $y' = 0$ na expressão de $\vec{r}' = x'\hat{e}_x + y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z$. Por outro lado, fazemos $z' = d/2$ na primeira integral em z' e $z' = -d/2$ na segunda. Então

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left|\vec{r} - \frac{d}{2}\hat{e}_z\right| \equiv r_+,$$

na primeira integral, e

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{e}_z\right| \equiv r_-,$$

na segunda integral, onda as distâncias r_+ e r_- estão indicadas na figura. Então

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{cos[\omega(t-r_+/c)]}{r_+} - \frac{cos[\omega(t-r_-/c)]}{r_-}\right]$$

Considerando os dois triângulos retângulos cujas hipotenusas são r_+ e r_-, mostrados na figura, temos

$$\begin{aligned} r_\pm^2 &= (r\,sen\theta)^2 + \left(r\,cos\theta \mp \frac{d}{2}\right)^2 = r^2\left[1 \mp \frac{d}{r}cos\theta + \frac{d^2}{4}\right] \\ \therefore r_\pm &= r\sqrt{1 \mp \frac{d}{r}cos\theta + \frac{d^2}{4}} \end{aligned}$$

Até aqui, as expressões são exatas e permitem calcular o potencial em qualquer ponto do espaço. Vamos agora fazer as aproximações usuais para dipolos curtos. Primeiro, como no caso do dipolo eletrostático, estamos interessados em obter as expressões dos campos para grandes distâncias, $r \gg d$, ou seja, podemos fazer a aproximação $d/r \ll 1$. Neste caso,

$$\begin{aligned} r_\pm &\approx r\left[1 \mp \frac{d}{r}cos\theta\right]^{1/2} \approx r\left[1 \mp \frac{d}{2r}cos\theta\right] \qquad \left[(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x;\;\; x \ll 1\right] \\ \frac{1}{r_\pm} &\approx r^{-1}\left[1 \mp \frac{d}{r}cos\theta\right]^{-1/2} \approx r\left[1 \mp \frac{d}{2r}cos\theta\right]^{-1} \end{aligned}$$

Além dessa aproximação, podemos considerar uma antena como um <u>dipolo curto</u> se seu comprimento for muito menor que o comprimento de onda, isto é

$$\frac{d}{\lambda} \ll 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{c/f} \ll 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\omega d}{c} \ll 1$$

Finalmente; usualmente estamos interessados nas expressões para o campo eletromagnético da antena a distâncias muito maiores que o comprimento de onda, ou seja,

$$\frac{\lambda}{r} \ll 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{c}{\omega r} \ll 1$$

Estas três condições caracterizam uma antena tipo dipolo curto. Da aproximação para

$r_\pm$, temos

$$\begin{aligned} cos\left[\omega\left(t-\frac{r_\pm}{c}\right)\right] &\approx cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\pm\frac{\omega d}{2c}cos\theta\right] \\ &\approx cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]cos\left[\frac{\omega d}{2c}cos\theta\right]\mp sen\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]sen\left[\frac{\omega d}{2c}cos\theta\right] \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\omega d/c \ll 1$, temos

$$cos\left(\frac{\omega d}{2c}cos\theta\right)\approx 1 \qquad \text{e} \qquad sen\left(\frac{\omega d}{2c}cos\theta\right)\approx\frac{\omega d}{2c}cos\theta$$

e

$$cos\left[\omega\left(t-\frac{r_\pm}{c}\right)\right] \approx cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\mp\frac{\omega d}{2c}cos\theta\, sen\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

Substituindo estas expressão para $cos\,[\omega\,(t-r_\pm/c)]$ e a aproximação para $r_\pm^{-1}$ na expressão para $\phi(\vec{r},t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r},t) &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}\left[cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left[1+\frac{d}{2r}cos\theta\right]-\frac{\omega d}{2c}cos\theta\, sen\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left[1+\frac{d}{2r}cos\theta\right]\right. \\ &\left.-cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left[1-\frac{d}{2r}cos\theta\right]-\frac{\omega d}{2c}cos\theta\, sen\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left[1-\frac{d}{2r}cos\theta\right]\right] \end{aligned}$$

$$\therefore \phi(\vec{r},t)\approx\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\frac{d}{r}cos\theta\, cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{\omega d}{c}cos\theta sen\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right]$$

Termos proporcionais ao produto $(\omega d/2c)(d/r)$, por serem de segunda ordem, podem ser desprezados. A razão entre as amplitudes do primeiro e segundo termos entre colchetes é dada por

$$\frac{d/r}{\omega d/c}=\frac{c}{\omega r}\ll 1$$

como já discutimos. Por outro lado, lembrando que $p_0 = dq_0$, obtemos finalmente a expressão do potencial escalar para um dipolo oscilante

$$\boxed{\phi(\vec{r},t)=\phi(r,\theta,t)=-\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{cos\theta}{r}\right)sen\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}$$

Para calcular o potencial vetor temos que antes encontrar um modelo físico adequado para a fonte de corrente que está fazendo os valores das cargas de em $z = d/2$ e $z = -d/2$ oscilarem em oposição de fase. O modelo mais simples é supor que uma das cargas, por exemplo a negativa, é fixa e que a fonte faz uma corrente fluir ao longo do eixo ao longo do eixo z, entre as duas cargas. Em $t = 0$, por exemplo, existe uma carga positiva em $z = d/2$ e outra negativa em $z = -d/2$. A fonte faz com que a carga positiva flua para $z = -d/2$ até que, em $t = \pi/2\omega$, a carga em $z = -d/2$ se anula completamente. Então a corrente ao longo do eixo z é dada por

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 sen(\omega t)$$

Lembrando que a densidade de corrente é corrente por unidade de área, podemos então modelar $\vec{j}$ como

$$\vec{j}(\vec{r},t) = I\delta(x')\delta(y')\hat{e}_z = -\omega q_0 sen(\omega t)\delta(x')\delta(y')\hat{e}_z$$

Substituindo na expressão para o potencial vetor retardado, temos

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \hat{e}_z}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\delta(x')\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y')dy'\int_{-d/2}^{d/2} dz'\frac{-\omega q_0 sin\left[\omega\left(t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'}|$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \hat{e}_z}{4\pi}\int_{-d/2}^{d/2} dz'\frac{-\omega q_0 sin\left[\omega\left(t - |\vec{r}-z'\hat{e}_z|/c\right)\right]}{|\vec{r}-\vec{z}'\vec{e}_z}|; \qquad \vec{r} = r sen\theta\hat{e}_y + r cos\theta\hat{e}_z$$

A integral em z' é sobre um intervalo de comprimento $d \ll z$, segundo nossa hipótese para dipolo curto; então temos que

$$\begin{aligned} |\vec{r}-z'\hat{e}_z| &= \sqrt{\left[r^2 sen^2\theta + (r\,cos\theta - z')^2\right]} = r\sqrt{\left[1 - 2\frac{z}{r}cos\theta + z'^2\right]} \\ &\approx r\left[1 - \frac{z'}{r}cos\theta\right] \end{aligned}$$

e a primeira correção à distância r é impar no intervalo $-d/2 \leq z \geq d/2$. Portanto, desprezando termos de segunda ordem, podemos considerar o integrando constante, fazendo $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r$, como

$$\omega\left[t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right] = \omega t - \omega\frac{r}{c} + \frac{\omega z'}{c}cos\theta \approx \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + 2\pi\underbrace{\frac{z'}{\lambda}}_{\approx\frac{d}{\lambda}\ll 1}cos\theta \approx \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

temos

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} sen\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{e}_z}$$

É importante notar que os potencias V e $\vec{A}$ só dependem das coordenadas r e θ, num sistema de coordenadas esféricas com o eito polar (eixo z) ao longo do dipolo. A partir das expressões para $V(\vec{r},t)$ e $\vec{A}(\vec{r},t)$ é imediato calcular os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, em coordenadas esféricas.

Exercício: Mostrar que

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{e}_\theta$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{e}_\varphi$$