Tratamento de dados e representação das incertezas em resultados experimentais

Medida, erro e incerteza

Qualquer medida física sempre possui um valor verdadeiro, que é sempre desconhecido e um valor medido. O valor medido deve se aproximar do valor verdadeiro se a medida é realizada corretamente.

Valor medido: é a que que obtemos durante o processo de medição.

Erro: é a diferença entre o valor verdadeiro e o valor medido. Como o valor verdadeiro não é conhecido, o erro também nunca o será. O único que podemos fazer é estimar o erro.

Incerteza: é uma representação da estimativa do erro em uma medição.

Tipos de erros

Os erros podem ser divididos em dois grandes grupos que são os erros sistemáticos e aleatórios

Erros sistemáticos: são aqueles que ocorrem em todas as medidas sempre na mesma direção e possui sempre o mesmo valor. Eles surgem em decorrência de problemas de calibração do instrumento de medida. Podem ser reduzidos se realizarmos as medições com um número grande de instrumentos semelhantes.

Erros aleatórios: são aqueles que surgem em decorrência da não reprodutividade de uma medida. Eles ocorrem em todas as direções e sempre possuem valores diferentes. Podem ser minimizados se um grande número de medidas for realizado.

Erros estatísticos

O erro estatístico ou aleatório tem como propriedade o fato de que, se uma grandeza física for medida n vezes obteremos n resultados diferentes. Decorrente disto, podemos definir as seguintes grandezas:

Valor médio:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Desvio padrão:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}}$$

Desvio padrão da média:

$$\boxed{\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Interpretação física para o desvio padrão e para o desvio padrão da média

Desvio padrão: o desvio padrão σ nos dá informação sobre a dispersão dos dados em torno do valor médio. Portanto, quando o desvio é pequeno significa que os dados são parecidos

Desvio padrão da média: o desvio padrão da média σ_m nos dá informação sobre o valor verdadeiro. Este valor deve estar no interior do intervalo de $\bar{x} \pm \sigma_m$

Caso exista mais de um tipo de erro, o erro total será dado por:

$$\sigma_T = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} {\sigma_i}^2}$$

Neste caso o resultado será expresso da seguinte forma:

$$\bar{x} \pm \sigma_T$$

Algarismos significativos e incerteza sistemática residual

Algarismo significativo: algarismo significativo em um número pode ser entendido como cada algarismo que, individualmente tem um significado quando o número é escrito na forma decimal. Zeros a esquerda não são algarismos significativos.

Como existe uma incerteza associada a cada resultado experimental, isto significa que todo os algarismos a direita de um certo algarismo não são significativos pois a incerteza em cada algarismo diminui a medida que caminhamos para a direita.

Se para um determinado algarismo A a probabilidade de ele ser correto é a mesma que para qualquer número entre 0 e 9, então este algarismo não tem significado.

Incerteza sistemática residual: erros sistemáticos que não possam mais ser reduzidos ou corrigidos no final do experimento são chamados de erros sistemáticos residuais e a incerteza correspondente a este erro é chamada de incerteza sistemática residual.

Obs: as incertezas sistemáticas residuais devem ser tratadas estatisticamente.

Incerteza padrão

Incerteza padrão: o quadrado da incerteza padrão pode ser definido como sendo igual a soma dos quadrados do desvio padrão da média mais o quadrado da incerteza sistemática residual, ou seja:

$$\boxed{{\sigma_p}^2 = {\sigma_m}^2 + {\sigma_r}^2}$$

Incerteza padrão

desvio padrão da média

Incerteza sistemática residual.

Precisão e acurácia

Precisão: Esta palavra está relacionada com os erros estatísticos. Assim sendo um instrumento preciso produz medidas com baixo desvio padrão.

Acurácia: A acurácia ou exatidão refere-se ao erro total que é a soma dos erros estatísticos mais os erros sistemáticos

Estimativa da incerteza sistemática residual

O desvio padrão da média está relacionados com os erros estatísticos e pode ser determinado pelas fórmulas acima. Por outro lado, os erros sistemáticos residuais são bem mais difíceis de serem determinados e não existe nenhum método padrão bem conhecido e aceito por todos para determina-los.

Um procedimento usado para determinar as incertezas sistemáticas residuais é determinar o nível máximo admissível para o erro, isto é estimar um limite para o erro com confiaça de 95%. Este limite, em alguns casos, é considerado como sendo igual a menor divisão da escala do instrumento de medida. Portanto podemos escrever que:

$$\boxed{\sigma_r = \frac{L_r}{2}}$$

Onde L_r é o limite do erro

Exemplo de aplicação

Medições do período de um pêndulo com um cronômetro digital: O tempo para 10 oscilações de um pêndulo foi medido 8 vezes usando um cronômetro digital. Os resultados da medição estão na tabela abaixo:

n	Δt_i (s)	T_i (s)
1	32,75	3,275
2	32,40	3,240
3	29,82	2,982
4	30,22	3,022
5	31,57	3,157
6	31,59	3,159
7	30,02	3,002
8	31,95	3,195

Valor médio

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{25,032}{8}$$

$$\boxed{\bar{T} = 3,1290s}$$

Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{T} - T_i)^2}$$

$$\boxed{\sigma = 0,113s}$$

Desvio da média

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,113}{\sqrt{8}} = 0,040s$$

Exemplo de aplicação (continuação)

Neste tipo de experimento um possível erro sistemático que pode ocorrer é do tipo observacional, por exemplo se o observador dispara o cronômetro sempre atrasado. Como o tempo de reação humana é da ordem de 0,1s pode existir um erro sistemático desta ordem. Considerando que podem existir erros tanto no acionamento quanto na parada do cronômetro podemos admitir que um limite total para o errro sendo de 0,5s para 10 oscilações. Assim o período vale:

$$L_r = \frac{0,5}{10} = 0,05s \qquad \sigma_r = \frac{L_r}{2} = 0,025s$$

Incerteza padrão $\sigma_p = \sqrt{{\sigma_m}^2 + {\sigma_r}^2} = 0,047s$

Resultado final $T = 3,129 \pm 0,047s$

ou

$$T = 3,13 \pm 0,05s$$

Exemplo de aplicação

Medições da força eletromotriz de uma pilha: A força eletromotriz de uma pilha foi medida 6 vezes com um voltímetro digital cuja acurácia na escala utilizada é melhor que 0,5% conforme indicado pelo fabricante. Os resultados da medição estão na tabela abaixo:

n	V_i (V)
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Valor médio

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i = 1,5763V$$

Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{V} - V_i)^2} = 0,0066V$$

Desvio da média

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,0027V$$

Exemplo de aplicação (continuação)

Como podem existir erros sistemáticos de até **0,5%** no valor médio, isto implica que:

$$L_r = \frac{0,5}{100}.1,5763 = 0,0080V$$

$$\sigma_r = \frac{L_r}{2} = 0,0040V$$

Incerteza padrão $\sigma_p = \sqrt{{\sigma_m}^2 + {\sigma_r}^2} = 0,0048V$

Resultado final $V = 1,5763 \pm 0,0048V$

$$V = 1,576 \pm 0,005V$$

Número de algarismos significativo na incerteza padrão

Não existe uma regra bem clara para a quantidade de algarismos para indicar a incerteza padrão. A tendência atual é indicar a incerteza padrão com dois algarismos além dos zeros a esquerda. Porém muitos físicos utilizam 1 ou 2 conforme o caso. A regra é então:

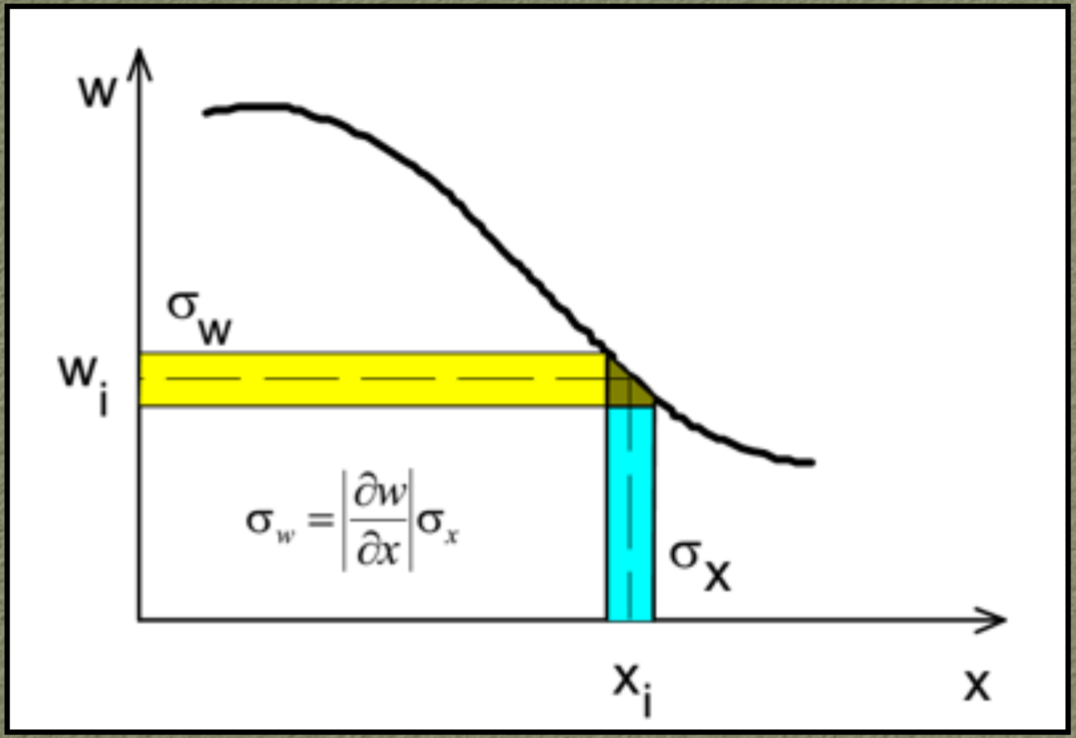
a) a incerteza padrão deve ser escrita com dois algarismos se o número começa com 1 ou 2;

b) a incerteza pode ser escrita com 1 algarismo se o número começa com 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9;

c) a incerteza pode sempre ser escrita com 2 algarismos

Propagação de incertezas de grandezas não correlacionadas

Dada uma função $w = w(x, y, z)$ onde x,y,z são grandezas experimentais que possuem incertezas, independentes entre si $\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z$. Pergunta-se qual é o valor de σ_w



$$\boxed{\sigma_w{}^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x{}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y{}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z{}^2}$$