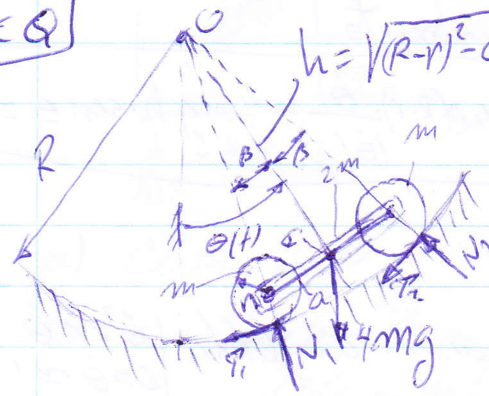
2ª Prova PME 2352 — 24/10/2014

1ª Q)



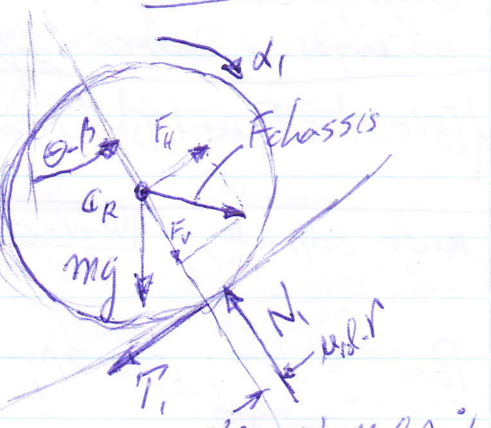
$h = \sqrt{(R-r)^2 - a^2}$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{a}{R-r}$

$\cos\beta = \frac{h}{R-r}$

$\dot{\alpha}_1 r = \dot{\theta}(R-r)$

$\ddot{\alpha}_1 r = \ddot{\theta}(R-r)$

$\dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_1 = \dot{\theta}(R-r)$



$$TMA\big|_{G_R} \rightarrow T_1 \cdot r = \frac{mr^2}{2}\ddot{\alpha}_1 - N_1 \cdot \mu_{rol} \cdot r \cdot \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$$

a) Equacionando via energia

$$E_{cin} = 2\cdot\frac{m}{2}(h\cdot\dot{\theta})^2 + \frac{J_c}{2}\dot{\theta}^2 + 2\frac{m}{2}\left[(R-r)\dot{\theta}\right]^2 + 2\left(\frac{mr^2}{2}\right)\frac{\dot{\alpha}^2}{2} =$$

$$= \left\{m\left[(R-r)^2 - a^2\right] + \frac{J_c}{2} + m\cdot\left[(R-r)^2 + \frac{(R-r)^2}{2}\right]\right\}\cdot\dot{\theta}^2 = \left\{m\left[\frac{5}{2}(R-r)^2 - a^2\right] + \frac{J_c}{2}\right\}\cdot\dot{\theta}^2$$

$E_{pot} = 4\cdot m\cdot g(1-\cos\theta)\cdot h$ variação da cota do centro de massa do conjunto.

$$\frac{d}{dt}(E_{cin} + E_{pot}) = -Pot_{dissip}$$

$$d\tau_{dissip} = N_1\cdot\mu_{rol}\cdot r\cdot d\alpha_1\cdot\frac{\dot{\alpha}_1}{|\dot{\alpha}_1|} + N_2\mu_{rol}\cdot r\cdot d\alpha_2\cdot\frac{\dot{\alpha}_2}{|\dot{\alpha}_2|} = (N_1+N_2)\cdot\mu_{rol}(R-r)d\theta\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$$

$$Pot_{dissip} = (N_1+N_2)\cdot\mu_{rol}\cdot(R-r)\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\cdot\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(E_{cin}+E_{pot}) = \left\{m\left[\frac{5}{2}(R-r)^2 - a^2\right] + \frac{J_c}{2}\right\}\cdot 2\cdot\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + 4mg\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot h\cdot\dot{\theta} = -(N_1+N_2)\mu_{rol}(R-r)\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\cdot\dot{\theta}$$

ou para ser satisfeita mesmo quando $\dot{\theta} \neq 0$

$$\boxed{\left\{\left[5(R-r)^2 - 2a^2\right]\cdot m + J_c\right\}\ddot{\theta} + (N_1+N_2)\cdot\mu_{rol}\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}(R-r) + 4mgh\operatorname{sen}\theta = 0}$$

Resta calcular N_1+N_2. Para tanto isolamos o sistema todo e aplicamos TMB. Ignorando o μ_{rol} num primeiro momento podemos escrever para o cálculo da normal

$$\begin{cases} T_1 r = \frac{mr^2}{2}\ddot{\alpha}_1 = \frac{mr(R-r)\ddot{\theta}}{2} \\ T_2 r = \frac{mr^2}{2}\ddot{\alpha}_2 = \frac{mr(R-r)\ddot{\theta}}{2} \end{cases}$$

TMB na direção (C-O) (normal) $\Rightarrow N_1\cos\beta + N_2\cos\beta - T_1\operatorname{sen}\beta + T_2\operatorname{sen}\beta - 4mg\cos\theta = 4mh\cdot\dot{\theta}^2$

TMB na direção tangencial $\Rightarrow 4mh\ddot{\theta} = -T_1\cos\beta - T_2\cos\beta - 4mg\operatorname{sen}\theta + N_1\operatorname{sen}\beta - N_2\operatorname{sen}\beta$

$\therefore (N_1+N_2)\cos\beta = 4mg\cos\theta + 4mh\dot{\theta}^2$ pois $T_1 \simeq T_2$ exceto por $(N_1-N_2)\mu_{rol}\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$

Desprezando as diferenças entre T_1 e T_2 ou p/ $\mu_d \ell (N_1 - N_2)\cdot sen\beta << 4mg\cos\theta$ obtemos a equação diferencial do movimento

(a) $$\boxed{\left\{[5(R-r)^2 - 2a^2]\cdot m + J_c\right\}\ddot{\theta} + 4m\left[g\frac{\cos\theta}{\cos\beta} + (R-r)\cdot\dot{\theta}^2\right]\cdot\mu_d \ell (R-r)\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mg\,h\cdot sen\,\theta = 0}$$

sendo $\cos\beta = \frac{h}{R-r} = \frac{\sqrt{(R-r)^2 - a^2}}{R-r} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R-r}\right)^2}$

b) Para $R = 5r$; $a = 2r$; $J_c = \frac{2ma^2}{3}$ e pequenas amplitudes $\begin{cases}\dot{\theta}^2 << \dot{\theta} \\ \cos\theta \simeq 1 \\ sen\,\theta \simeq \theta\end{cases}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left\{[5\cdot 16 - 8]\cdot mr^2 + \frac{8mr^2}{3}\right\}\cdot\ddot{\theta} + 16\,mrg\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\mu_d\ell\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 16\,mgr\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{224}{3}\cdot r\ddot{\theta} + \frac{32\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot g\cdot\mu_d\ell\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 8\cdot\sqrt{3}\cdot g\cdot\theta = 0}$$

$\boxed{m_{eq}\ddot{x} + F_{at}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + k_{eq}x = 0}$ atrito seco

c) solução $\omega = \sqrt{\frac{8\cdot 3\cdot\sqrt{3}\,g}{224\cdot r}} = 0{,}431\sqrt{\frac{g}{r}}$; Para $g = 10\,m/s^2$, $r = 0{,}2\,m$ $\boxed{\omega = 3{,}05\,rad/s}$

$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2{,}06\,s$ e $\therefore \boxed{\frac{T}{2} = 1{,}03\,s}$

Partindo de $\theta_0 = 0{,}15$ rad, o movimento começará com $\dot{\theta} < 0$

$$224\,r\ddot{\theta} + 24\cdot\sqrt{3}\cdot g\,\theta = 32\sqrt{3}\cdot\mu_d\ell\cdot g$$

$\theta_h(t) = A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$\theta_p(t) = \frac{32\sqrt{3}\cdot\mu_d\ell\cdot g}{24\cdot\sqrt{3}\cdot g} = \frac{1}{75} = \frac{F_{at}}{k_{eq}}$

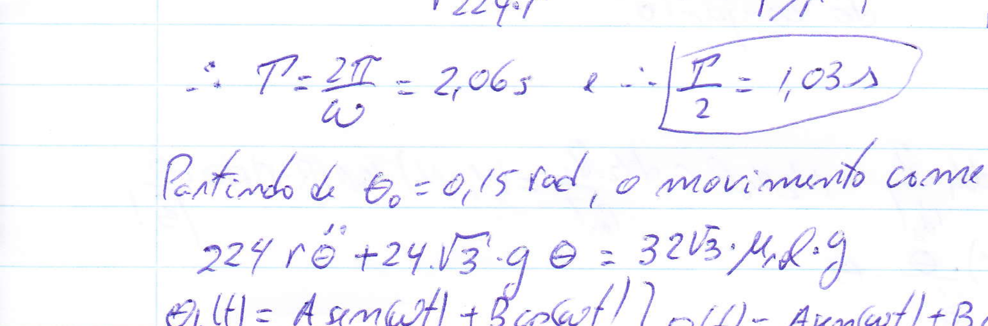
$\theta(t) = A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{1}{75}$

$\dot{\theta}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\,sen(\omega t)$

Condições iniciais $\begin{cases}\theta(0) = 0{,}15\text{ rad} = B + \frac{1}{75} \therefore \boxed{B = 0{,}15 - \frac{1}{75} = 0{,}1367} \\ \dot{\theta}(0) = 0 = A\omega \therefore \boxed{A = 0}\end{cases}$

No 1º ½ ciclo $\theta(t) = \frac{1}{75} + 0{,}1367\cos(\omega t)$ $\quad 0 \leq \omega t \leq \pi$

$\theta\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -0{,}1367 + \frac{1}{75} = -0{,}1233$ ∴ Perda de amplitude em meio ciclo $\Delta\theta_{1/2} = \frac{2}{75} = 0{,}02667$ rad



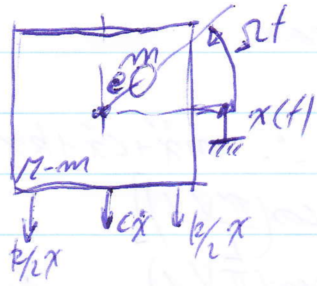
Número de ½ ciclos

$n_{1/2} = \frac{\theta_0}{\Delta\theta_{1/2}} = 5{,}6$ ∴

$n_{1/2} = 6$ meios ciclos

d) Tempo até parar $\boxed{\Delta t = (n_{1/2})\left(\frac{T}{2}\right) = 6{,}18\,s}$

2ª Q)



b)
$$(M-m)\cdot\ddot{x}+m\left[\overset{\cdot\cdot}{\overline{e\,sen(\Omega t)+x}}\right]=-c\dot{x}-kx$$
$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\Omega^2 sen(\Omega t)$$
$$\omega=\sqrt{k/M}\ ;\ \xi=\frac{c}{2\sqrt{k\cdot M}}$$

a) Classe ISO G 1,0 $\therefore e_{adj}\,\omega_{op}\le 1\,mm/s \therefore e_{adj}=\frac{1}{2\pi\cdot\frac{30000}{60}}=\underline{0{,}3\times10^{-3}mm}$

após a quebra da pá

ISO G 6,3 $\therefore e=\frac{6{,}3}{2\pi\cdot\frac{30000}{60}}=2\times10^{-3}mm$ (a) $\therefore \boxed{U=me=400g\cdot mm}$

b) Após a quebra da pá a equação fica

$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\underbrace{(me)}_{U}\Omega^2\cdot sen(\Omega t)$ com $\begin{cases} M=400kg\ ;\ k=40\times10^6 N/m\ ;\ U=400g\,mm \\ \Omega=\frac{2\pi\cdot30000}{60}=3142\,rad/s\ ;\ c=0{,}01\cdot2\sqrt{k\cdot M}= \\ =c=17{,}9\times10^3\,Ns/m\ ;\ \omega=316\,rad/s \end{cases}$

c) Solução da equação diferencial p/ $t\ge0$ (instante 0 é o da quebra da pá)

$x_h(t)=\left[A\,sen(\omega_d t)+B\cos(\omega_d t)\right]\cdot e^{-\xi\omega t}$ com $\begin{cases}\xi=0{,}01\\ \omega_d=\omega\cdot\sqrt{1-\xi^2}\simeq 316\,rad/s\end{cases}$

$x_p(t)=\frac{U\cdot\Omega^2}{k}\cdot\frac{sen(\Omega t-\psi)}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$ onde $r=\frac{\Omega}{\omega}$ e $tg\psi=\frac{2\xi r}{1-r^2}\therefore\begin{cases}r\simeq10\\ \xi=0{,}01\\ \psi\simeq179{,}9°\end{cases}$

Condições iniciais

p/ $t=0$ $\begin{cases}x(0)=0 & \text{(admitindo que a excentricidade inicial era desprezível)}\\ \dot{x}(0)=0 & \text{(" " a velocidade inicial era desprezível)}\end{cases}$

$$x(t)=\left[A\,sen(\omega_d t)+B\cos(\omega_d t)\right]\cdot e^{-\xi\omega t}+\frac{U\cdot\Omega^2}{k}\cdot\frac{sen(\Omega t-\psi)}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$\dot{x}(t)=\left[A\omega_d\cos(\omega_d t)-B\omega_d\,sen(\omega_d t)\right]e^{-\xi\omega t}-\xi\omega\cdot\left[A\,sen(\omega_d t)+B\cos(\omega_d t)\right]\cdot e^{-\xi\omega t}+\frac{U\Omega^3}{k}\cdot\frac{\cos(\Omega t-\psi)}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

d) Como $r\simeq10$ e $\xi=0{,}01$ $\psi\simeq180°$

$$x(t)=A\,sen(\omega t)+B\cos(\omega t)-\frac{U\cdot\Omega^2}{k}\cdot\frac{sen(\Omega t)}{(r^2-1)}$$
$$\dot{x}(t)=A\omega\cos(\omega t)-B\omega\,sen(\omega t)-\frac{U\Omega^3}{k}\cdot\frac{\cos(\Omega t)}{(r^2-1)}$$

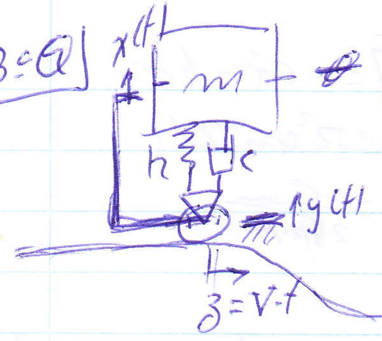
$x(0)=0=B\ \therefore B=0$

$\dot{x}(0)=0=A\omega-\frac{U\Omega^3}{k\cdot(r^2-1)}\ \therefore \boxed{A=\frac{U\cdot\Omega^2}{k}\cdot\frac{r}{r^2-1}}$

$x(t)\simeq\frac{U\Omega^2}{k(r^2-1)}\cdot\left[r\cdot sen(\omega t)-sen(\Omega t)\right]$ como $\Omega\simeq10\omega$ o máximo é

$$\boxed{X_{max}}=\frac{U\Omega^2}{k(r^2-1)}\cdot\left[r+1\right]=\frac{0{,}4\times10^{-3}\cdot3142^2}{40\times10^6\cdot(100-1)}\cdot(11)=11\times10^{-6}m=\boxed{11\mu m}$$

3ª Q)



$x(t)$ é a abertura da suspensão.

$$m\cdot(\ddot{x}+\ddot{y}) = -kx - c\dot{x} \therefore m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = -m\ddot{y}$$

sendo $y(t) = -\frac{h}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi V}{L}t\right)\right]$

$$\dot{y}(t) = -\frac{h}{2L}\cdot\pi\cdot V\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi V}{L}t\right) \qquad \omega_f = \frac{\pi V}{L}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{h}{2}\left(\frac{\pi V}{L}\right)^2\cdot\cos\left(\frac{\pi V}{L}t\right)$$

(a) $$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = \frac{mh}{2}\cdot\omega_f^2\cos(\omega_f t)} \qquad p/\ 0 \le \omega_f t \le \pi$$

(b) Solução da homogênea: $x_h(t) = \left[A\,\mathrm{sen}(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)\right]e^{-\zeta\omega t}$ $p/\ \zeta<1$ com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, $\omega_d = \omega\cdot\sqrt{1-\zeta^2}$

solução particular: $x_p(t) = X_p\cdot\cos(\omega_f t - \psi)$ com

$$X_p = \frac{\frac{mh\omega_f^2}{2k}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} ;\quad \mathrm{tg}\,\psi = \frac{2\zeta r}{1-r^2} ;\quad r = \frac{\omega_f}{\omega}$$

$$\dot{x}(t) = \left[A\omega_d\cos(\omega_d t) - B\omega_d\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right]e^{-\zeta\omega t} - \zeta\omega\cdot\left[A\,\mathrm{sen}(\omega_d t)+B\cos(\omega_d t)\right]e^{-\zeta\omega t} +$$
$$- X_p\cdot\omega_f\,\mathrm{sen}(\omega_f t-\psi)$$

Condições Iniciais
$$x(0) = 0 = B + X_p\cos\psi \therefore \boxed{B = -X_p\cdot\frac{1-r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$
$$\dot{x}(0) = 0 = A\cdot\omega_d - \zeta\omega\cdot B + X_p\,\omega_f\,\mathrm{sen}\,\psi \therefore \boxed{A = \frac{\zeta\omega}{\omega_d}B - X_p\cdot\frac{\omega_f\,\mathrm{sen}\,\psi}{\omega_d}}$$

$$\boxed{B = -\frac{h}{2}\cdot\frac{r^2\cdot(1-r^2)}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} ;\quad A = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{r^2(1-r^2)}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2} - \frac{\frac{h}{2}\cdot r^2\cdot\omega_f}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\cdot\frac{2\zeta r}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\cdot\frac{1}{\omega\cdot\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\boxed{A = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{r^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\left(1+r^2+\cancel{2}\right)} \qquad \boxed{x(t) = \left[A\,\mathrm{sen}(\omega_d t)+B\cos(\omega_d t)\right]e^{-\zeta\omega t} + \frac{\frac{h}{2}\cdot r^2\cos(\omega_f t-\psi)}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$

c) Se o carro estiver com velocidade grande, supomos que o chassi se mantenha em seu movimento e que a roda perca contato. Neste caso:

$-kx(t) - c\dot{x}(t) + mg = 0$ onde mg é a carga estática devido ao peso do carro.

Se a rampa for vista como um degrau pelo carro, o amortecedor limita a velocidade de descida da suspensão:

$$c\cdot\dot{x}_{max}(t) = mg = \zeta\cdot 2\cdot\sqrt{km}\cdot\dot{x}_{max}(t) = mg \therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{km}\cdot\sqrt{\frac{m}{m}} = \sqrt{2}\,\omega\cdot m\cdot\dot{x}_{max} = mg$$

$$\dot{x}_{max} = \frac{g}{\sqrt{2}\cdot\omega} = \frac{10}{\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot 1{,}5} = 0{,}75\,m/s$$

$$\dot{y}_{max}(t) = \frac{h}{2}\cdot\frac{\pi V}{L} = \frac{0{,}05\cdot\pi\cdot V}{1} = 0{,}75 \therefore \boxed{V = 4{,}8\,m/s}$$

A velocidade deve ser maior do que essa, pois o carro também desce (mas se mantém em movimento retilíneo uniforme).

A solução exata neste caso fornece $V_{max} = 6{,}5\,m/s$

Discussões adicionais sobre a Q_1 para os muito interessados em Dinâmica.

Outras maneiras de resolver a Q_1

Isolando o sistema todo e aplicando o TMB tínhamos obtido

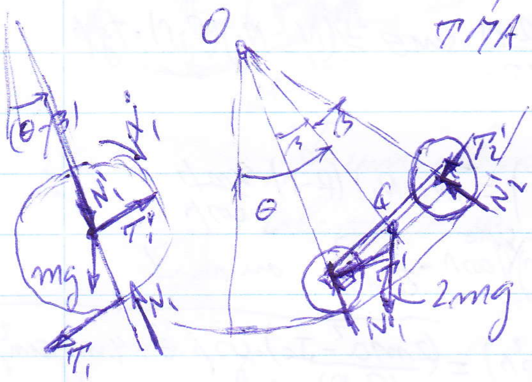
na direção radial $\left\{ N_1 \cos\beta + N_2 \cos\beta - T_1 \operatorname{sen}\beta + T_2 \operatorname{sen}\beta - 4mg\cos\theta = 4mh\dot{\theta}^2 \right\}$ (I)

na " tangencial $\left\{ 4mh\ddot{\theta} = -T_1\cos\beta - T_2\cos\beta - 4mg\operatorname{sen}\theta + N_1\operatorname{sen}\beta - N_2\operatorname{sen}\beta \right\}$ (II)

Isolando as rodas tínhamos obtido

$$\left\{ \begin{aligned} T_1 &= (R-r)\cdot\frac{m}{2}\cdot\ddot{\theta} + \mu_{rol}\cdot N_1 \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \\ T_2 &= (R-r)\cdot\frac{m}{2}\ddot{\theta} + \mu_{rol}\cdot N_2\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

Desprezando o efeito da resistência ao rolamento no valor das normais $(N_1 + N_2)$ havíamos resolvido o problema. Vamos tentar explicitar a diferença entre N_1 e N_2. Para tanto, isolemos o chassi do carro e apliquemos o TMA em relação a O



$$(J_C + 2mh^2)\ddot{\theta} = -T_1'\cdot(R-r) - T_2'\cdot(R-r) - 2mgh\operatorname{sen}\theta \quad \text{(IV)}$$

Pelo equilíbrio dinâmico das rodas, obtemos

$$\left. \begin{aligned} N_1' &= N_1 - mg\cdot\cos(\theta-\beta) - m\cdot(R-r)\cdot\dot{\theta}^2 \\ N_2' &= N_2 - mg\cos(\theta+\beta) - m(R-r)\cdot\dot{\theta}^2 \\ T_1' &= T_1 + mg\operatorname{sen}(\theta-\beta) + m(R-r)\cdot\ddot{\theta} \\ T_2' &= T_2 + mg\operatorname{sen}(\theta+\beta) + m(R-r)\cdot\ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \text{(V)}$$

Substituindo T_1 e T_2 (equações III) obtemos:

$$\left. \begin{aligned} T_1' &= \frac{3}{2}m(R-r)\ddot{\theta} + mg\operatorname{sen}(\theta-\beta) + \mu_{rol}\cdot N_1\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \\ T_2' &= \frac{3}{2}m(R-r)\ddot{\theta} + mg\operatorname{sen}(\theta+\beta) + \mu_{rol}\cdot N_2\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \end{aligned} \right\} \text{(VI)}$$

substituindo em IV obtemos: $(J_C + 2mh^2)\ddot{\theta} = -3m(R-r)^2\ddot{\theta} - mg(R-r)\left(\operatorname{sen}(\theta-\beta) + \operatorname{sen}(\theta+\beta)\right) +$

$$-\mu_{rol}\cdot(N_1+N_2)\cdot(R-r)\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} - 2mgh\operatorname{sen}\theta$$

$$\left\{J_C + 2m\left[(R-r)^2 - a^2\right] + 3m(R-r)^2\right\}\cdot\ddot{\theta} + \mu_{rol}\cdot(N_1+N_2)\cdot(R-r)\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + mg\cdot(R-r)\left[2\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\beta\right] + 2mgh\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\boxed{\left[J_C + 5m(R-r)^2 - 2ma^2\right]\ddot{\theta} + \mu_{rol}\cdot(N_1+N_2)\cdot(R-r)\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mgh\operatorname{sen}\theta = 0} \quad \text{(VII)}$$

que é a mesma equação que havíamos obtido via energia.

Para determinar $(N_1 + N_2)$ retomemos a equação (I)

$$(N_1+N_2)\cos\beta - (T_1 - T_2)\operatorname{sen}\beta - 4mg\cos\theta = 4mh\dot{\theta}^2 \qquad \text{substituindo } T_1 \text{ e } T_2$$

$$(N_1+N_2)\cos\beta = \mu_{rol}\cdot(N_1-N_2)\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mg\cos\theta + 4mh\dot{\theta}^2 \quad \text{(VIII)}$$

Observando que o termo em $(N_1 - N_2)\cdot\mu_{rol}$ é pequeno face a $4mg\cos\theta$ o desprezamos e resolvemos o problema.

Vamos tentar agora calcular $(N_1 - N_2)$

Considerando o chassis isolado na figura e aplicando o TMB na direção tangencial obtemos:

$$2mh\ddot{\theta} = (N_1 - N_2)\cdot \operatorname{sen}\beta - (T_1' + T_2')\cdot \cos\beta - 2mg \operatorname{sen}\theta$$

substituindo N_1 e N_2 das equações (V) e T_1' e T_2' das equações $(\boxed{VI})$ obtemos:

$$2mh\ddot{\theta} = (N_1 - N_2)\operatorname{sen}\beta - mg(\cos(\theta-\beta) - \cos(\theta+\beta))\cdot\operatorname{sen}\beta - \Big[3\,m(R-r)\ddot{\theta} + $$
$$+ mg(\operatorname{sen}(\theta-\beta) + \operatorname{sen}(\theta+\beta)) + \mu_{rol}(N_1+N_2)\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\Big]\cdot\cos\beta - 2mg\operatorname{sen}\theta$$

$$2mh\ddot{\theta} = (N_1 - N_2)\operatorname{sen}\beta - 2mg\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}^2\beta - 3mh\ddot{\theta} - 2mg\operatorname{sen}\theta\cos^2\beta + \mu_{rol}(N_1+N_2)\cdot\cos\beta\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} +$$
$$- 2mg\operatorname{sen}\theta$$

$$5mh\ddot{\theta} + \mu_{rol}(N_1+N_2)\cdot\cos\beta\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mg\operatorname{sen}\theta = (N_1 - N_2)\operatorname{sen}\beta$$

dividindo por h e multiplicando por $(R-r)^2$ obtemos

$$5m(R-r)^2\cdot\ddot{\theta} + \mu_{rol}\cdot(N_1+N_2)(R-r)\cdot\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mg\frac{(R-r)}{\cos\beta}\cdot\operatorname{sen}\theta = (N_1 - N_2)\cdot(R-r)\cdot\operatorname{tg}\beta$$

Subtraindo da equação $\underline{VII}$ obtemos:

$$(J_c - 2ma^2)\cdot\ddot{\theta} + 4mg(R-r)\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\left(\cos\beta - \frac{1}{\cos\beta}\right) = -(N_1 - N_2)(R-r)\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$$ e i.e.

$$(N_1 - N_2)\operatorname{sen}\beta = \frac{-\cos\beta}{R-r}\cdot\left[(J_c - 2ma^2)\ddot{\theta} + 4mg(R-r)\operatorname{sen}\theta\left(\cos\beta - \frac{1}{\cos\beta}\right)\right]$$ ou ainda

$$\boxed{(N_1 - N_2)\operatorname{sen}\beta = \frac{2ma^2 - J_c}{(R-r)}\cdot\cos\beta\cdot\ddot{\theta} + 4mg\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\beta) = \frac{(2ma^2 - J_c)}{(R-r)}\cdot\cos\beta\cdot\ddot{\theta} + 4mg\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}\theta} \quad (\boxed{IX})$$

que pode ser substituída na equação $(\boxed{VIII})$ para calcular com maior precisão o termo em (N_1+N_2) e portanto o efeito da resistência ao rolamento.

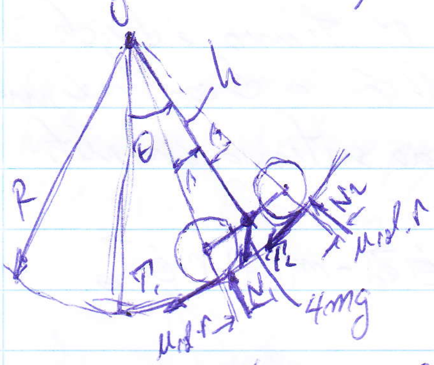
Do ponto de vista prático, é melhor resolver a equação

$$\boxed{\{m[5(R-r)^2 - 2a^2] + J_c\}\ddot{\theta} + \left(\frac{4mg\cos\theta + 4mh\dot{\theta}^2}{\cos\beta}\right)\cdot\mu_{rol}\cdot(R-r)\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mg(R-r)\cos\beta\operatorname{sen}\theta = 0}$$

e conhecido $\theta(t)$ em 1ª aproximação substituí-lo em $(\boxed{IX})$ para estimar $(N_1 - N_2)\operatorname{sen}\beta$, que substituído em $(\boxed{VIII})$ permitiria corrigir pequenas alterações em (N_1+N_2) e portanto na equação do movimento $(\boxed{VII})$.

Outro aspecto que merece discussão nesse mesmo problema, ao abordarmos o sistema como um todo, é se podemos aplicar o TMA em relação ao polo O.

Certamente podemos, desde que consideremos o momento da quantidade de movimento absoluto de cada elemento de massa do sistema. Uma vez que os cilindros apresentam movimento sincronizado ao do movimento do carro, é possível que se obtenha algo interessante.

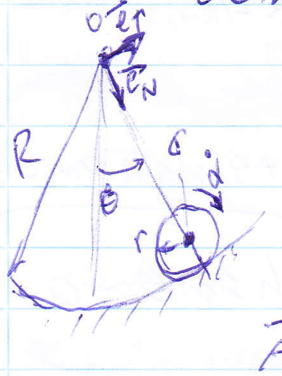


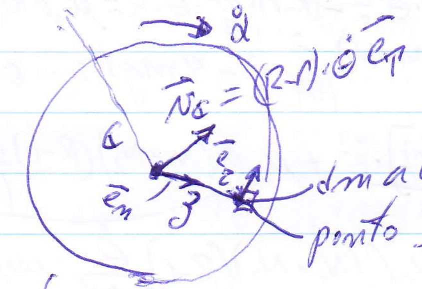
Neste caso

$$\frac{d}{dt}(\vec{H_O}) = \frac{d}{dt}(H_O)\vec{e_\Theta} = \left\{-T_1 R - T_2 R + \mu_{rol} \cdot r(N_1+N_2)\cdot\frac{\dot{\Theta}}{|\dot{\Theta}|} - 4mgh\,\mathrm{sen}\,\Theta\right\}\vec{e_\Theta} \quad (X)$$

e a equação se tornaria bastante simples.

Vamos então equacionar o momento angular de um cilindro que rola sem escorregar sobre uma superfície cilíndrica de centro O, em relação a um eixo por O.





versores $\vec{e_N}$ na direção $(C-O)$
$\vec{e_n}$ ″ ″ $(P-C)$
$\vec{e_T}$ e $\vec{e_\tau}$ ortogonais respectivamente.

dm a uma distância z do centro

ponto P genérico

$$\vec{H_O} = \int_{corpo} (P-O) \wedge \vec{v}\, dm \quad \text{onde } (P-O) = (R-r)\vec{e_N} + z\,\vec{e_n}$$

$$\text{e } \vec{v} = \vec{v_C} - z\cdot\dot{\alpha}\,\vec{e_\tau}$$

Chamando de φ o ângulo que mede a variação de direção de $\vec{e_n}$ e lembrando que $dm = \frac{m}{\pi r^2}\cdot z\cdot d\varphi\cdot dz$ (massa distribuída uniformemente), obtemos:

$$\vec{H_O} = \int_0^r\int_0^{2\pi}\left\{[(R-r)\vec{e_N} + z\,\vec{e_n}] \wedge [(R-r)\dot{\theta}\,\vec{e_T} - z\cdot\dot{\alpha}\,\vec{e_\tau}]\cdot\frac{m}{\pi r^2}\cdot z\cdot d\varphi\cdot dz\right\} \quad \text{mas } \dot{\alpha}\cdot r = \dot{\theta}(R-r)$$

$$\vec{H_O} = \frac{m}{\pi r^2}\cdot(R-r)\cdot\dot{\Theta}\cdot\int_0^r\int_0^{2\pi}\left[(R-r)\vec{e_N}\wedge\vec{e_T} - \frac{(R-r)\cdot z}{r}\cdot\vec{e_N}\wedge\vec{e_\tau} + z\cdot\vec{e_n}\wedge\vec{e_T} - \frac{z^2}{r}\cdot\vec{e_n}\wedge\vec{e_\tau}\right]\cdot z\, d\varphi\cdot dz$$

Mas $\vec{e_N}\wedge\vec{e_T} = \vec{e_\Theta} = \vec{e_n}\wedge\vec{e_\tau}$ e lembrando que por simetria para cada elemento de massa em uma posição $z\cdot\vec{e_n}$ existe outro em $-z\,\vec{e_n}$ e analogamente para $\vec{e_\tau}$, as integrais cruzadas se anulam, sobrando somente:

$$\vec{H_0} = \frac{m}{\pi r^2} \cdot (R-r)\dot{\theta} \cdot \left\{ \left[\int_0^r \int_0^{2\pi} (R-r) \cdot z \, d\varphi \cdot dz \right] \vec{e_\theta} - \left[\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{z^3}{r} \cdot d\varphi \cdot dz \right] \vec{e_\theta} \right\} =$$

$$= \frac{m}{\pi r^2} (R-r)\dot{\theta} \left[(R-r) \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \vec{e_\theta} - \frac{2\pi \cdot r^4}{4r} \vec{e_\theta} \right] = \boxed{m(R-r)^2 \dot{\theta} \vec{e_\theta} - \frac{m(R-r)}{2} \cdot r \cdot \dot{\theta} \vec{e_\theta} = \vec{H_0}}$$

O 1º termo é simplesmente o momento de quantidade de movimento do centro de massa, com toda a massa nele concentrada e o segundo se lembrarmos que $(R-r)\dot{\theta} = r\dot{\alpha}$ representa o momento de quantidade de movimento em torno do centro de massa, com o respectivo momento de inércia do cilindro. O sinal negativo do 2º termo é devido à direção oposta de rotação do cilindro em relação à do centro de massa.

Aplicando o conhecimento adquirido ao sistema completo podemos escrever:

$$\vec{H_0} = \underbrace{\left[J_c + 2mh^2 \right]}_{\text{sólido girando em torno de } O} \cdot \dot{\theta} \vec{e_\theta} + 2 \cdot m(R-r)^2 \dot{\theta} \vec{e_\theta} - m(R-r) \cdot r \cdot \dot{\theta} \vec{e_\theta}$$

ou seja, tomando a equação (X) e contando os $\vec{e_\theta}$ e substituindo em (III)

$$\left[J_c + 2mh^2 + 2m(R-r)^2 - m(R-r) \cdot r \right] \cdot \ddot{\theta} = -(R-r) \cdot \frac{m}{2} \cdot \ddot{\theta} \cdot R - \mu_{rol} \cdot N_1 \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \cdot R - (R-r)\frac{m}{2} \cdot \ddot{\theta} R +$$
$$- \mu_{rol} \cdot N_2 \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} R + \mu_{rol} \cdot (N_1 + N_2) \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \cdot r - 4mgh \operatorname{sen} \theta$$

$$\left[J_c + 2mh^2 + 2m(R-r)^2 + m(R-r)(R-r) \right] \cdot \ddot{\theta} + \mu_{rol} (N_1 + N_2)(R-r) \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mgh \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$\boxed{\left[J_c + 5m(R-r)^2 - 2ma^2 \right] \cdot \ddot{\theta} + \mu_{rol} \cdot (N_1 + N_2)(R-r) \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + 4mgh \operatorname{sen} \theta = 0}$$

que é exatamente a equação obtida via energia ou isolando partes do sistema.