

Eletrromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 30

Solução da Equação de Onda para os Potenciais $\vec{A}$ e ϕ

Na aula passada vimos que quando os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são expressos em termos dos potenciais escalar, ϕ , e vetor $\vec{A}$, isto é,

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

estes satisfazem as seguintes equações.

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

Mostramos que os potenciais podem ser transformados, utilizando as transformações de calibre

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda; \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad \lambda(\vec{r}, t): \text{função escalar}$$

que preservam os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Finalmente vimos que uma escolha útil é o chamado calibre de Lorentz,

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

que transforma as equações para ϕ e $\vec{A}$ em equações de onda do mesmo tipo, com fontes, isto é,

$$\boxed{\nabla^2\phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}}$$

Equação de Onda para Fontes Variáveis do Tempo: Equação de Helmholtz

De fato, a equação para $\vec{A}$ se divide em três equações para suas componentes, que em coordenadas cartesianas são

$$\nabla^2 A_i - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = -\mu_0 j_i; \quad i = x, y, z$$

ou seja, o mesmo tipo de equação para ϕ

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Portanto, basta encontrar a solução para uma delas e substituir o termo de fonte apropriado (ρ ou j_i) para as soluções das outras. Vamos fazer isso para a equação para ϕ , como exemplo.

No caso geral, as fontes dependem do tempo, isto é, $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{j}(\vec{r}, t)$. O primeiro passo da solução é representá-las, e também os potenciais, através da transformada temporal de Fourier,

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$j_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} j_{i\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$A_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{i\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

onde $\rho_{\omega}(\vec{r})$, $j_{i\omega}(\vec{r})$, $\phi_{\omega}(\vec{r})$ e $A_{i\omega}(\vec{r})$ são as componentes de Fourier de $\rho(\vec{r}, t)$, $j_i(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$ e $A_i(\vec{r}, t)$, respectivamente. Agora vamos prosseguir considerando somente a equação de onda para ϕ . Aplicando os operadores ∇^2 e $\partial^2/\partial t^2$ a $\phi(\vec{r}, t)$, temos

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \phi_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

e

$$\frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2) \phi_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

Substituindo estas expressões e a para $\rho(\vec{r}, t)$ na equação de onda, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\nabla^2 \phi_{\omega} + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \phi_{\omega} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

Como a integral tem que ser nula para qualquer valor arbitrário de t , o integrando tem que se anular. Portanto a equação de onda para as componentes de Fourier fica

$$\boxed{\nabla^2 \phi_{\omega} + k^2 \phi_{\omega} = -\frac{\rho_{\omega}}{\epsilon_0}}$$

onde

$$\boxed{k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}}$$

Esta equação é denominada Equação de Helmholtz, cuja solução veremos a seguir.

Solução da Equação de Helmholtz pelo Método da Função de Green

Numa forma geral, a equação de Helmholtz pode ser escrita como

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -g$$

onde $\phi(\vec{r})$ é uma função escalar e $g(\vec{r})$ é outra função que representa a fonte. Suponhamos que conheçamos uma outra função escalar, $G(\vec{r}, \vec{r}')$, que satisfaça a seguinte equação diferencial

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

onde

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

Como a função $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$, a função $G(\vec{r}, \vec{r}')$ também deve ser uma função simétrica. Esta função é denominada Função de Green.

Vamos multiplicar a equação para $\phi(\vec{r})$ por $G(\vec{r}, \vec{r}')$ e para $G(\vec{r}, \vec{r}')$ por $\phi(\vec{r})$ e subtrair uma da outra; obtemos então

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}) \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') g(\vec{r})$$

Integrando ambos os lados dessa equação num volume V , temos

$$\int_V [G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 \phi - \phi(\vec{r}) \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}')] d\tau = \int \phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\tau - \int G(\vec{r}, \vec{r}') g(\vec{r}) d\tau$$

A integral do lado esquerdo dessa equação pode ser transformada numa integral de superfície usando a Segunda Identidade de Green, que já vimos,

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) d\tau = \int_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

Tomando $\psi \rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}')$, obtemos

$$\int_V [G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \phi \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}')] d\tau = \int_S \left[G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS$$

Como queremos a solução da equação de Helmholtz em todo o espaço, tomamos $S \rightarrow \infty$. Por outro lado, lembrando que ϕ é um potencial, podemos escolher $\phi = 0$ ou $G = 0$ em $S \rightarrow \infty$. Portanto, o lado esquerdo da equação acima se anula. Por outro lado,

$$\int \phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\tau = \phi(\vec{r}')$$

e temos

$$\phi(\vec{r}') = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') g(\vec{r}) d\tau$$

Em geral se utiliza $\vec{r}'$ para a variável muda de integração. Como $G(\vec{r}, \vec{r}')$ é uma função simétrica, podemos trocar a notação acima escrevendo

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') g(\vec{r}') d\tau'}$$

Este é um resultado extremamente importante. Para calcular $\phi(\vec{r})$, não é necessário re-

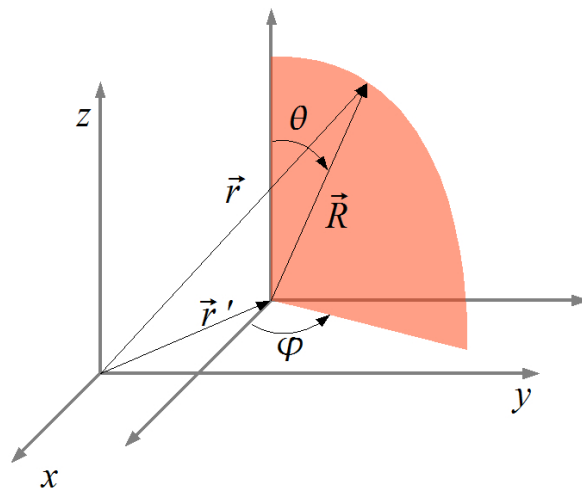
solver a equação original; basta resolver a equação para a função de Green e fazer a integral. Este método é, na realidade, óbvio do ponto de vista físico. Consideremos, por exemplo, que $\phi(\vec{r})$ seja o potencial escalar e $g(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$. A expressão para $\phi(\vec{r})$ acima significa que primeiro calculamos o potencial $G(\vec{r}, \vec{r}')$ para uma carga unitária (na realidade uma densidade de carga unitária) localizada em $\vec{r}'$ e depois somamos o efeito (integral) devido a todas as cargas localizadas em diferentes posições $\vec{r}'$.

Solução da Equação Diferencial para a Função de Green

Vamos agora resolver a equação para $G(\vec{r}, \vec{r}')$, ou seja,

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

sujeita à condição de contorno $G(\vec{r}, \vec{r}') \rightarrow 0$ quando $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$. Como $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ é uma função simétrica e a condição de contorno está no infinito, a função de Green só deve depender do módulo de $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, ou seja, deve ser esfericamente simétrica num sistema de coordenadas centrado em $\vec{r}'$ (ou em $\vec{r}$, tanto faz). Portanto, vamos resolver a equação no sistema de coordenadas esférico (R, θ, φ) mostrado na figura. Neste sistema, $G(\vec{R})$ não depende das coordenadas θ e φ e, portanto,



$$\nabla^2 G = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial G}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG)$$

Exercício: Mostrar essa igualdade.

Portanto, a equação para $G(\vec{R})$ fica

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG) + k^2 G = -\delta(\vec{R})$$

Inicialmente vamos considerar pontos fora da origem; neste caso a equação fica

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG) + k^2 G = 0 \quad \therefore \frac{d^2}{dR^2} (RG) = -k^2 (RG)$$

$$\therefore RG = Ae^{\pm ikR} \quad G(\vec{R}) = \frac{A}{R} e^{\pm ikR},$$

onde A é uma constante. Para determinar a constante A , temos que considerar a contribuição do termo de fonte na origem, onde $G(R)$ parece divergir. Na realidade, a divergência está associada com a função $\delta(\vec{R})$, como veremos a seguir. Para isto, vamos substituir a expressão encontrada para G na equação original, mas calculando com cuidado $\nabla^2 G$ para incluir apropriadamente a origem em $R = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \nabla^2 G &= \nabla \cdot \nabla \left(\frac{A}{R} e^{\pm ikR} \right) = A \nabla \cdot \left[\frac{1}{R} \nabla e^{\pm ikR} + e^{\pm ikR} \nabla \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{A}{R} \nabla^2 e^{\pm ikR} + 2A \left(\nabla e^{\pm ikR} \right) \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right) + A e^{\pm ikR} \nabla^2 \frac{1}{R} \\ &= \cancel{2(\pm ik) \frac{A}{R^2} e^{\pm ikR}} - \frac{Ak^2}{R} e^{\pm ikR} - \cancel{2(\pm ik) \frac{A}{R^2} e^{\pm ikR}} + A e^{\pm ikR} \nabla^2 \frac{1}{R} \\ &\therefore \nabla^2 G = A e^{\pm ikR} \nabla^2 \frac{1}{R} - k^2 \frac{A}{R} e^{\pm ikR} \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação de Helmholtz original, obtemos

$$A e^{\pm ikR} \nabla^2 \frac{1}{R} - \underbrace{k^2 \frac{A}{R} e^{\pm ikR} + k^2 \frac{A}{R} e^{\pm ikR}}_{\text{solução para } R \neq 0!} = -\delta(\vec{R})$$

$$\therefore A e^{\pm ikR} [-4\pi\delta(\vec{R})] = -\delta(\vec{R})$$

Como $\delta(\vec{R}) \neq 0$ somente para $R = 0$ ($e^{\pm ikR} = 1$), temos $A = 1/4\pi$.

Concluindo, a função de Green para a equação de Helmholtz e para a condição de con-

torno $G \rightarrow 0$; $R \rightarrow \infty$, é dada por

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e a solução da equação de Helmholtz fica

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

É interessante notar que a equação de Poisson é um caso particular da equação de Helmholtz com $k = 0$ e $g(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$; então da solução geral acima obtemos

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

que é exatamente a expressão para o potencial escalar eletrostático. Para o potencial não eletrostático, temos então que ($g(\vec{r}) = \rho_\omega(\vec{r})/\epsilon_0$)

$$\phi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_\omega(\vec{r}') e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

A expressão para $\phi(\vec{r}, t)$ será então

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\int \rho_\omega(\vec{r}') e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'| - i\omega t} d\omega \right]$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\omega e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'| - i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega t'} d\omega; & t' = t \mp \frac{k}{\omega} |\vec{r} - \vec{r}'| \\ &= \rho(\vec{r}, t'); & t' = t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \right) \end{aligned}$$

Portanto, a expressão pra $\phi(\vec{r}, t)$ fica

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Matematicamente, tanto o sinal negativo como o positivo são válidos na expressão para t' . No entanto, pela discussão que fizemos anteriormente sabemos que o tempo

$$t' = t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

é o tempo retardado, cujo sentido físico é simples: o sinal detectado em um ponto $\vec{r}$ num instante t , produzido por uma fonte em $\vec{r}'$, depende da intensidade que a fonte tinha no instante $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$, devido ao tempo finito de propagação do sinal (notar que este é um argumento clássico, independente da Teoria da Relatividade). Se o sinal positivo fosse escolhido (tempo avançado), o efeito seria observado antes da causa o que não tem sentido físico. Portanto, usando o tempo retardado, a solução geral da equação de onda para o potencial escalar é

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

A expressão para o potencial vetor é da mesma forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$