

PEF-5916

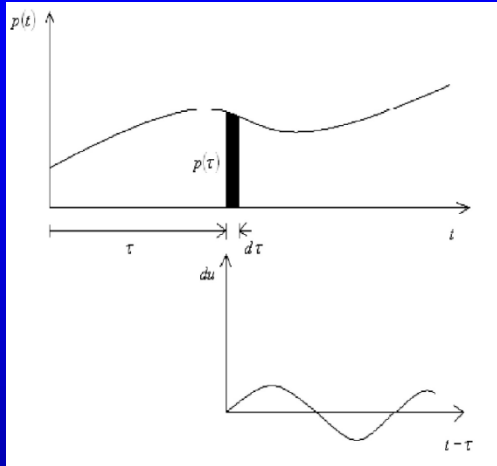
Dinâmica e Estabilidade das

Estruturas

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Resposta a carregamento dinâmico geral

Análise no domínio do tempo: integral de Duhamel



$$du(t) = \frac{p(\tau) d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau), \quad t > \tau$$



$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \right) \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right] + \int_0^t \frac{p(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau$$

Solução em regime permanente:

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

com

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin \omega_D t$$

ou

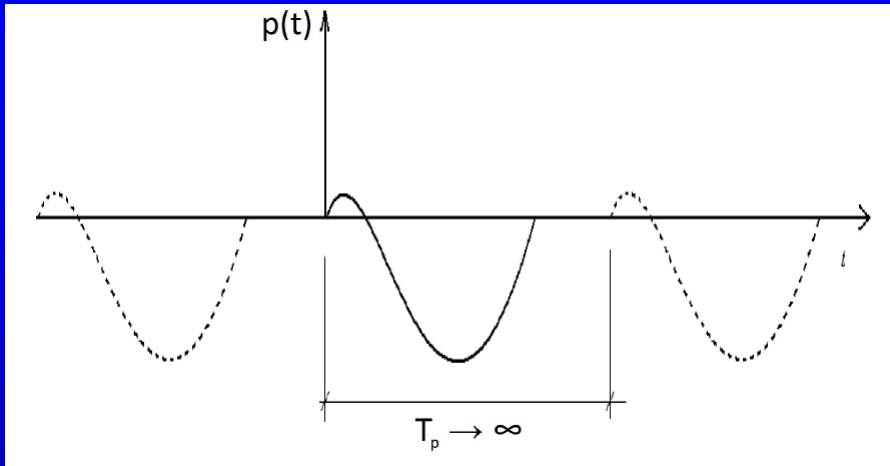
$$u(t) = A(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t \quad \text{com}$$

$$A(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos \omega_D \tau d\tau$$

$$B(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D \tau d\tau$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Análise no domínio da frequência: transformadas de Fourier



$$P(\bar{\omega}_n) = T_p P_n$$

$$T_p \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p} \rightarrow d\bar{\omega} \Rightarrow \frac{1}{T_p} \rightarrow \frac{d\bar{\omega}}{2\pi}$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \Rightarrow p(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_p P_n) \exp(i\bar{\omega}_n t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega}_n) \exp(i\bar{\omega}_n t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega} t) d\bar{\omega}$$

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-i\bar{\omega}_n t} dt \Rightarrow P(\bar{\omega}) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} (T_p P_n) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \int_0^{T_p} p(t) \exp(-i\bar{\omega}_n t) dt = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} p(t) \exp(-i\bar{\omega}_n t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \exp(-i\bar{\omega} t) dt$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n H(\bar{\omega}_n) e^{i\bar{\omega}_n t} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega}) H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega} t) d\bar{\omega} \quad e$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega}$$

$$H(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\bar{\omega} t} dt$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração no domínio da frequência

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \Omega t$$

Transformada de Fourier do carregamento $P(\bar{\omega}) = -p_0 \pi i [\delta(\bar{\omega} - \Omega) - \delta(\bar{\omega} + \Omega)]$

$\delta(x)$ é a função delta de Dirac

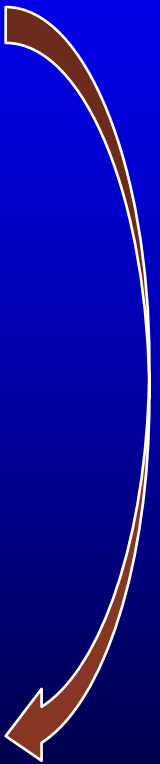
$$\delta(0) \rightarrow +\infty,$$

$$\delta(x) = 0 \text{ para } x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

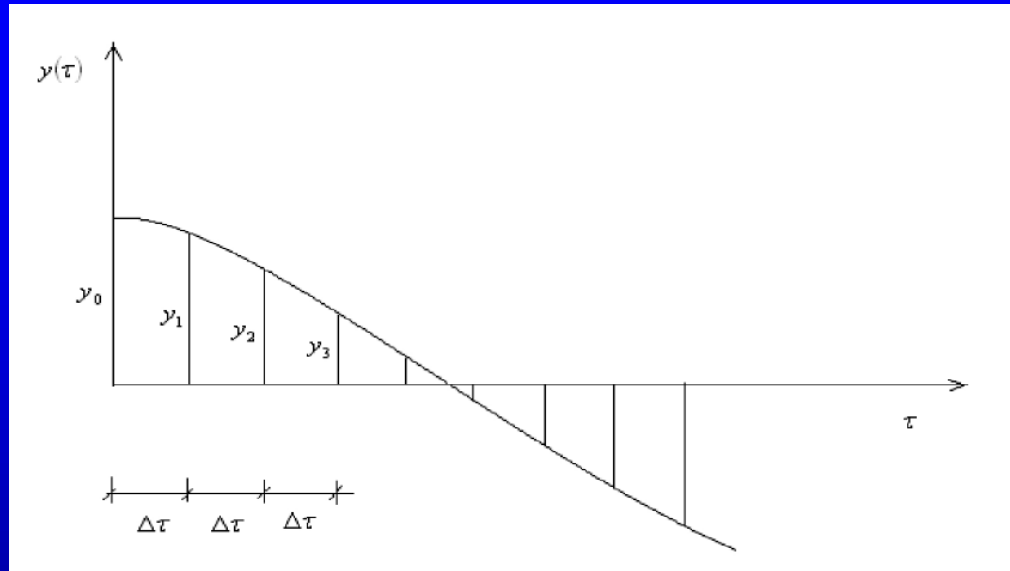
$$H(\bar{\omega}) = \frac{(1 - \bar{\beta}^2) \bar{D}^2}{k} - \frac{2\bar{\beta}\xi \bar{D}^2}{k} i \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad \bar{D} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\beta}^2)^2 + (2\xi\bar{\beta})^2}}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{2} i \left[\frac{(1 - \beta^2)}{k} D^2 (e^{-i\Omega t} - e^{i\Omega t}) + \frac{2\xi\beta}{k} D^2 i (e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}) \right] = \frac{p_0}{k} D^2 i [-i(1 - \beta^2) \sin \Omega t + i(2\xi\beta) \cos \Omega t] \\ &= \frac{p_0}{k} D^2 [(1 - \beta^2) \sin \Omega t - (2\xi\beta) \cos \Omega t] \end{aligned}$$



Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de Duhamel



somatório simples ¹

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \Delta\tau (y_0 + y_1 + \dots + y_{N-1})$$

trapezoidal ²

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{\Delta\tau}{2} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{N-1} + y_N)$$

Simpson ³

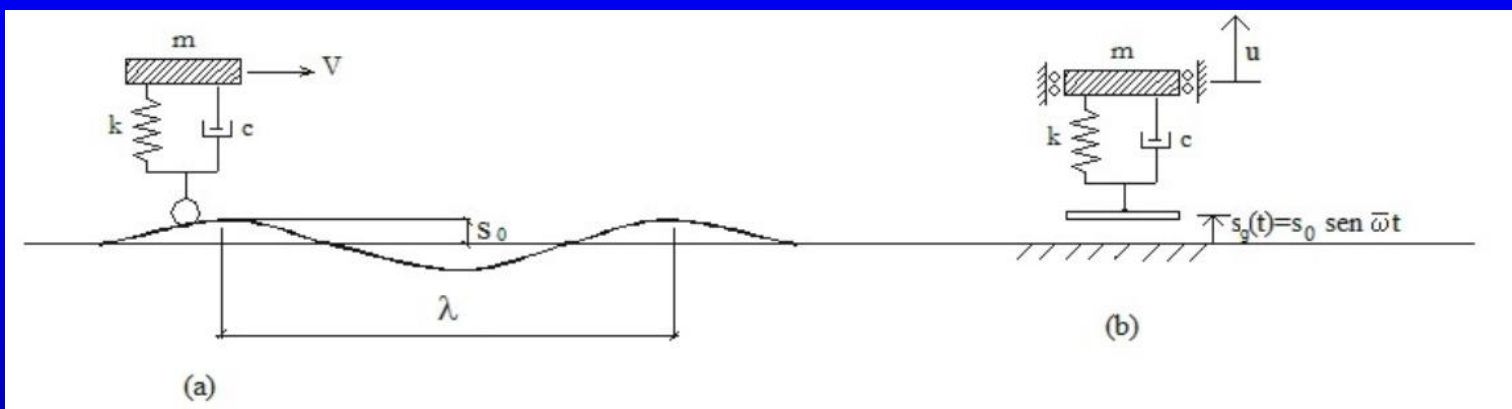
$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{\Delta\tau}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{N-1} + y_N)$$

$N = \frac{t}{\Delta\tau}$ para se aplicar a regra de Simpson,

escolher $\Delta\tau$ de tal sorte que N resulte um número par

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de Duhamel
pela regra de Simpson



$$m = 1200 \text{ kg}, c = 10450 \text{ Ns/m} \text{ e } k = 148650 \text{ N/m}$$

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t, \text{ com } \bar{\omega} = 10,472 \text{ rad/s}, s_0 = 0,03 \text{ m} \text{ e } p_0 = m \bar{\omega}^2 s_0 = 3948 \text{ N}$$

para o veículo trafegando com velocidade 72 km/h ou (20 m/s)



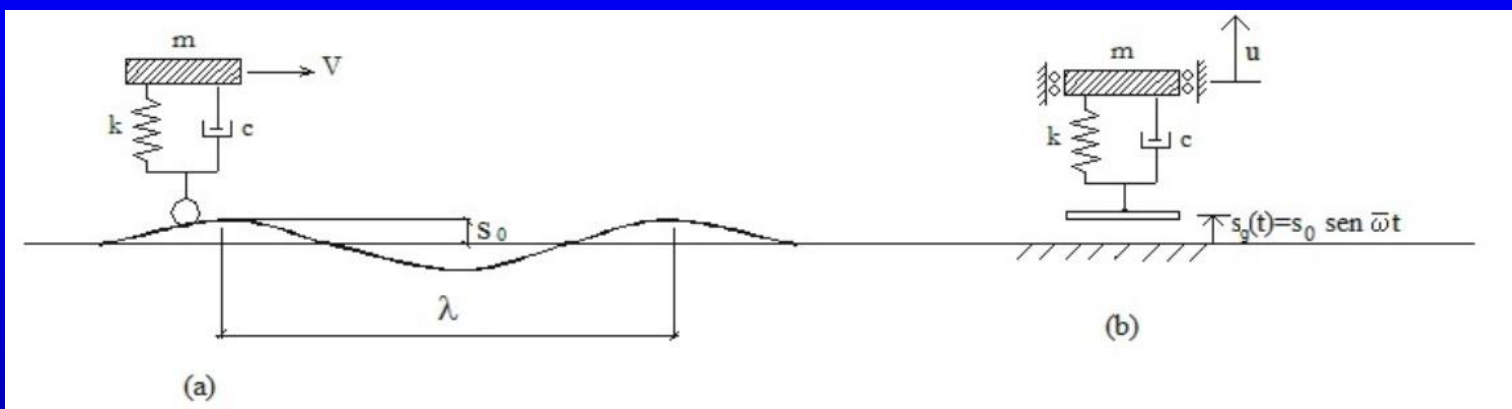
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 \text{ rad/s}$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$



$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 10,241 \text{ rad/s}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de Duhamel
pela regra de Simpson



$$m = 1200 \text{ kg}, c = 10450 \text{ Ns/m} \text{ e } k = 148650 \text{ N/m}$$

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t, \text{ com } \bar{\omega} = 10,472 \text{ rad/s}, s_0 = 0,03 \text{ m} \text{ e } p_0 = m \bar{\omega}^2 s_0 = 3948 \text{ N}$$

para o veículo trafegando com velocidade 72 km/h ou (20 m/s)



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 \text{ rad/s}$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$



$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 10,241 \text{ rad/s}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de Duhamel pela regra de Simpson

$$u(t) = A(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t$$

$$A(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos \omega_D \tau d\tau$$
$$B(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D \tau d\tau$$

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{\Delta\tau}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{N-1} + y_N)$$

$t_i (s)$	A_i	B_i	$u_i (m)$
1,46	0,0059	0,0416	0,0344
1,48	0,0040	0,0392	0,0356
1,50	0,0031	0,0363	0,0352

$$\Delta\tau = 0,01 s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Runge Kutta de 4ª. ordem

$$\begin{aligned}x &= u \\ y &= \dot{u}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(y) = y, \\ \dot{y} &= g(x, y, t) = \frac{1}{m} [p(t) - cy - kx]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + \frac{\Delta t}{6} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{\Delta t}{6} (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)\end{aligned}$$

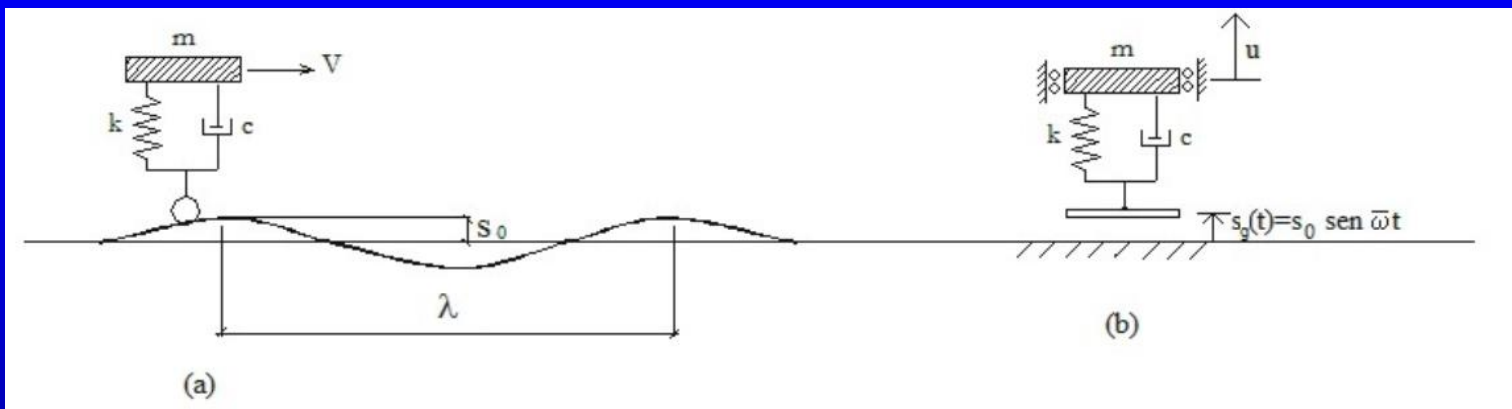


$$\begin{aligned}f_1 &= f(y_i), \\ f_2 &= f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2}g_1\right), \\ f_3 &= f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2}g_2\right), \\ f_4 &= f(y_i + \Delta t g_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_1 &= g(x_i, y_i, t_i) \\ g_2 &= g\left[\left(x_i + \frac{\Delta t}{2}f_1\right), \left(y_i + \frac{\Delta t}{2}g_1\right), \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\right] \\ g_3 &= g\left[\left(x_i + \frac{\Delta t}{2}f_2\right), \left(y_i + \frac{\Delta t}{2}g_2\right), \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\right] \\ g_4 &= g\left[(x_i + \Delta t f_3), (y_i + \Delta t g_3), (t_i + \Delta t)\right]\end{aligned}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Runge-Kutta de 4ª. ordem



$$m = 1200 \text{ kg}, c = 10450 \text{ Ns/m} \text{ e } k = 148650 \text{ N/m}$$

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t, \text{ com } \bar{\omega} = 10,472 \text{ rad/s}, s_0 = 0,03 \text{ m} \text{ e } p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948 \text{ N}$$

para o veículo trafegando com velocidade 72 km/h ou (20 m/s)



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 \text{ rad/s}$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$



$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 10,241 \text{ rad/s}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento
pelo método de Runge-Kutta de 4ª. ordem

$$1200\ddot{u} + 10450\dot{u} + 148650u = 3948 \sin(10,472t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565 \text{ s}$$

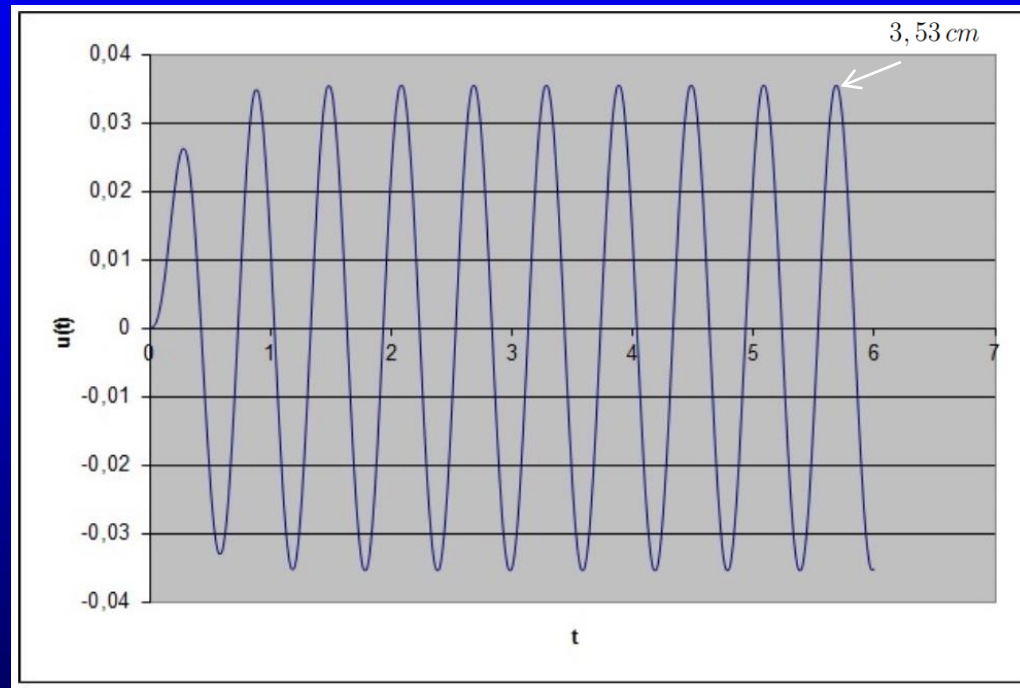
$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$

$t_i \text{ (s)}$	0,00	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	...
$x_i \text{ (m)}$	0	0,000144321	0,001049014	0,003162713	0,006564745	0,010987206	0,015885663	...
$y_i \text{ (m/s)}$	0	0,013976977	0,048828298	0,092510056	0,132774286	0,158991215	0,163545077	...
f_{1i}	0	0,013976977	0,048828298	0,092510056	0,132774286	0,158991215	0,163545077	...
g_{1i}	0	0,877118897	1,378805869	1,464545202	1,159879854	0,544788722	-0,262745521	...
f_{2i}	0	0,02713376	0,069510386	0,114478234	0,150172484	0,167163046	0,159603894	...
g_{2i}	0,172185698	1,21357898	1,500597232	1,371142824	0,882207076	0,137686822	-0,729925917	...
f_{3i}	0,000860928	0,032180661	0,071337256	0,113077198	0,146007392	0,161056517	0,152596188	...
g_{3i}	0,164691316	1,145196016	1,446260111	1,342514642	0,886132548	0,175658167	-0,661599805	...
f_{4i}	0,001646913	0,048332857	0,092216101	0,132785495	0,159358263	0,16426096	0,143697082	...
g_{4i}	0,328496472	1,375595347	1,463831022	1,160986003	0,546826604	-0,260706339	-1,124433387	...

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Runge-Kutta de 4ª. ordem



$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss

“método da aceleração média constante”

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Delta t \\ u_{i+1} &= u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Delta t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \ddot{u}_{i+1} &= \frac{4}{\Delta t^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_i - \ddot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{i+1} \end{aligned} \right.$$

“equilíbrio dinâmico” no instante t_{i+1}

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}$$

$$\hat{k} u_{i+1} = \hat{R}_{i+1}$$

$$\hat{k} = k + \frac{4}{\Delta t^2} m + \frac{2}{\Delta t} c$$

$$\hat{R}_{i+1} = p_{i+1} + m \left(\frac{4}{\Delta t^2} u_i + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_i + \ddot{u}_i \right) + c \left(\frac{2}{\Delta t} u_i + \dot{u}_i \right)$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss

Inicialização

dados:

$$u_0, \dot{u}_0 \text{ e } p_0 = p(0)$$

determina-se:

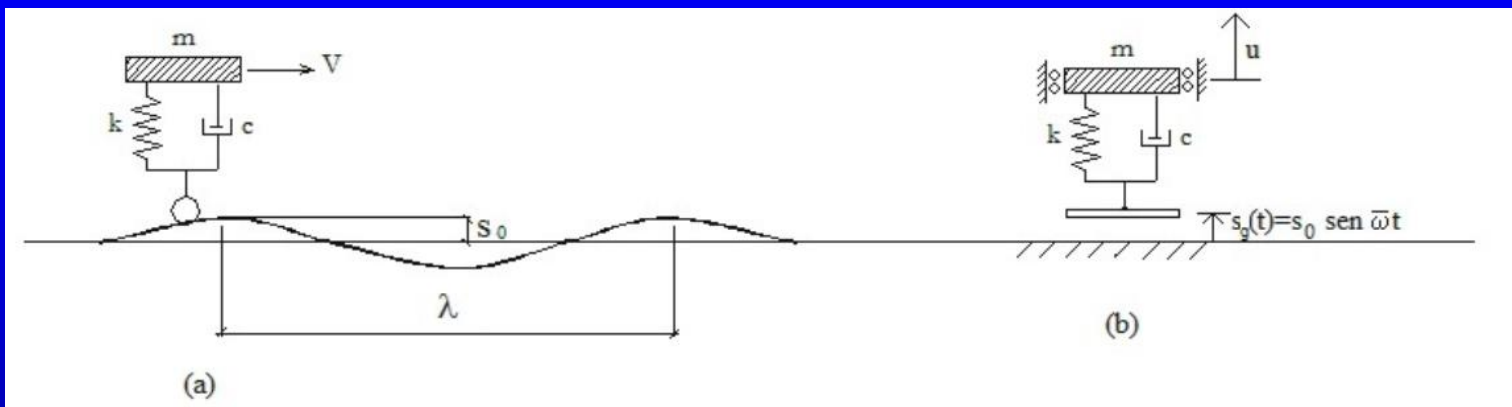
$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m} - \frac{k}{m}u_0 - \frac{c}{m}\dot{u}_0$$

Δt da ordem de $\frac{T^*}{20}$,

sendo T^* o mínimo entre o período natural do sistema
e o menor período forçado relevante

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss



$$m = 1200 \text{ kg}, c = 10450 \text{ Ns/m e } k = 148650 \text{ N/m}$$

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t, \text{ com } \bar{\omega} = 10,472 \text{ rad/s}, s_0 = 0,03 \text{ m e } p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948 \text{ N}$$

para o veículo trafegando com velocidade 72 km/h ou (20 m/s)



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 \text{ rad/s}$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$



$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 10,241 \text{ rad/s}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento
pelo método de Euler-Gauss

$$1200\ddot{u} + 10450\dot{u} + 148650u = 3948 \sin(10,472t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565 \text{ s}$$

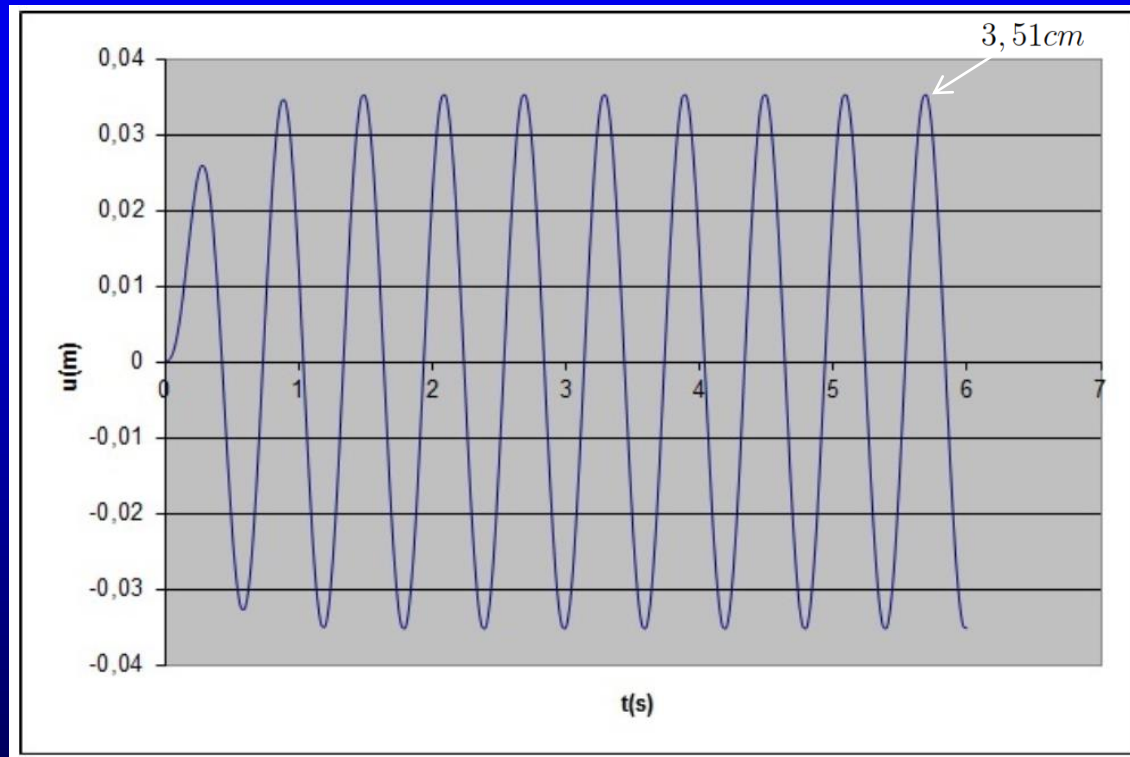
$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$

$t_i \text{ (s)}$	$u_i \text{ (m)}$	$\dot{u}_i \text{ (m/s)}$	$\ddot{u}_i \text{ (m/s}^2\text{)}$	$\hat{k} \text{ (N/m)}$	$\hat{R}_{i+1} \text{ (N)}$
0,00	0	0	0	9267600	1830
0,03	0,000197462	0,013164162	0,877610782	9267600	10212
0,06	0,001101926	0,047133396	1,387004819	9267600	29305
0,09	0,003162053	0,090208409	1,484662754	9267600	99924
0,12	0,006470667	0,130365857	1,192500415	9267600	144363
0,15	0,010782037	0,157058793	0,58702867	9267600	186867
0,18	0,01557718	0,162617431	-0,2164528	9267600	220498
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento
pelo método de Euler-Gauss

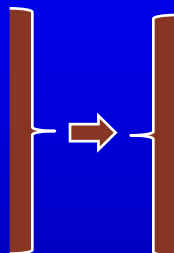


$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Newmark

$$\begin{aligned}\dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + (1 - \delta) \Delta t \ddot{u}_i + \delta \Delta t \ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} &= u_i + \dot{u}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \Delta t^2 \ddot{u}_i + \alpha \Delta t^2 \ddot{u}_{i+1}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\ddot{u}_{i+1} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + (1 - \delta) \Delta t \ddot{u}_i + \delta \Delta t \ddot{u}_{i+1}\end{aligned}$$

“equilíbrio dinâmico” no instante t_{i+1}

$$m \ddot{u}_{i+1} + c \dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = p_{i+1}$$

$$\hat{k} u_{i+1} = \hat{R}_{i+1}$$

$$\hat{k} = k + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} m + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} c$$

$$\hat{R}_{i+1} = p_{i+1} + m \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i \right] + c \left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} u_i + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{u}_i \right]$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Newmark

Inicialização

dados: $u_0, \dot{u}_0$ e $p_0 = p(0)$

determina-se:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m} - \frac{k}{m}u_0 - \frac{c}{m}\dot{u}_0$$

Δt da ordem de $\frac{T^*}{20}$,

sendo T^* o mínimo entre o período natural do sistema e o menor período forçado relevante

Estabilidade numérica incondicional (ENI)

$$\delta \geq \frac{1}{2} \text{ e } \alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2$$

Método de Euler-Gauss (aceleração média constante)

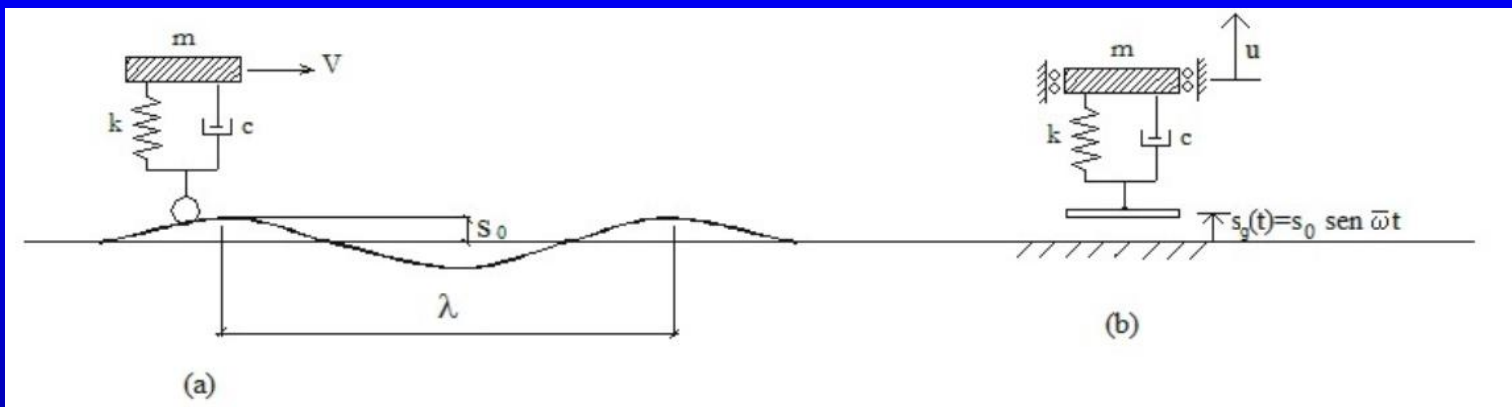
$$\delta = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{ENI}$$

Método da aceleração linear

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow ?$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método da aceleração linear



$$m = 1200 \text{ kg}, c = 10450 \text{ Ns/m} \text{ e } k = 148650 \text{ N/m}$$

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t, \text{ com } \bar{\omega} = 10,472 \text{ rad/s}, s_0 = 0,03 \text{ m} \text{ e } p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948 \text{ N}$$

para o veículo trafegando com velocidade 72 km/h ou (20 m/s)



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 \text{ rad/s}$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$



$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 10,241 \text{ rad/s}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento
pelo método da aceleração linear

$$1200\ddot{u} + 10450\dot{u} + 148650u = 3948 \sin(10,472t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565 \text{ s}$$

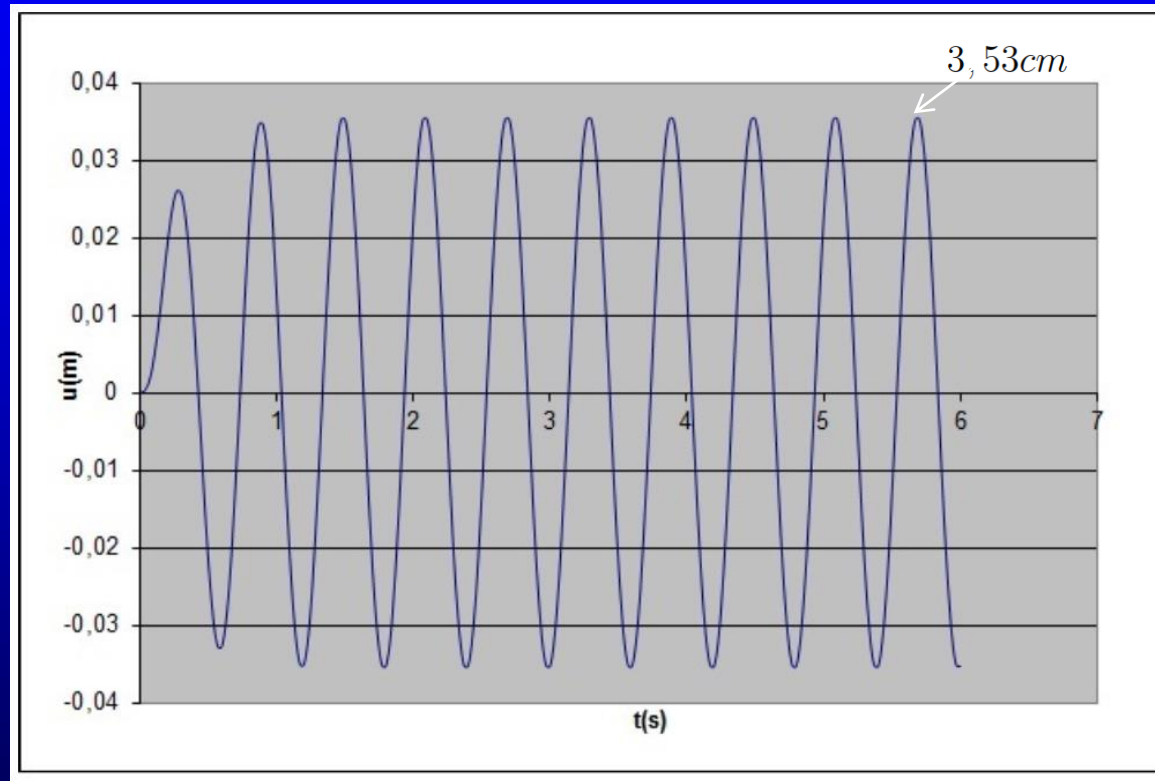
$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$

$t_i \text{ (s)}$	$u_i \text{ (m)}$	$\dot{u}_i \text{ (m/s)}$	$\ddot{u}_i \text{ (m/s}^2\text{)}$	$\hat{k} \text{ (N/m)}$	$\hat{R}_{i+1} \text{ (N)}$
0,00	0	0	0	13789900	1830
0,03	0,000132706	0,013270602	0,884706816	13789900	13867
0,06	0,001005624	0,047479982	1,395918516	13789900	42368
0,09	0,003072417	0,090780565	1,490787025	13789900	88558
0,12	0,006421979	0,131033216	1,192723001	13789900	148901
0,15	0,010797812	0,157626099	0,58013585	13789900	216035
0,18	0,01566617	0,162881492	-0,229776268	13789900	280193
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Resposta a carregamento dinâmico geral

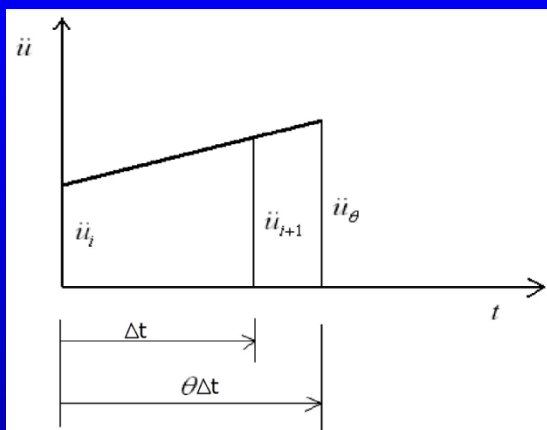
Exemplo: integração numérica da equação de movimento
pelo método da aceleração linear



$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$

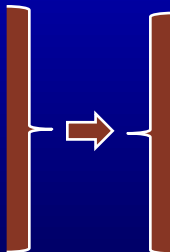
Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson- θ



$$\ddot{u} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{\theta\Delta t} t \Rightarrow \begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}_i + \ddot{u}_i t + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{2\theta\Delta t} t^2 \\ u &= u_i + \dot{u}_i t + \frac{\ddot{u}_i}{2} t^2 + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{6\theta\Delta t} t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_\theta &= \dot{u}_i + \ddot{u}_i \theta\Delta t + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{2} \theta\Delta t \\ u_\theta &= u_i + \dot{u}_i \theta\Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{6} (\theta\Delta t)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ddot{u}_\theta &= \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (u_\theta - u_i) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{u}_i - 2\ddot{u}_i \\ \dot{u}_\theta &= \frac{3}{\theta\Delta t} (u_\theta - u_i) - 2\dot{u}_i - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{u}_i \end{aligned}$$

“equilíbrio dinâmico” no instante $t = \theta\Delta t$

$$p_\theta = p_i + \theta (p_{i+1} - p_i)$$

$$m\ddot{u}_\theta + c\dot{u}_\theta + ku_\theta = p_\theta$$

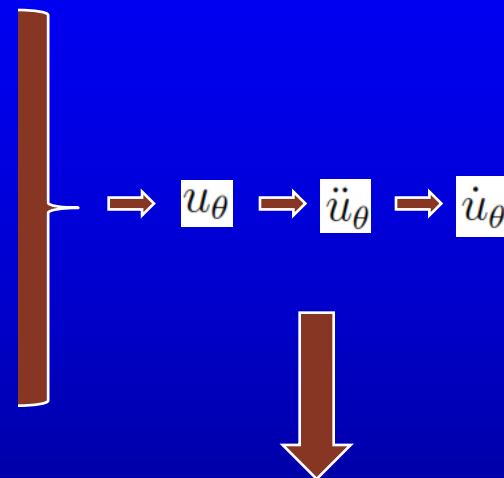
Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson- θ

$$\hat{k} u_\theta = \hat{R}_\theta$$

$$\hat{k} = k + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} m + \frac{3}{\theta \Delta t} c$$

$$\hat{R}_\theta = p_\theta + m \left[\frac{6}{(\theta \Delta t)^2} u_i + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_i + 2\ddot{u}_i \right] + c \left[\frac{3}{\theta \Delta t} u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_i \right]$$



Estabilidade numérica incondicional

$$\theta > 1,37$$

Wilson- θ clássico

$$\theta = 1,40$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{\theta}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{2\theta} \Delta t$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2} \Delta t^2 + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{6\theta} \Delta t^2$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Newmark

Inicialização

dados: $u_0, \dot{u}_0$ e $p_0 = p(0)$

determina-se:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m} - \frac{k}{m}u_0 - \frac{c}{m}\dot{u}_0$$

Δt da ordem de $\frac{T^*}{20}$,

sendo T^* o mínimo entre o período natural do sistema
e o menor período forçado relevante

Estabilidade numérica incondicional (ENI)

$$\delta \geq \frac{1}{2} \text{ e } \alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2$$

Método de Euler-Gauss (aceleração média constante)

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha = \frac{1}{4}$$

⇒ ENI

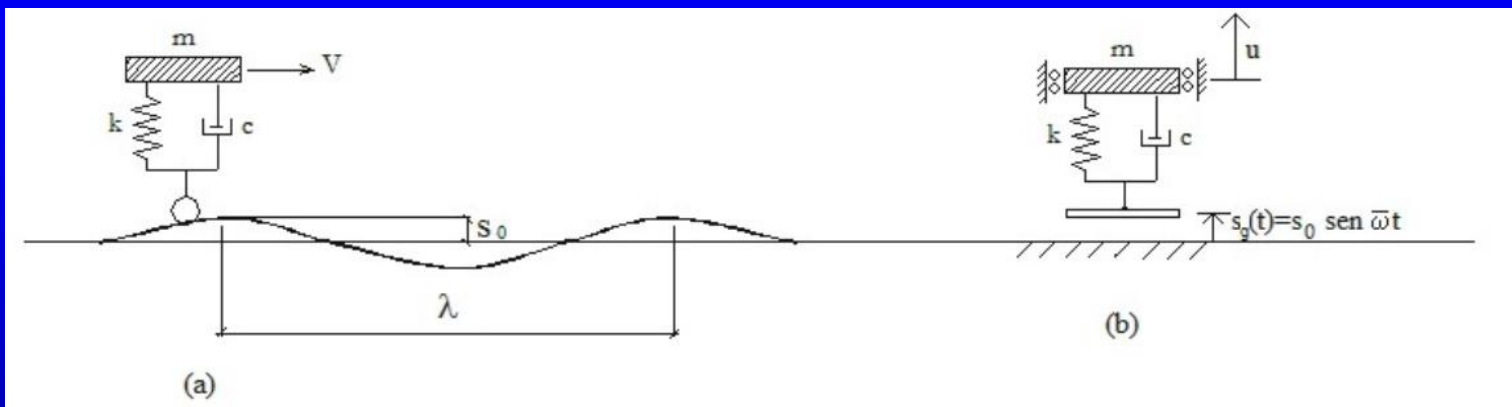
Método da aceleração linear

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha = \frac{1}{6}$$

⇒ ?

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson- θ



$$m = 1200 \text{ kg}, c = 10450 \text{ Ns/m} \text{ e } k = 148650 \text{ N/m}$$

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t, \text{ com } \bar{\omega} = 10,472 \text{ rad/s}, s_0 = 0,03 \text{ m} \text{ e } p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948 \text{ N}$$

para o veículo trafegando com velocidade 72 km/h ou (20 m/s)



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 \text{ rad/s}$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$



$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 10,241 \text{ rad/s}$$

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson- θ

$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

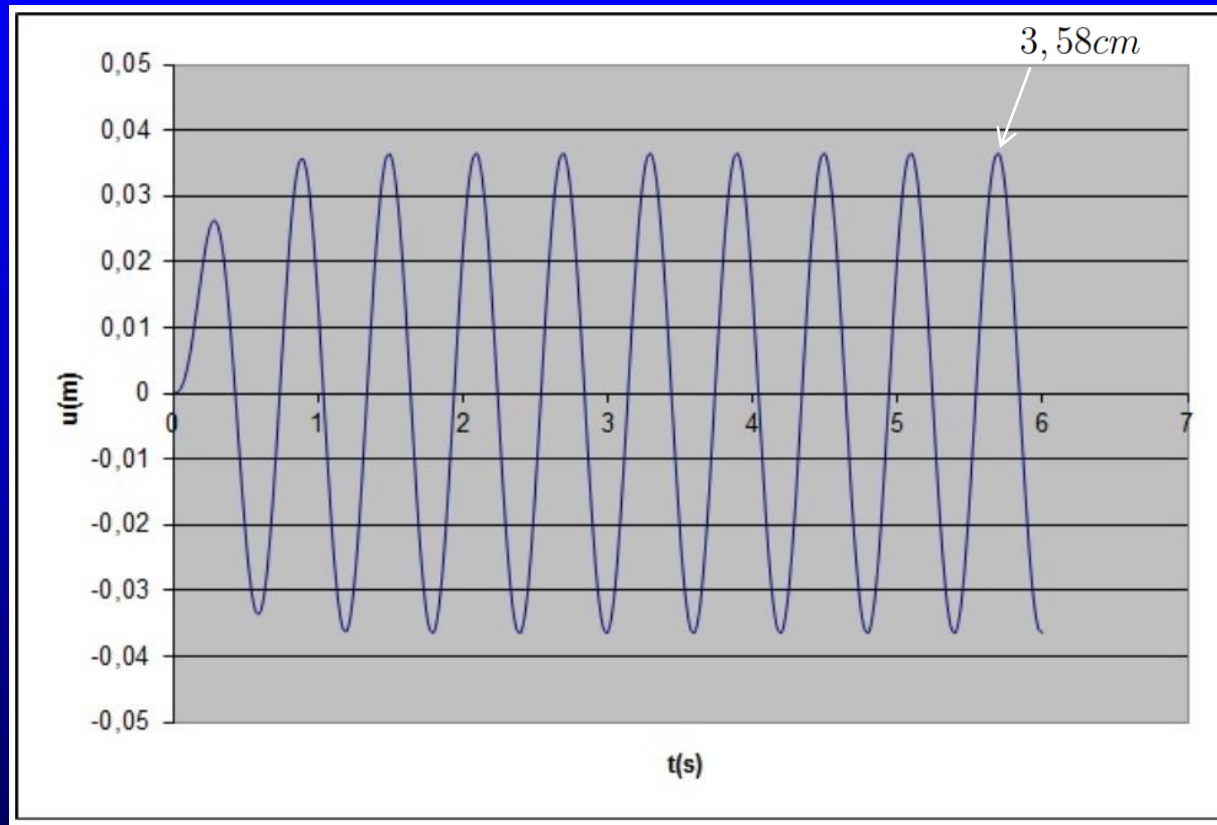
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565\text{ s}$$

$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$

[illegible]

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento
pelo método de Wilson- θ



$$\Delta t = 0,03 \text{ s}$$