4300303 1 Eletromagnetismo I
Segundo Semestre 2014

Terceiro Estudo Dirigido

1. Neste primeiro problema vamos estudar a questão do momento transportado por uma onda eletromagnética monocromática,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \;;\; \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{v}\hat{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \;;\; v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Vimos que a densidade volumétrica de força no campo eletromagnético é dada por

$$\vec{f} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \mu\epsilon\frac{\partial\vec{S}}{\partial t} \;;\; T_{ij} = \epsilon\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right] + \frac{1}{\mu}\left[B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right]$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}$$

e a densidade de momento associada ao campo eletromagnético é dada por

$$\vec{p}_{em} = \mu_0\epsilon_0\vec{S}$$

Na expressão para $\vec{f}$ os campos devem ser reais, pois se trata de uma grandeza física.

a) Considere uma onda eletromagnética se propagando na direção z, de forma que seu campo elétrico real seja dado por

$$\vec{E} = E_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{e}_x$$

Calcule a expressão para o campo $\vec{B}$ dessa onda e mostre que as componentes do tensor cizalhamento de Maxwell são

$$T_{xx} = 0;\; T_{yy} = 0;\; T_{zz} = -\epsilon\left[E_0\cos(kz-\omega t)\right]^2 \;;\; T_{ij} = 0;\; i\neq j$$

b) Mostre que o vetor de Poynting para esta mesma onda plana é dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu v} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\, \hat{e}_z$$

c) Calcule agora a expressão para a densidade de força $\vec{f}$. Note que

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij}\, \hat{e}_j \qquad \text{(consegue explicar porquê?)}$$

Mostre então que

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \epsilon E_0^2 k \sin\left[2(kz - \omega t)\right] \hat{e}_z$$

e que

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \frac{1}{\mu v} E_0^2 \omega \sin\left[2(kz - \omega t)\right] \hat{e}_z$$

Se substituirmos este resultado na expressão para $\vec{f}$, obtemos $\vec{f} = 0$, usando uma relação apropriada entre ω, k e v; que relação é esta e de onde vem?

d) Discuta um pouco este resultado. Se a onda está se propagando no vácuo, deveria existir uma força para ela se propagar?

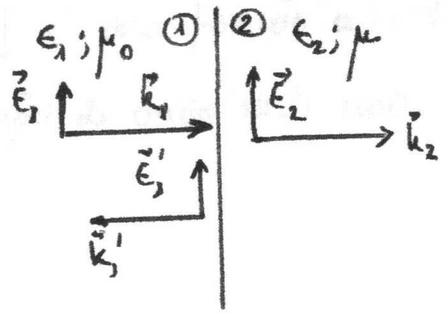
Por outro lado, no que se $\vec{f} = 0$, temos que

$$\mu \epsilon \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} \Rightarrow \vec{P}_{elet} = \int \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}\, dt$$

2. Sabendo que a densidade de momento eletromagnético é dada por

$$\vec{P}_{em} = \mu \epsilon \vec{S}$$

como descrever a transferência de momento de uma onda para uma superfície quando ela é refletida? Nesta questão queremos ver como formular o problema em uma situação prática. Considere uma onda incidindo perpendicularmente na interface entre dois meios.



a) Sabendo que o vetor de Poynting é dado por $\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$

como você formularia a variação de momento nesta situação, ou seja

$$\Delta p = \vec{P}_{antes} - \vec{P}_{depois},$$

onde "antes" significa onda incidente e "depois" significa onda refletida mais onda transmitida?

b) Como força $= \frac{dp}{dt}$, como você formularia o problema para determinar a pressão exercida sobre a superfície reflectora?

---

3. Considere a propagação de onda em um meio condutor, tal que a densidade de corrente livre seja dada por (seção 9.4.1 do livro texto)

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

onde σ é a condutividade do meio

a) Utilizando as equações de Maxwell para este caso,

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\vec{B} = 0 \,;\; \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \,;\; \nabla\times\vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

obtenha a equação de onda em um meio condutor

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

b) Mostre que $\vec{E}(z,t) = f(z-vt)\hat{e}_x$, onde f é uma função arbitrária de $\xi = z - vt$, <u>Não</u> é uma solução da equação de onda neste caso.

c) Mostre que a solução é dada por

$$\vec{E}(z,t) = E_0\, e^{i(kz-\omega t)}\,\hat{e}_x$$

onde

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2\left[1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]$$

d) Mostre que se k for escrito na forma $k = \alpha + i\beta$, se obtem

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\,\right]^{1/2} \,;\; \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\,\right]^{1/2}$$

e) Mostre que, se substituirmos a expressão para k no campo, obtemos

$$\vec{E}(z,t) = E_0\, e^{-\beta z}\, e^{i(\alpha z - \omega t)}\,\hat{e}_x$$

Interprete então o significado de β.