Prova 3 Mecânica (2do semestre 2014) Data entrega 01/12/14. Prova atrasada: nota zero

1. Um sistema dinâmico de dois graus de liberdade x e y evolui no tempo de acordo com

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}\mathbf{u}$$

onde $\mathbf{u} = (x, y)^T$ e $\mathbf{M}$ é uma matriz 2×2 de coeficientes constantes. Defina $\tau = \text{tr } \mathbf{M}$, o traço de $\mathbf{M}$ e $\Delta = \det \mathbf{M}$ o determinante. Tente uma solução do tipo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp(\lambda t)$ e encontre os valores de λ como função dos coeficientes de $\mathbf{M}$. Expressando λ como função do traço e do determinante: $\lambda(\tau, \Delta)$ fica mais conciso.

1.a Classifique as trajetórias possíveis no espaço (x, y) para os diferentes valores de τ e Δ . Faça um esboço de cada um dos casos. Estamos interessados no caso (i) $\Delta < 0$ qualquer τ e (ii) $\Delta > 0$, com quatro possibilidades para τ (dica τ pode ser positivo ou negativo, de módulo muito grande ou não tão grande. Encontre o critério para $|\tau|$ ser grande ou pequeno em relação a Δ). Indique num diagrama no espaço Δ, τ essas regiões de acordo com a estrutura das trajetórias.

1.b Uma sistema dinâmico é definido por

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$

$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

Encontre todos os pontos fixos do sistema. Linearize o sistema em cada um deles, classifique-os e esboce as trajetórias possíveis no espaço (x, y) .

2. O problema de três corpos restrito.

Dois corpos 'grandes' de massas M_1 e M_2 , e.g. o Sol e Júpiter, orbitam em torno do seu centro de massa em uma órbita circular de raio a .

(2.a) Mostre que a velocidade angular é dada por

$$\omega = \left(\frac{GM_1 M_2}{\mu a^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde μ é a massa reduzida.

(2.b) Considere um sistema não inercial S que tem origem no CM do sistema Sol-Júpiter e gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ de magnitude ω e perpendicular ao plano da órbita, de tal maneira que estes estão parados em S sobre o eixo x de S . Encontre as coordenadas das suas posições $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$. Note que $x_1 - x_2 = a$

(2.c) Considere um terceiro corpo P_3 de massa m , muito menor que as outras de tal forma que as perturbações que acarretará à órbita circular descrita acima são desprezíveis. Queremos descrever o movimento de P_3 nas condições especiais em que seu movimento está restrito ao plano da órbita Sol-Júpiter.

Escreva a equação de movimento de P_3 no referencial S não inercial, incluindo a força centrífuga e a de Coriolis. Escreva separadamente as equações para as componentes cartesianas.

(2.d) Mostre que a força centrífuga tem rotacional nulo e portanto pode ser escrita como o gradiente de uma energia potencial quadrática nas coordenadas cartesianas.

(2.e) Para simplificar introduza coordenadas $X = x/a$ e $Y = y/a$. Despreze a força de Coriolis. P_3 se move então em um potencial V que é a soma de três termos, o potencial gravitacional associado à força gravitacional da interação com o Sol, com Júpiter e à força centrífuga. Os pontos onde as forças se cancelam são obtidos impondo $\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$. Mostre que há duas soluções destas equações em pontos equidistantes do Sol e de Júpiter, estes (X_4, Y_4) e (X_5, Y_5) são chamados tradicionalmente de Pontos de Lagrange L_4 e L_5 . Mostre que $X_4 = \frac{x_1}{a} - \frac{1}{2}$, e $Y_4 = \cos(\pi/6)$.

(2.f) Coloque novamente a força de Coriolis. Expanda o potencial até segunda ordem em torno de um dos pontos de equilíbrio (analise somente um deles, e.g. L_4). Introduza variáveis $u_x = X - X_4$ e $u_y = Y - Y_4$ e mostre que a dinâmica é descrita localmente pelas equações:

$$\ddot{u}_x = -V_{xx}u_x - V_{xy}u_y + 2\omega\dot{u}_y,$$

$$\ddot{u}_y = -V_{yx}u_x - V_{yy}u_y - 2\omega\dot{u}_x,$$

onde os subíndices de V denotam derivadas parciais calculadas no ponto de equilíbrio. Também pode ser escrita em forma matricial

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{V}_2\mathbf{u} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}$$

onde $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^T$. Encontre $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{A}$. Tente uma solução $\mathbf{u} = (u_{x0}, u_{y0})^T e^{i\lambda t}$. Mostre que segue

$$\mathbf{L}\mathbf{u} := \left(\lambda^2 \mathbf{I} + i\lambda \mathbf{A} - \mathbf{V}_2 \right) \mathbf{u} = 0,$$

que um sistema linear 2×2 homogêneo. Os valores de λ são obtidos impondo que $\det \mathbf{L} = 0$. Descreva o movimento em torno da vizinhança dos pontos de Lagrange como função do parâmetro $\alpha = \frac{M_2}{M_1}$ que toma valores entre zero e um.