Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2° Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 27

Derivação Formal da Velocidade de Grupo

Na aula passada vimos que a solução da equação de onda pode ser expressa como uma superposição de ondas planas, através da transformada de Fourier

$$\psi(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \psi(k,\omega) e^{-i(kx-\omega t)} + \text{ c.c.}$$

onde $\psi(z,t)$ representa qualquer componente dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Cada uma dessas ondas planas é considerada uma componente monocromática dos espectros da onda.

Depois vimos que o vetor de Poynting para uma onda é dado por

$$\vec{S} = c\epsilon_0 |E|^2 \hat{k}$$

onde $\hat{k}$ é o versor na direção de propagação da onda. Para uma onda monocromática, o vetor de Poynting médio é dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c(\vec{E}\cdot\vec{E}_0^*)$$

Finalmente vimos que, dada uma onda qualquer, composta de várias ondas planas, a velocidade com que o "pacote de ondas" se propaga, que é a velocidade com que a energia da onda se propaga, porque a energia é proporcional ao quadrado da amplitude, é denominada velocidade de grupo, $\vec{v}_g$. Derivamos a expressão para esta velocidade, utilizando um modelo simples de onda modulada em amplitude, e mostramos que

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

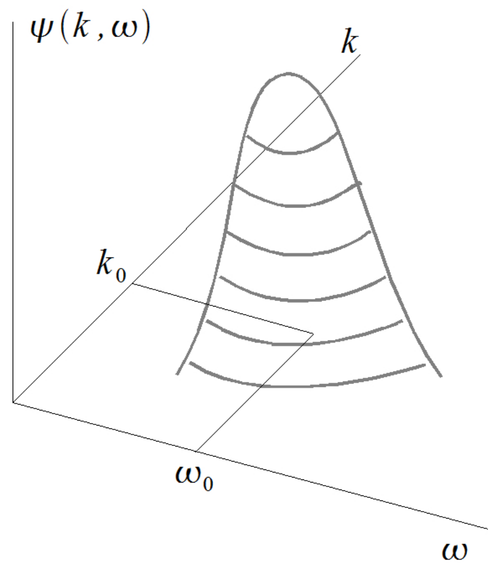
enquanto que a velocidade de fase, ou seja, a velocidade com a qual uma componente monocromática do espectro da onda se propaga, é dada por

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

Nesta aula, vamos primeiramente derivar a expressão para a velocidade de grupo de uma forma mais geral. Para isso, voltemos à expressão geral para uma onda qualquer

$$\psi(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \psi(k,\omega) e^{-i(kz-\omega t)}$$

Suponhamos que o espectro do sinal, $\psi(k,\omega)$, esteja bastante concentrado em torno de uma frequência ω_0, com número de onda k_0, como indica a figura. Podemos então escrever



$$\psi(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad \psi(k,\omega) e^{-i(k_0 z-\omega_0 t)} \times e^{-i(\Delta k z-\Delta\omega t)}$$

onde

$$\Delta k = k - k_0 \qquad \Delta\omega = \omega - \omega_0$$

Então

$$\psi(z,t) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \psi(k,\omega) e^{-i(\Delta k - \Delta\omega t)}\right] e^{-i(k_0 z-\omega_0 t)}$$

ou seja, a onda pode ser escrita como um onda plana que se propaga com as características de sua componente espectral principal, mas com uma amplitude não constante, ou seja,

$$\psi(z,t) = \psi_1(z,t) e^{-i(k_0 z-\omega_0 t)}; \qquad \psi_1(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \psi(k,\omega) e^{-i(\Delta k z-\Delta\omega t)}$$

A velocidade de grupo é a velocidade com a qual um observador teria que se deslocar para ver esta amplitude constante, ou seja,

$$d\psi_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial t} dt + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} dz = 0$$

Assim

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\psi(k,\omega)(-i)\left[-\Delta\omega dt + \Delta k dz\right] e^{-i(\Delta k z - \Delta\omega t)} = 0$$

Para que este resultado seja válido para qualquer $\psi(k,\omega)$, temos

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \qquad \therefore \boxed{v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}} \quad \text{quando} \quad \Delta k \to 0$$

Propagação de Ondas (Planas) em um Meio Material

Já mencionamos que num meio material as equações de onda para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são as mesmas das do vácuo fazendo a substituição $\epsilon_0 \to \epsilon$; $\mu_0 \to \mu$. No entanto, em geral essas grandezas não são constantes, mas dependem da frequência, em particular ϵ. Mas, considerando que cada onda plana tem uma frequência ω, e também um número de onda k, fixas, podemos considerar ϵ uma constante quando descrevemos a propagação de uma onda plana. Neste caso, a velocidade de fase da onda plana no meio material fica

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}$$

onde μ_r e ϵ_r são a permeabilidade e a constante dielétrica relativas do meio. O índice de refração do meio é definido como

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

Para a maioria dos materiais $\mu_r = 1$, de forma que, para eles, $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

Os campos de uma onda plana num meio material são então dados por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}; \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{v}\hat{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \frac{n}{c}\hat{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

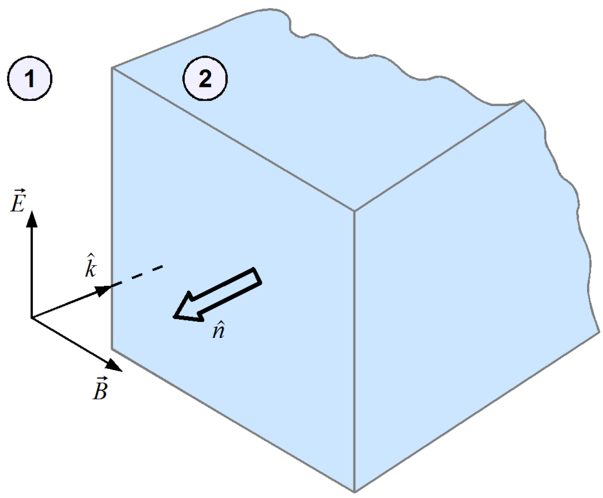
e o Vetor de Poynting associado por uma das relações

$$\vec{S} = v\epsilon|E|^2\hat{k} = \frac{c}{n}\epsilon_0\epsilon_r|E|^2\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\epsilon_0\epsilon_r|E|\hat{k} = \sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_r}{\mu_r\epsilon_0}}|E|^2\hat{k}$$

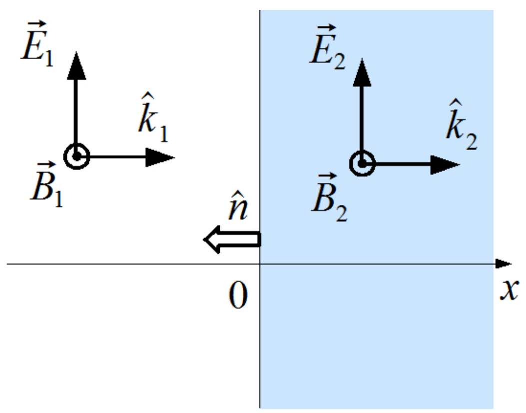
Portanto, quando temos uma onda eletromagnética qualquer se propagando através de um meio material, primeiro a decompomos em suas componentes de onda plana. Descrevemos a propagação de cada onda plana pelo meio utilizando os valores de ϵ e μ para a frequência (fixa) correspondente. Em cada ponto do meio podemos refazer a onda original utilizando a transformada inversa de Fourier.

A seguir vamos estudar o comportamento das ondas planas (ou ondas monocromáticas, significando frequência fixa) quando encontram uma interface entre dois meios com valores distintos de ϵ e μ.

Reflexão e Transmissão de uma Onda Monocromática Incidindo Normalmente na Interface entre Dois Meios



Suponhamos que uma onda monocromática, propagando-se num meio ①, com constante dielétrica ϵ_1 e permeabilidade magnética μ_1, incida normalmente na interface com outro meio ②, onde esses parâmetros tenham valores ϵ_2 e μ_2, respectivamente. Sabemos, de nossa observação diária, que parte da onda é transmitida e parte refletida. Vamos agora determinar como se relacionam as amplitudes das ondas transmitida e refletida com as mesmas grandezas da onda incidente.



A primeira pergunta que gostaríamos de responder é porquê, no caso geral, é necessário haver uma onda transmitida e outra refletida, ou seja, porquê não poderia haver simplesmente a incidente e a transmitida ou a incidente e a refletida? Vamos ver que isto não é permitido devido às condições de contorno na interface.

Consideremos a primeira possibilidade. A onda incidente é simplesmente transmitida através do segundo meio, na mesma direção de propagação. Vamos representar a onda incidente por

$$\vec{E}_1 = E_{01} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{e}_x$$

$$\vec{B}_1 = B_{01} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{e}_y = \frac{E_{01}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{e}_y$$

onde

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_1 \epsilon_1}}\, c \qquad \text{e} \qquad \vec{k}_1 = \frac{\omega}{v_1} \hat{e}_z$$

Para facilitar, suponhamos que a interface esteja em $z = 0$. No meio ②, os campos serão

$$\vec{E}_2 = E_{02} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{e}_x; \qquad \vec{B}_2 = \frac{E_{02}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{e}_y$$

Na interface ($z = 0$), os campos têm que satisfazer as condições de contorno (estamos supondo que não haja cargas livres ou corretamente de condução na interface).

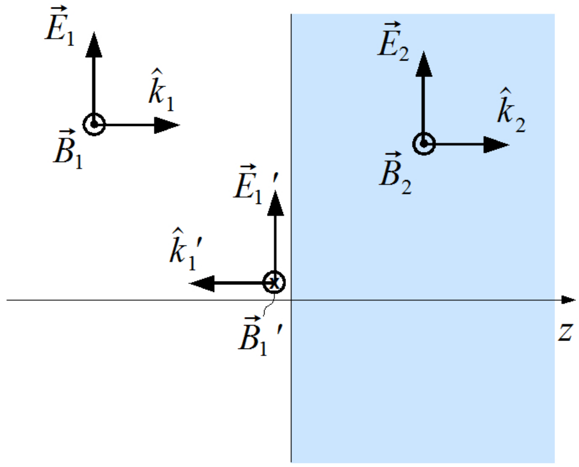
$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad D_{n_1} = D_{n_2}$$

$$H_{t_1} = H_{t_2} \qquad B_{n_1} = B_{n_2}$$

Neste caso, não há componentes do campo eletromagnético normal à interface, de modo que temos que satisfazer as condições

$$\left.\begin{aligned} E_{01} \cancel{e^{-i\omega t}} &= E_{02} \cancel{e^{-i\omega t}} \\ \frac{E_{01}}{\mu_1 \epsilon_1} \cancel{e^{-i\omega t}} &= \frac{E_{02}}{\mu_2 v_2} \cancel{e^{-i\omega t}} \end{aligned}\right. \Rightarrow \quad \begin{aligned} E_{01} &= E_{02} \\ E_{01} &= \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_{02} \end{aligned}$$

Naturalmente estas duas condições não podem ser simultaneamente satisfeitas, a não ser no caso muito especial $\mu_1 v_1 = \mu_2 v_2$. Num caso geral, temos que ter mais um campo para satisfazer as condições de contorno. Este campo é introduzido pelo campo refletido, que vamos representar por (note a inversão no sentido de $\vec{B} \rightarrow$ explique a razão!



$$\vec{E}_1' = E_{01}' e^{-i(k_1 z + \omega t)} \hat{e}_x;$$

$$\vec{B}_1' = -\frac{E_{01}}{v_1} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \hat{e}_y; \qquad \hat{k}_1{}' = -\hat{k}_1$$

Impondo as mesmas condições de contorno na fronteira ($z = 0$), temos

$$E_{01} + E_{01}' = E_{02}$$

$$\frac{E_{01}}{\mu_1 v_1} - \frac{E_{01}'}{\mu_1 v_1} = \frac{E_{02}}{\mu_2 v_2} \qquad \text{ou} \qquad E_{01} - E_{01}' = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_{02}$$

Resolvendo este sistema linear para E_{01}' e E_{02} em função de E_{01}, obtemos

$$\frac{E_{01}'}{E_{01}} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}; \qquad \frac{E_{02}}{E_{01}} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \qquad \left(\text{supondo } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0\right)$$

Dividindo o numerador e o denominador dessas frações por c, podemos expressar estes resultados em termos dos índices de refração ($n = c/v$)

$$\frac{E_{01}'}{E_{01}} = \frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}} \qquad \therefore \boxed{\frac{E_{01}'}{E_{01}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}}$$

Do mesmo modo $$\boxed{\frac{E_{02}}{E_{01}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

Como vimos anteriormente, a intensidade da onda eletromagnética é proporcional ao quadrado da amplitude do campo, ou seja, $I \propto |E|^2$. Portanto, definimos os coeficientes de reflexão, R, e transmissão, T, em termos da intensidade, temos

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{I_{ref}}{I_{inc}} = \frac{\left|E'_{01}\right|^2}{|E_{01}|^2} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}; \\
T &= \frac{I_{trans}}{I_{inc}} = \frac{\epsilon_2 v_2 |E_{02}|^2}{\epsilon_1 v_1 |E_{01}|^2}; \qquad \therefore T = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}} \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} \\
\therefore T &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n_2}{n_1} \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}; \qquad \therefore T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \qquad (\mu_1 = \mu_2)
\end{aligned}
$$

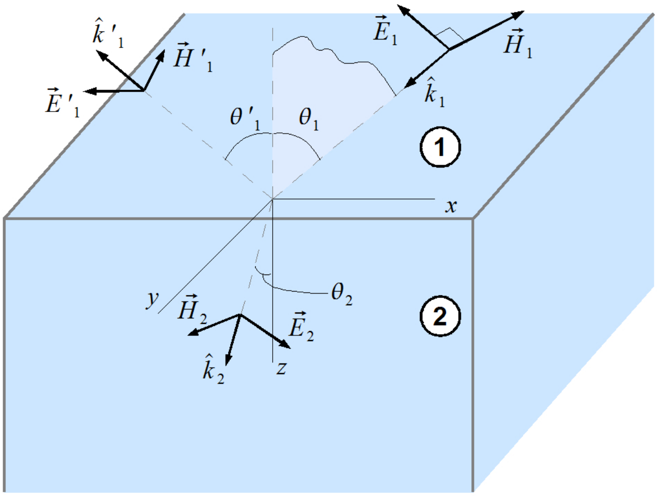
Estas relações mostram que, para incidência normal, os coeficientes de reflexão e transmissão não dependem da passagem da onda de um meio menos refringente para um mais refringente ($n_1 < n_2$), ou vice-versa ($n_1 > n_2$). No entanto, a fase relativa entre os campos incidente e refletido depende da situação:

$n_1 > n_2: \ \dfrac{E'_{01}}{E_{01}} > 0 \ \Rightarrow$ para onda incidente de um meio opticamente mais denso para outro menos denso, o vetor campo elétrico não altera o sentido mas sim o campo magnético.

$n_1 < n_2: \ \dfrac{E'_{01}}{E_{01}} < 0 \ \Rightarrow$ para onda incidente de um meio opticamente menos denso para outro mais denso, o vetor campo elétrico da onda refletida inverte o sentido mas não o campo magnético.

É interessante notar que $R + T = 1$, o que significa que nenhuma energia fica armazenada na interface entre os dois meios.

Reflexão e Transmissão com Incidência Oblíqua



Consideremos agora o mesmo problema no caso geral, ou seja, a onda incidente se propaga numa direção formando um ângulo qualquer com a interface e as direções dos campos elétricos das ondas incidente, refletida e transmitida são arbitrários. Mudamos um pouco a convenção anterior, vamos tomar o versor $\hat{n}$, perpendicular à interface, apontando do meio ① para o meio ②. A situação física está esquematizada na figura ao lado. Os ângulos θ'_1 e θ_2 também são arbitrários, com relação a θ_1. O plano de incidência é definido pelo plano formado pelos versores $\hat{k}_1$ e $\hat{n}$.

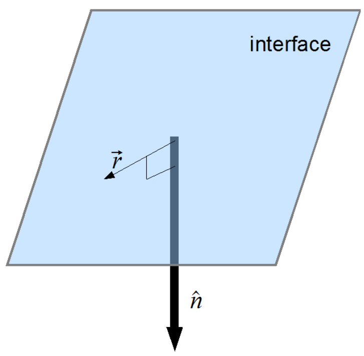
Os campos eletromagnéticos são dados por $(n = c/v)$

$$\underline{\text{onda incidente}}: \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t)}; \quad \vec{B}_1 = \frac{n_1}{c}\vec{k}_1 \times \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t)};$$

$$\underline{\text{onda refletida}}: \quad \vec{E}'_1 = \vec{E}'_{01} e^{i(\vec{k}'_1\cdot\vec{r}-\omega t)}; \quad \vec{B}'_1 = \frac{n_1}{c}\vec{k}'_1 \times \vec{E}'_{01} e^{i(\vec{k}'_1\cdot\vec{r}-\omega t)};$$

$$\underline{\text{onda transmitida}}: \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t)}; \quad \vec{B}_2 = \frac{n_2}{c}\vec{k}_2 \times \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t)};$$

Por enquanto, quando os vetores $\vec{k}_1$, $\vec{k}'_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{E}_{01}$, $\vec{E}'_{01}$ e $\vec{E}_{02}$ são considerados terem direções arbitrárias. No entanto, as condições de contorno obrigam que todas as fases dos campos sejam iguais na interface. Como veremos, essa condição obriga que os vetores $\vec{k}_1$, $\vec{k}'_1$, e $\vec{k}_2$ sejam coplanares e que os ângulos θ_1, θ'_1 e θ_2 satisfaçam as leis de Snell.



Impondo que as fases sejam iguais na interface, temos que

$$\left[\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}'_1\cdot\vec{r} = \vec{k}_2\cdot\vec{r}\right]_{\hat{n}\cdot\vec{r}=0}$$

para qualquer $\vec{r}$ na interface. Para impôr adequadamente esta condição, vamos obter uma expressão explícita para $\vec{r}$ que possa ser substituída na equação $\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}_1'\cdot\vec{r}$. Isto pode ser obtido da relação vetorial

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

Tomando $\vec{A} = \vec{B} = \hat{n}$; $\vec{C} = \hat{n}$, temos

$$\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{r}) = (\hat{n}\cdot\vec{r})\hat{n} - \vec{r}$$

Mas, na interface, $\hat{n}\cdot\vec{r} = 0$; portanto

$$\vec{r} = -\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{r})$$

Assim, a relação de igualdade de fase na interface fica

$$-\vec{k}_1\cdot\vec{r} = \vec{k}_1\cdot[\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{r})] = \vec{k}_1'\cdot[\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{r})] = \vec{k}_2\cdot[\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{r})]$$

Mas

$$\vec{k}\cdot\left[\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{k})\right] = (\hat{n}\times\vec{r})\cdot(\vec{k}\times\hat{n}) \qquad \left[\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\right] \qquad \text{(permutação cíclica)}$$

Portanto, a igualdade pode ser escrita como

$$(\hat{n}\times\vec{r})\cdot\left[\hat{n}\times\vec{k}_1 = \hat{n}\times\vec{k}_1' = \hat{n}\times\vec{k}_2\right]$$

Como $\vec{r}$ é um vetor arbitrário, esta igualdade só é satisfeita se

$$\boxed{\hat{n}\times\vec{k}_1 = \hat{n}\times\vec{k}\,'_1 = \hat{n}\times\vec{k}_2}$$

Este resultado resume todas as leis da Óptica Física:

i) $\vec{k}_1'$ e $\vec{k}_1$ se localizam no mesmo plano definido por $\hat{n}$ e $\vec{k}_1$, ou seja, no Plano de Incidência.

ii) $k_1 sen\theta = k_1{}' sen\theta'$

Mas $k_1{}' = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} = k_1 \qquad \therefore \boxed{\theta_1 = \theta_1'}$: <u>Primeira Lei de Snell</u>

iii) $k_1 sen\theta_1 = k_2 sen\theta_2 \quad \therefore n_1\frac{\omega}{c} sen\theta_1 = n_2\frac{\omega}{c} sen\theta_2 \quad \left(k = \frac{\omega}{v} = n\frac{\omega}{c}\right)$

$$\therefore \boxed{n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2}$$: <u>Segunda Lei de Snell</u>

Portanto, todas as leis da Óptica Geométrica são derivadas do Eletromagnetismo e equivalem simplesmente à continuidade de fase do campo eletromagnético na interface entre dois meios.