Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 29

Campo Eletromagnético de Fontes Variáveis no Tempo

Até agora temos calculado os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ produzidos por fontes estacionárias ou estudado a propagação do campo eletromagnético, no espaço ou em meios materiais, mas sem nos preocupar como esses campos são produzidos. Finalmente vamos completar a descrição do campo eletromagnético determinando as expressões que permitem calcular o campo produzido por fontes não estacionárias, ou seja, cargas e correntes que variam no espaço e no tempo, $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

Este tópico está descrito no capítulo 10 do livro texto, Griffiths. No entanto, a apresentação adotada pelo autor procuta evitar cálculos mais complexos, deixando de ter o rigor necessário em algumas passagens importantes. Por isso, nossa apresentação será um pouco "mais matemática" que o livro texto, embora seguindo a mesma sequência dos tópicos principais. Para os que julgarem necessário complementar o estudo com a leitura de outros textos, recomendo os livros

- J. B. Marion; Classical Electromagnetic Radiation; cap. 7
- J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Chirsty; Fundamentos da Teoria Eletromagnética; seções 16.6 e 20.3
- W. Panofsky, M, Phillips; Classical Electricity and Magnetism; seções 14.1, 14.2 e cap.19.

Potenciais Vetores e Escalar

Recordando como o campo eletromagnético pode ser obtido de funções potenciais, vamos primeiro considerar o potencial vetor $\vec{A}$. Como o divergente de qualquer rotacional é identicamente nulo, temos que a equação para a divergência de $\vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

fica satisfeita expressando o campo $\vec{B}$ como

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

onde $\vec{A}(\vec{r}, t)$ é o potencial vetor. Substituindo esta expressão na lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \therefore \nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

Portanto, o vetor dado por $\vec{E} + \partial \vec{A}/\partial t$ pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar $\phi(\vec{r}, t)$ denominada potencial escalar,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \qquad \therefore \boxed{\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Estas expressões são essenciais para calcular o campo eletromagnético produzido por cargas não estacionárias pois, como veremos na sequência, é bem mais simples calcular os potenciais $\vec{A}$ e ϕ devido a fontes não estacionárias e depois obter deles os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, do que tentar calcular diretamente estes campos.

Equações para os Potenciais

Naturalmente não basta escrever $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos de ρ e $\vec{A}$, é necessário determinar as equações que permitem calcular estes potenciais diretamente. Isto é feito através das equações de Maxwell. Começando pela lei de Coulomb, temos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\nabla \cdot \left(\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad \boxed{\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Por outro lado, da lei de Ampère obtemos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, esta equação pode ser escrita como

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}$$

Estas equações para ϕ e $\vec{A}$ parecem bastante complicadas; além de incluir as fontes ρ e $\vec{j}$, são acopladas, ou seja, $\vec{A}$ e ϕ aparecem nas duas equações! No entanto, elas podem ser bastante simplificadas se notarmos que, na definição de $\vec{B}$ em termos de $\vec{A}$, o $\nabla \cdot \vec{A}$ é arbitrário, ou seja, $\vec{B}$ é a fonte de circulação do campo vetorial $\vec{A}$, mas sua fonte de fluxo não foi definida. Vamos agora ver como $\nabla \cdot \vec{A}$ pode ser definido consistentemente de forma a simplificar as equações para $\vec{A}$ e ϕ.

Transformações de Calibre

Naturalmente não temos total independência para especificar $\nabla \cdot \vec{A}$; é necessário sempre garantir que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, que são as grandezas físicas medidas, e não $\vec{A}$ e ϕ, sejam univocamente determinados.

Suponhamos, por exemplo, que modifiquemos o potencial vetor, somando a ele uma outra função vetorial $\vec{\alpha}$;

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}$$

O campo magnético associado a esse potencial será então

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{\alpha} = \vec{B} + \nabla \times \vec{\alpha}$$

Impondo que essa modificação não altere o campo magnético, ou seja, $\vec{B}' = \vec{B}$, temos que só podemos somar a $\vec{A}$ uma função vetorial tal que

$$\nabla \times \vec{\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\alpha} = \nabla \lambda$$

onde $\lambda(\vec{r}, t)$ é uma função escalar qualquer. Por outro lado, o novo campo elétrico será dado por

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

onde ϕ' é o novo potencial escalar associado à modificação de $\vec{A}$. Substituindo a expressão para $\vec{A}'$, temos

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = -\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\nabla\left(\phi' + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Impondo que

$$\vec{E}' = \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

temos que

$$\phi' = \phi - = \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Concluindo, temos que o campo eletromagnético, $\vec{E}$ e $\vec{B}$, não é alterado se modificarmos os potenciais $\vec{A}$ e ϕ através de uma função escalar $\lambda(\vec{r}, t)$, tal que

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \\ \\ \phi' = \phi - \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} \end{array}}$$

Estas transformações são denominadas <u>Transformações de Calibre</u>.

As transformações de calibre nos permitem escolher diferentes fontes de fluxos para $\vec{A}$ $(\nabla \cdot \vec{A})$ de forma a simplificar as equações com as quais devemos trabalhar. Vamos, por exemplo, começar com a escolha que já fizemos em magnetostática, denominada <u>calibre de Coulomb</u>,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Neste caso, as equações para os potenciais ϕ e $\vec{A}$ ficam

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

Este sistema de equações parece ser simples de solucionar, mas nem sempre isto ocorre. De fato, conhecida a distribuição de cargas num dado instante, o potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ pode ser imediatamente calculado. Isto pode parecer bastante surpreendente. Suponhamos que a distribuição de cargas $\rho(\vec{r}, t)$, por exemplo, seja devida a cargas de uma supernova que explodiu a milhões de anos luz da Terra. A primeira equação nos permite calcular o potencial escalar dessas cargas instantaneamente, isto é, no mesmo instante em que elas aparecem, como se a informação sobre elas viajasse com uma velocidade infinita! Mas esta interpretação não é correta, pois a informação sobre a supernova é transportada pelo vetor de Poynting, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, e, para calcular esses campos, é preciso solucionar também a equação para $\vec{A}$, que obviamente é uma equação se onda (generalizada) com a velocidade de propagação $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$ aparecendo claramente no primeiro termos da equação.

Portanto, no calibre de Coulomb, o potencial escalar ϕ é obtido como se fosse um problema de eletrostática e o potencial vetor $\vec{A}$ é obtido como a solução de uma equação de ondas onde, além da densidade de corrente $\vec{j}$, a derivada temporal de $\nabla\phi$ também aparece como fonte.

Vamos ver como as transformações de calibre podem ser usadas para colocar as equações para ϕ e $\vec{A}$ ambas na forma de equações de onda. Partindo das equações no calibre de Coulomb e fazendo as Transformações de Calibre, $\phi = \phi' + \partial\lambda/\partial t$ e $\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\lambda$, obtemos

$$\nabla^2 \phi' + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \lambda) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e

$$\nabla^2 \vec{A}' - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \nabla \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\right] + \nabla^2(\nabla\lambda) - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\lambda$$

ou

$$\nabla^2 \vec{A}' - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \nabla \left[\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \cancel{\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}} + \nabla^2\lambda - \cancel{\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}}\right]$$

Portanto, escolhendo a função escalar arbitrária λ tal que $\nabla^2\lambda = -\mu_0\epsilon_0 \partial\phi'/\partial t$, temos que a equação para $\vec{A}$ fica

$$\nabla^2 \vec{A}' - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

e para ϕ' tem à mesma forma

$$\nabla^2 \phi' - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

É fácil ver que a escolha que fizemos para λ é equivalente simplesmente a especificar $\nabla \cdot \vec{A}$ tal que

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$$

Esta relação é denominada Calibre de Lorentz e é a escolha mais apropriada para obter o campo eletromagnético de fontes não estacionárias. Então vamos considerar este calibre, com os ponteciais $\vec{A}$ e ϕ dados pelas equações de onda com fonte

$$\boxed{\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}}$$

Potencias Retardados

Para solucionar a equação de onda para ϕ e $\vec{A}$ será necessário utilizar o método de Função de Green, que talvez nem todos os alunos conhecem. Antes de o apresentar, vamos primeiro discutir fisicamente o tipo de solução que esperamos para estas equações. No caso estacionário, ou seja, fontes que não variam no tempo $\partial/\partial t = 0$ e as equações para ϕ e $\vec{A}$ ficam

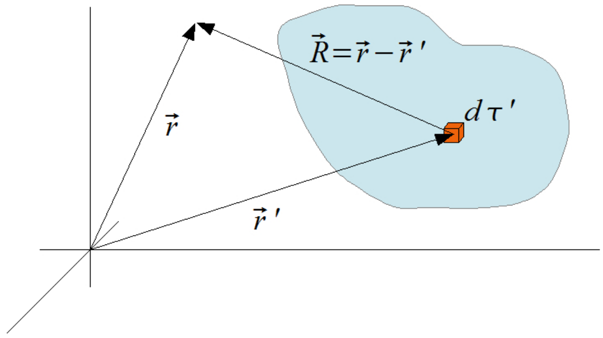
$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

As soluções dessas equações já foram obtidas anteriormente neste curso; elas são

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'$$

e

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'$$



onde $\vec{r}$ é o raio vetor do ponto de observação, onde $\vec{A}$ e ϕ estão sendo determinados, e $\vec{r}'$ o raio vetor do elemento de volume na fonte; a integração é feita sobre o volume da fonte mantendo $\vec{r}$ fixo.

Quando as fontes variam no tempo surge um problema devido à velocidade finita com a qual se propaga a informação sobre esta variação, ou seja, com a velocidade da luz c. Por exemplo, o potencial produzido na posição $\vec{r}$ e no instante t, pela densidade de carga ρ localizada em $\vec{r}'$, não depende de seu valor no mesmo instante, mas sim no instante retardado

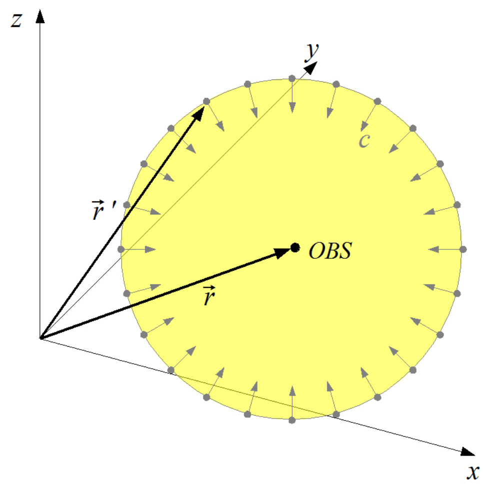
$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c},$$

onde$|\vec{r}-\vec{r}'|/c$ é o intervalo de tempo necessário para a luz se propagar da fonte ao observador. O mesmo acontece com a densidade de corrente $\vec{j}$.

Portanto, esperamos que as expressões para $\vec{A}$ e ϕ, no instante t, sejam dadas por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r},t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau' \qquad \text{e} \qquad \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r},t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'$$

O tempo $t_{ret} = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$ é denominado <u>tempo retardado</u> e os potenciais resultantes <u>potenciais retardados</u>.



Panofsky e Phillips (p. 224) dão uma interpretação muito ilustrativa do conceito de potencial retardado. Suponhamos que um observador esteja localizado num ponto $\vec{r}$ e uma "esfera coletora de dados", se contrai com velocidade c de forma que convirja sobre o observador exatamente no instante t. O instante de tempo em que a esfera passa pela densidade de carga $\vec{r}'$ é o instante no qual a fonte produz o efeito que será detectado em $\vec{r}$ no instante t. Naturalmente a esfera passa por $\vec{r}'$ no instante retardado $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c = t - R/c$.