

Eletrromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 5

Eletrrostática

Griffths; Cap. 2

O livro texto inicia o estudo de eletrrostática a partir da Lei de Coulomb para uma carga pontual. Nós vamos evitar esses assuntos mais básicos, que já foram bem vistos em Física III, e nos concentrar nos tópicos mais avançados.

Eletrrostática significa que as cargas que produzem o campo estão imóveis no referencial do laboratório e não variam com o tempo, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad \vec{j} = \rho \vec{v} = 0$$

(ρ é a densidade de cargas). Então as equações de Maxwell ficam

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad e \quad [\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{B} = 0]$$

e, em termos de potenciais,

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi}$$

Lei de Gaus na Forma Integral

Integrando a primeira equação de Maxwell em um volume V encerrado por uma superfície S , temos

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau$$

Utilizando o Teorema de Gauss, obtemos a Lei de Gauss na forma integral

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_t}{\epsilon_0}; \quad q_t = \int_V \rho dV$$

A lei de Gauss na forma integral é sempre válida. No entanto, ela somente é útil para calcular o campo elétrico quando argumentos sobre a simetria do sistema nos permite escolher uma superfície em que \vec{E} seja constante nas partes em que $\vec{E} \cdot \hat{n} \neq 0$, variando somente nas partes em que $\vec{E} \perp \hat{n}$.

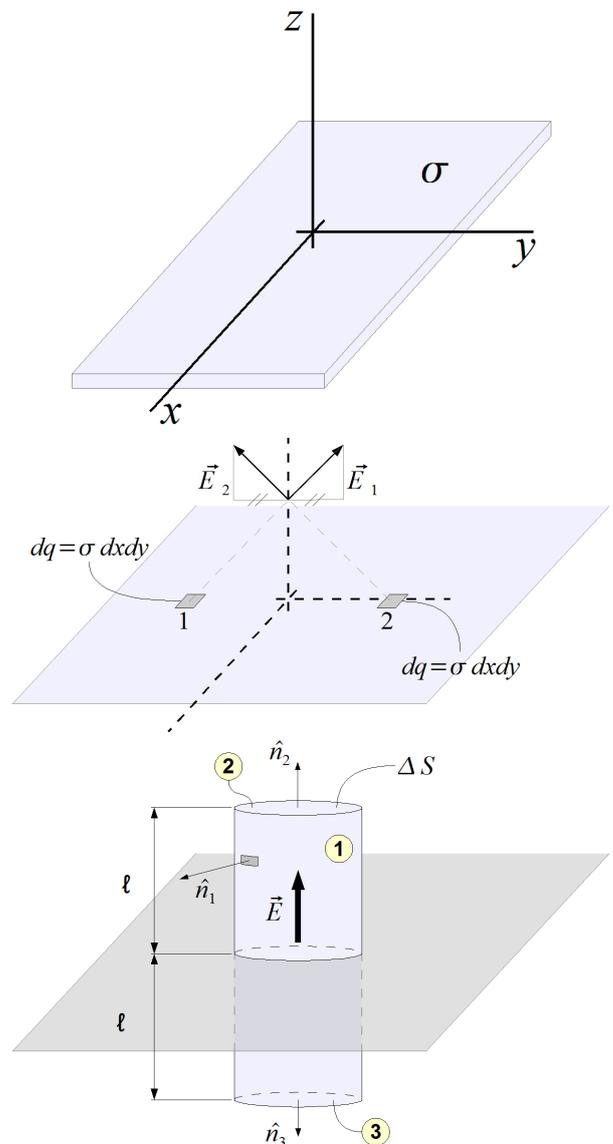
O livro apresenta vários exemplos e problemas sobre aplicações da Lei de Gauss. Como esses exemplos já foram vistos exaustivamente em Física III, vou discutir somente exemplos interessantes e não triviais.

Exemplo 2.4: Plano infinito com densidade de carga superficial σ uniforme. Para resolver este tipo de problema, o primeiro passo é sempre utilizar argumentos de simetria para determinar a direção de \vec{E} e como deve variar com as coordenadas.

Feito isto, escolhemos uma superfície fechada de Gauss tal que, nas faces onde \vec{E} varia, tenhamos $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$, e nas faces onde $\vec{E} \cdot \hat{n} \neq 0$, $|\vec{E}|$ seja constante. Nem sempre é possível encontrar tal superfície.

No caso da placa, considerando dois elementos de carga quaisquer, vemos que os campos elétricos por eles produzidos, num eixo vertical intermediário entre eles, são tais que suas componentes perpendiculares à placa se somam.

Então, como superfície de Gauss tomamos o cilindro perpendicular ao plano da placa.



Pela Lei de Gauss, temos

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma dS$$

Mas $\vec{E} \cdot \hat{n}_1 = 0$; $\vec{E} \cdot \hat{n}_2 = \vec{E} \cdot \hat{n}_3 = E$, já que ambas as bases (S_2 e S_3) estão equidistantes do plano da placa e, pelo argumento de simetria, $E_2 = E_3 = E$. Então

$$E\Delta S + E\Delta S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta S \quad \therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

O sentido do campo é sempre apontando para fora da placa (para $\sigma > 0$); portanto

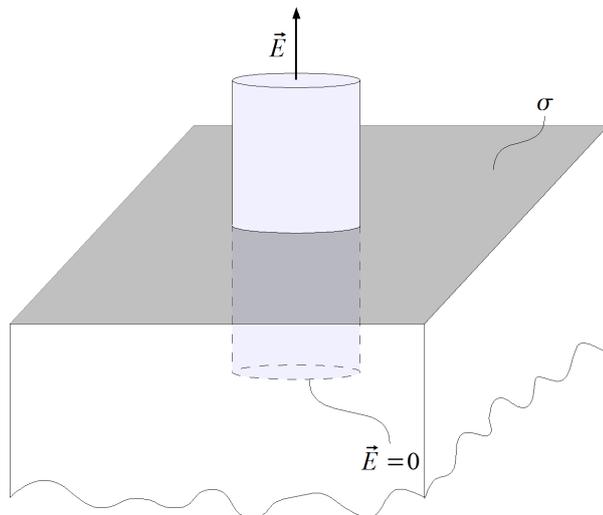
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Consequência: Campo devido a carga superficial em um condutor ideal. Naturalmente o cálculo é o mesmo; mas, dentro do condutor perfeito o campo elétrico tem que ser nulo. Portanto

$$\vec{E}_{cond} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

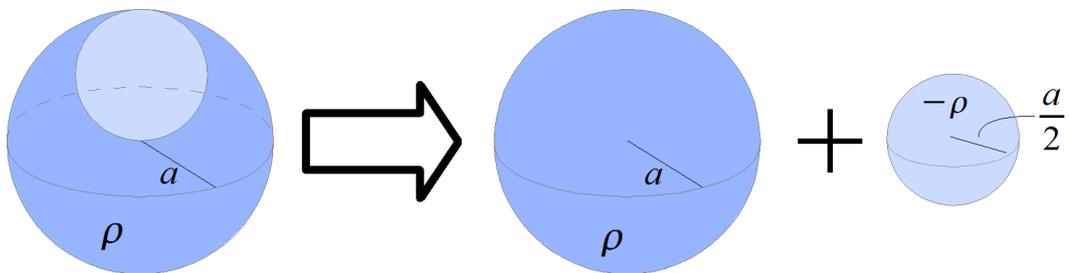
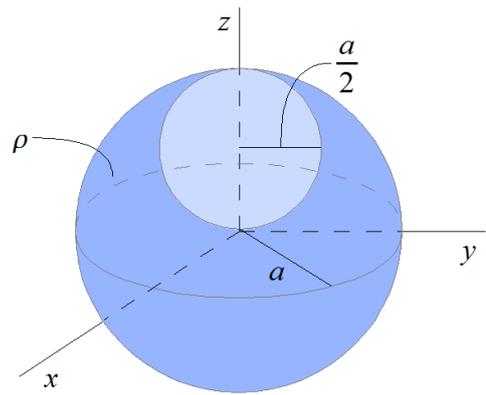
Mesmo que a superfície não seja plana, este resultado é válido bem próximo à superfície.

Vamos agora ver um exemplo em que aparentemente não há simetria, mas a Lei de Gauss pode ainda ser usada com vantagem.



Esfera Oca uniformemente carregada

Podemos modelar este sistema considerando que a esfera oca é equivalente a uma esfera uniforme, com densidade de carga positiva ρ , mais uma esfera de raio $a/2$, na posição da cavidade, com densidade volumétrica de carga $-\rho$:

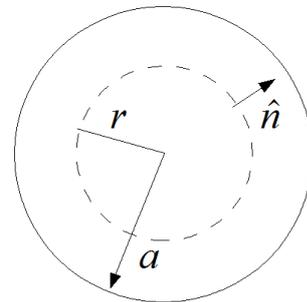


Esfera 1: $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$

dentro: $\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{e}_r$ - argumento de simetria

$$\therefore \oint_S \vec{E}_1 \cdot \hat{n} dS = \oint_S \vec{E}_1 \cdot \hat{e}_r dS = 4\pi r^2 E_1$$

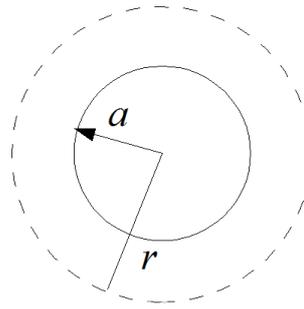
$$\int_V \rho d\tau = \rho \int dV = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$



$$\therefore 4\pi r^2 E_1 = \frac{4\pi r^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \therefore E_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1}$$

$$\text{fora: } \left. \begin{aligned} \oint_S \vec{E}_1 \cdot \hat{n} dS &= 4\pi r^2 E_1 \\ \int \rho d\tau &= \frac{4\pi a^3}{3} \rho \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r_1^3} \vec{r}_1$$



Esfera 2: Os resultados serão os mesmos para a esfera 2, só que temos que lembrar que, na expressão para o campo fora dela, o raio é $a/2$ e não a . Portanto

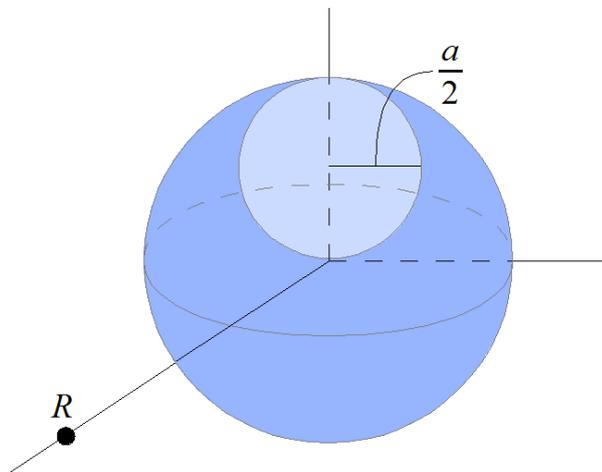
$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_2 &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_2; & \vec{E}_2 &= -\rho \frac{(a/2)^2}{3\epsilon_0 r_2^3} \vec{r}_2; \\ \text{dentro} & & \text{fora} & \end{aligned} \right\}$$

A. Campo resultante a uma distância $R > a$ no plano equatorial da esfera

$$\vec{r}_1 = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z;$$

$$\vec{r}_2 = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + \left(z - \frac{a}{2}\right)\hat{e}_z;$$

$$\vec{E} = [\vec{E}_1 - \vec{E}_2]_{\text{fora}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\rho a^3}{24\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}$$



No ponto $x = R, y = z = 0$

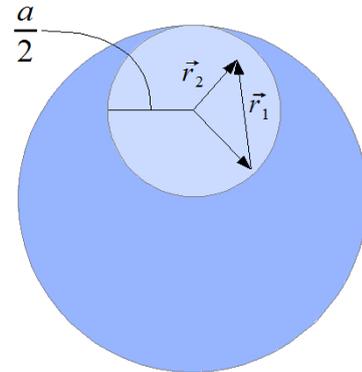
$$\therefore \vec{r}_1 = R\hat{e}_x; \quad \vec{r}_2 = R\hat{e}_x - \frac{a}{2}\hat{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left[R\hat{e}_x - \frac{1}{8} \left(R\hat{e}_x - \frac{a}{2}\hat{e}_z \right) \right] \quad \therefore \boxed{\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{7}{8}R\hat{e}_x + \frac{a}{16}\hat{e}_z \right]}$$

B. Campo em qualquer ponto dentro da cavidade

$$\vec{E} = [\vec{E}_1 + \vec{E}_2]_{dentro} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{a/2\hat{e}_z}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho a}{6\epsilon_0} \hat{e}_z} \quad \text{constante!}$$



Usando esta técnica se pode resolver muitos problemas especiais. Recomendo que os alunos estudem o exemplo 2.5 e façam os problemas 2.13, 2.15, 2.16 e 2.18 do livro texto.

Potencial Eletrostático

Para resolver problemas com configurações de carga e condições de contorno mais complexas, é melhor calcular primeiro o potencial e depois calcular o campo elétrico calculando seu gradiente.

Como em eletrostática $\partial \vec{A} / \partial t = 0$, o campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Por outro lado, como o campo eletrostático é conservativo ($\nabla \times \vec{E} = 0$), a diferença de potencial entre dois pontos independe do percurso entre eles:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B \nabla\phi \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B \frac{d\phi}{d\ell} d\ell = - \int_A^B d\phi = - [\phi(B) - \phi(A)]$$

Potencial de uma distribuição localizada de cargas

Consideremos uma distribuição de cargas com densidade $\rho(\vec{r}')$, que pode ser variável. Se considerarmos um elemento de volume $d\tau'$ na posição dada pelo raio vetor \vec{r}' , o elemento de carga neste volume será,

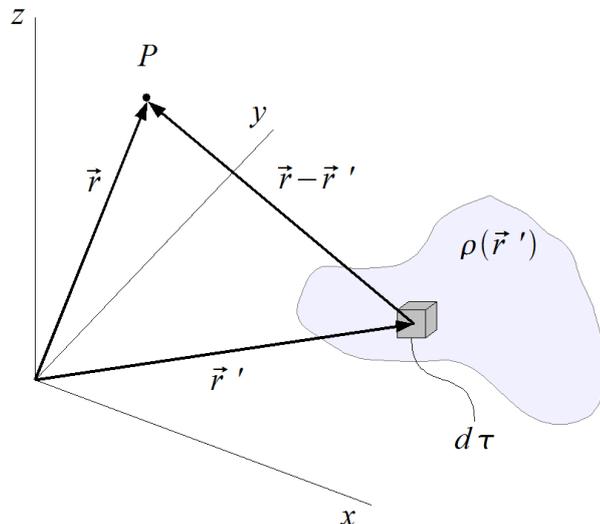
$$dq' = \rho(\vec{r}') d\tau'$$

o campo elétrico devido a este elemento de carga no ponto P , na posição dada pelo raio vetor \vec{r} é

$$d\vec{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Portanto o campo devido a toda distribuição de carga será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$



Agora vamos utilizar um resultado importante que revisamos

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Quanto o ponto estiver fora da origem escrevemos

$$\nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

onde o índice r em ∇ significa que estamos tomando a derivada com relação às coordenadas de \vec{r} e não de \vec{r}' ! Usando este resultado, podemos escrever a expressão do campo elétrico como

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \left[\nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d\tau';$$

mas como a integral é sobre \vec{r}' e não sobre \vec{r} , podemos escrever ∇_r fora da integral, ou seja,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla_r \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \right] = -\nabla_r \phi(\vec{r})$$

Portanto

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'}$$

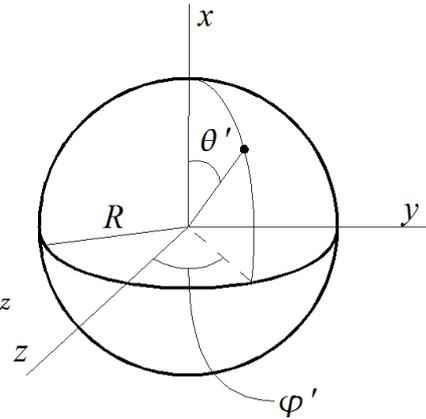
Nem sempre é simples usar esta fórmula para calcular o potencial. O livro texto mostra um exemplo muito instrutivo, o cálculo do potencial de uma casca esférica uniformemente carregada com densidade superficial de carga σ . No exemplo 2.6 o cálculo é feito calculando o primeiro campo elétrico, o que pode ser facilmente feito usando a lei de Gauss. Depois o potencial é calculado fazendo a integral $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Peço aos alunos estudarem este exemplo detalhadamente, verificando todas as passagens. Em aula vamos fazer o Exemplo 2.7, que é mais difícil algebricamente.

Exemplo 8.7:

$$\vec{r} = z\hat{e}_z; \quad \vec{r}' = R\hat{e}'_R$$

$$\therefore \vec{r}' = R\text{sen}\theta' \cos\varphi' \hat{e}_x + R\text{sen}\theta' \text{sen}\varphi' \hat{e}_y + R\cos\theta' \hat{e}_z$$

$$\therefore \vec{r} - \vec{r}' = R\text{sen}\theta' \cos\varphi' \hat{e}_x + R\text{sen}\theta' \text{sen}\varphi' \hat{e}_y + (R\cos\theta' - z)\hat{e}_z$$



$$\therefore |\vec{r} - \vec{r}'| = [R^2 \text{sen}^2\theta' \cos^2\varphi' + R^2 \text{sen}^2\theta' \text{sen}^2\varphi' + (R\cos\theta' - z)^2]^{1/2}$$

$$\therefore |\vec{r} - \vec{r}'| = [R^2 - 2Rz\cos\theta' + z^2]^{1/2}$$

$$\rho(\vec{r}') d\tau' = \sigma dS'; \quad dS' = R^2 \text{sen}\theta' d\theta' d\varphi'$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{R^2 \text{sen}\theta' d\theta' d\varphi'}{[R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta']^{1/2}} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\text{sen}\theta' d\theta'}{[R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta']^{1/2}}$$

$$\therefore \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{Rz} \left[\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'} \right]_0^\pi$$

$$\therefore \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left[\sqrt{R^2 + z^2 + 2Rz} - \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz} \right]$$

$$\therefore \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left[\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right]$$

Ao extrair a segunda raiz, é necessário levar em conta que tem que ser positiva. Então

Fora da esfera: $z > R \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0} [R + z - (z - R)] \quad \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z}}$

Dentro da esfera: $z < R \Rightarrow \phi_f(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0} [R + z - (R + z)] \quad \boxed{\phi_d(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}}$