Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 26

Transformada de Fourier da Equação de Onda

Nós vimos que, em uma dimensão, a equação de onda é dada por

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = 0$$

onde $A_i(z,t)$ é qualquer componente de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$. Sabemos que a solução dessa equação é qualquer função arbitrária de $z-ct$ ou $z+ct$; por exemplo, um pulso se propagando no espaço. Utilizando a transformada de Fourier, podemos tratar esta função arbitrária como uma superposição de ondas planas. Vamos ver como isso é feito praticamente. Apliquemos primeiro a transformada temporal de Fourier à equação.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}dt - \frac{1}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}dt = 0$$

Como as variáveis de z e t comutam, o primeiro termo fica

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}dt = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}A_i(z,t)dt\right] = \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_i(z,\omega)$$

O segundo termo, por outro lado, pode ser integrado por partes:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-i\omega t}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right]_{-\infty}^{\infty} - i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial A_i}{\partial t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-i\omega t}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right]_{-\infty}^{\infty} - i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-i\omega t}A_i\right]_{-\infty}^{\infty} \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow -\omega^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}A_i(z,t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-i\omega t}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right]_{-\infty}^{\infty} - i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-i\omega t}A_i\right]_{-\infty}^{\infty} - \omega^2 A_i(z,\omega)
\end{aligned}$$

Naturalmente, como $e^{i\omega t} = cos\omega t + isen\omega t$, a função $e^{i\omega t}$ não diverge no infinito (desde que ω seja real). Por outro lado, para que a transformada de Fourier possa ser definida, tanto A_i como sua derivada têm que tender rapidamente a zero quando $t \to \infty$ (fisicamente, isso corresponde à condição que a energia armazenada no campo seja finita). Portanto, os dois primeiros termos se anulam, e obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}dt = -\omega^2 A_i(z,\omega)$$

de forma que a equação de onda fica

$$\frac{\partial^2 A_i(z,\omega)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}A_i(z,\omega) = 0$$

Agora fazemos o mesmo para a coordenada espacial, ou seja, aplicamos a transformada

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz}\left(\quad\right)dz$$

à equação. Assim

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz}\frac{\partial^2 A_i(z,\omega)}{\partial z^2}dz = -k^2 A_i(k,\omega)$$

Dessa forma, a equação de onda fica

$$-k^2 A_i(k,\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} A_i(k,\omega) = 0$$

ou

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) A_i(k,\omega) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega^2 = k^2 c^2}$$

Esta relação é denominada <u>relação de dispersão</u> para as ondas eletromagnéticas no vácuo. Na realidade, relação de dispersão é sempre uma relação entre número de onda e frequência angular para ondas eletromagnéticas em qualquer meio.

Escrevendo explicitamente as duas integrais, temporal e espacial, que foram usadas na transformada $A_i(k,\omega)$, temos

$$A_i(k,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{ikz} A_i(z,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{ikz} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} A_i(z,t)\right]$$

ou

$$A_i(k,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt\, A_i(z,t) e^{i(kz-\omega t)}$$

e a transformada inversa será, portanto

$$\boxed{A_i(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_i(k,\omega) e^{-i(kz-\omega t)}}$$

Fisicamente, isto significa que qualquer solução da equação de onda no vácuo pode ser descrita como uma superposição de ondas planas,

$$A_i(k,\omega) e^{-i(kz-\omega t)}$$

Note que como $A_i(z,t)$ é uma grandeza real e $e^{-i(kz-\omega t)}$ uma função complexa, a amplitude $A_i(k,\omega)$ também é uma grandeza complexa. Em geral, portanto, a forma mais correta de formalmente se escrever a expressão acima é

$$A_i(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt A_i(k,\omega) e^{-i(kz-\omega t)} + \text{complexo conjugado}$$

Outro ponto importante para realçar é que a descrição clássica do campo eletromagnético é coerente com a Mecânica Quântica. De fato, multiplicando a relação de dispersão por $\hbar$, temos

$$(\hbar\omega)^2 = (\hbar k)^2 c^2$$

ou

$$E^2 = p^2 c^2$$

usando as relações de de Broglie. Mas isso é exatamente a expressão (relativística) para a energia do fóton, ou seja,

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 = p^2 c^2,$$

já que a massa de repouso do fóton é nula.

Ondas Monocromáticas

Este resultado nos permite estudar cada onda plana separadamente e depois, se necessário, fazer a transformada inversa de Fourier para obter o campo eletromagnético original. Então vamos representar as ondas eletromagnéticas monocromáticas (ondas planas) como

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}; \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad (+\ \text{c.c.})$$

onde $\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0$ são as amplitudes complexas das ondas planas.

Se as ondas estiverem se propagando numa direção arbitrária qualquer, definida pelo vetor unitário

$$\hat{k} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{|\vec{E}|\,|\vec{H}|}$$

basta substituir z pela coordenada espacial na direção de propagação,

$$z \to \hat{k} \cdot \vec{r}$$

de forma que $kz \to k\hat{k} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$, onde $\vec{k}$ é agora denominado vetor número de onda. Portanto,

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t}; \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E}$$

Potência transmitida por uma onda monocromática

Nós vimos que a potência por unidade de área transmitida por uma onda eletromagnética é dada por

$$\vec{S} = c\epsilon_0 |E|^2 \hat{k}$$

Para uma onda monocromática temos então

$$\vec{S} = c\epsilon_0 \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]^2_{\text{real}} \hat{k}$$

Mas

$$\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]_{\text{real}} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \vec{E}_0^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]^2_{\text{real}} &= \frac{1}{4}\left[\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^* + \vec{E}_0^*\cdot\vec{E}_0 + \vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^* e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \vec{E}_0^*\cdot\vec{E}_0 e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right) + \frac{1}{2}\text{Re}\left[\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]
\end{aligned}$$

O primeiro termo é constante enquanto que o segundo oscila com o dobro da frequência da onda. Portanto, se estivermos interessados somente na potência média transmitida por unidade pela onda, temos

$$\langle\vec{S}\rangle = c\epsilon_0 \frac{1}{2}\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right)\hat{k} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right)\hat{k}$$

O módulo valor médio de $\vec{S}$ é denominado intensidade da onda, ou seja,

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right)$$

Se a onda estiver se propagando num meio material, a expressão para a intensidade é obtida com as substituições $\epsilon_0 \to \epsilon$; $c \to v$.

Exemplo: Mostrar que $\left\langle \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*\right) e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right\rangle = 0$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*\right) e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T dt \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*\right) e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \frac{\omega}{2\pi}\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 \int_0^T e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 e^{2i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int_0^T e^{-2i\omega t} dt = \frac{i}{4\pi}\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 e^{2i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left[e^{-2i\omega T - 1}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

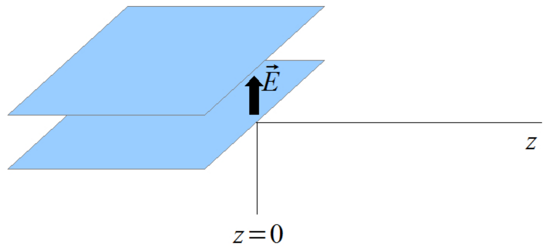
Velocidade de Grupo de um Pacote de Ondas

Vimos, portanto, que qualquer onda eletromagnética descrita pela equação de onda pode ser expressa como uma superposição de ondas planas, através da transformada de Fourier.

$$\psi(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \psi(k,\omega) e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \text{ c.c.}$$

onde $\psi(z,t)$ pode ser qualquer componente de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$. A função $\psi(k,\omega)$ é denominada o Espectro do campo da onda e é estabelecido pela fonte da onda, ou seja, pela forma como a onda é excitada. Por exemplo, suponhamos que a onda seja excitada aplicando um pulso de tensão entre as duas placas planas de um capacitor, localizado em $z = 0$, de forma que o campo elétrico inicial seja dado por

$$\vec{E}(z,t) = \delta(z) \begin{bmatrix} E_0; & -\tau \leq t \leq \tau \\ & \\ 0; & |t| > \tau \end{bmatrix} \hat{e}_x$$



O espectro inicial do campo elétrico será

$$\begin{aligned}
E(k,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{\infty}^{\infty} dt\ E(z,t) e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \\
\therefore E(k,\omega) &= \frac{E_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) e^{ikz} dz \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi}\left(\frac{i}{\omega}\right)\left[e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}\right]
\end{aligned}$$

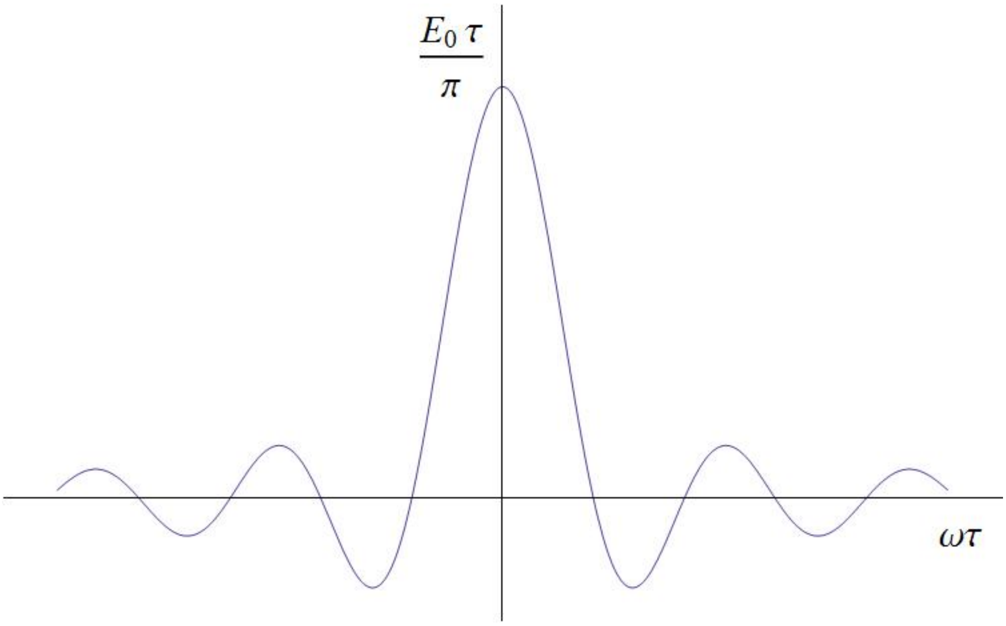
onde utilizaremos a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) f(z) dz = f(0)$$

Então

$$E(k,\omega) = \frac{E_0}{2\pi}\frac{i}{\omega}(-2i)sen(\omega\tau) \qquad \therefore E(k,\omega) = \frac{E_0\tau}{\pi}\left[\frac{sen(\omega\tau)}{\omega\tau}\right]$$

e o espectro terá a forma mostrada na figura



Cada componente espectral deste "pacote" de onda inicial se propagará com sua própria velocidade, denominada <u>velocidade de fase</u>

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

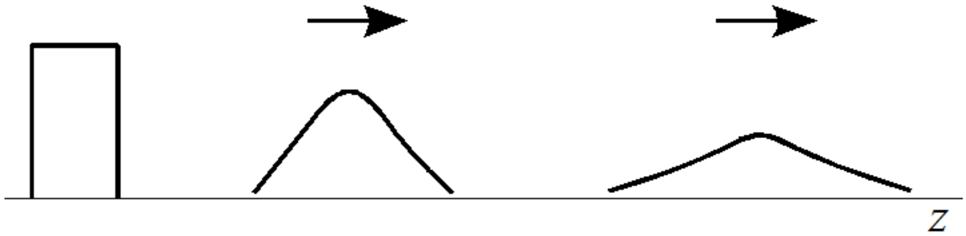
porque, para um observador se movendo com esta velocidade, a fase da onda plana

$$\varphi = kz - \omega t$$

é constante. De fato

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\frac{dz}{dt} - \omega = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dt} = v_f = \frac{\omega}{k}$$

Acontece que, embora no vácuo $v_f = \omega/k = c$ = constante, na maior parte dos meios materiais existe uma relação entre ω e k, denominada relação de dispersão $\omega(k)$, que não se reduz a uma simples proporcionalidade. Neste caso, as velocidades de fase das ondas planas variam com a frequência, de forma que ao se propagar pelo meio, cada componente do espectro da onda se propaga com uma velocidade distinta, fazendo com que o pacote de ondas se deforme durante a propagação, como indicado na figura.



Meios onde este efeito acontece são denominados meios dispersivos.

Por outro lado, como a potência transmitida pela onda é proporcional ao quadrado de sua amplitude, $S \propto |E|^2$, a velocidade com que a energia se propaga é determinada pela velocidade com que a amplitude do pacote de onda se propaga; esta velocidade é denominada velocidade de grupo.

O tópico velocidade de grupo é tratado na seção 9.4.3 do livro texto, mas de forma muito superficial. Por isso vamos fazer uma discussão mais aprofundada utilizando duas outras excelentes referências

J. R. Pierce; Almost All About Waves (Cap. 4)

W. Panofskii and M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism (Cap.11)

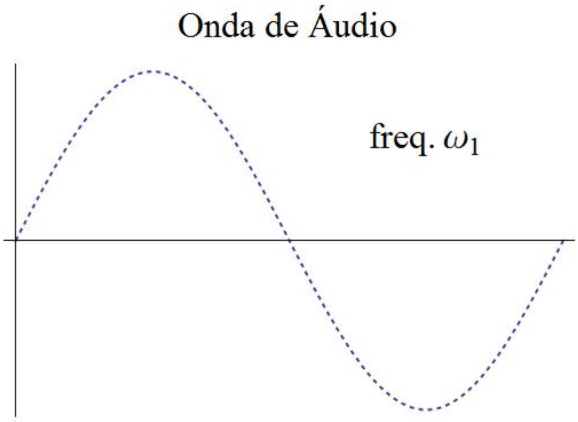
Introdução Simples: Sinal de Rádio Modulado em Amplitude

O primeiro esquema utilizado para transmitir sinais de áudio em rádio transmissão foi a modulação em amplitude (AM). Como os sinais de áudio são de baixa frequência, aproximadamente de 0 a 20kHz, os comprimentos de onda associados são muito longos, ou seja,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c}{2\pi f} = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{2\times 10^4} = 15km!$$

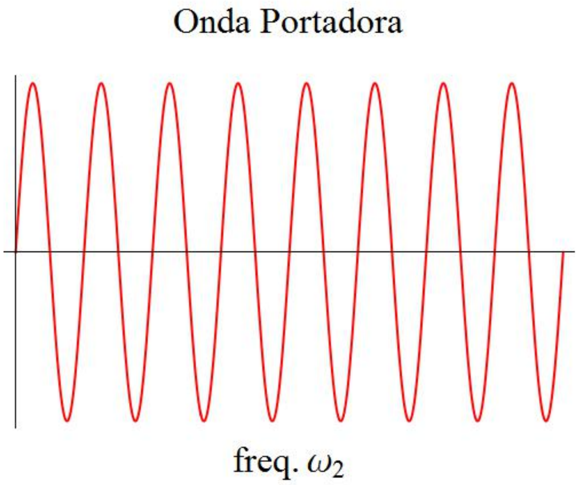
Como as antenas transmissoras e receptoras têm dimensões da ordem do comprimento de onda, não seria factível construir antenas para radio transmissão de ondas eletromagnéticas nesta faixa de frequências. A solução foi fazer com que o sinal de áudio fosse transmitido “montado” em um onda portadora de frequência muito maior. Por exemplo, nos rádios comuns a faixa de transmissão AM vai de cerca de $540k$Hz a $1,7M$Hz.

O esquema é relativamente simples, como esquematizado na figura ao lado. O sinal de áudio, originado por exemplo de um microfone, é multiplicado pelo sinal da portadora, produzindo um sinal de alta frequência, mas com amplitude variando de acordo com o sinal de áudio.



Consideremos então que o sinal modulado saia do amplificador, que consideramos localizado em $z = 0$. Neste ponto o sinal é dado por

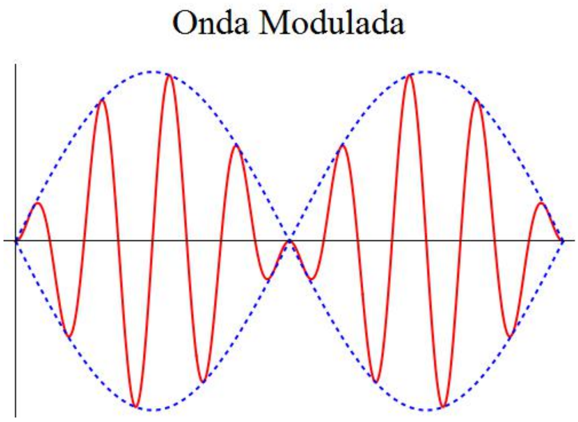
$$\psi(0,t) = Acos(\omega_1 t)cos(\omega_0 t)$$



onde A é a amplitude do sinal, ω_1 é a frequência de áudio e ω_0 é a frequência da portadora, tal que $\omega_1/\omega_0 \ll 1$. Usando a identidade trigonométrica

$$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$$

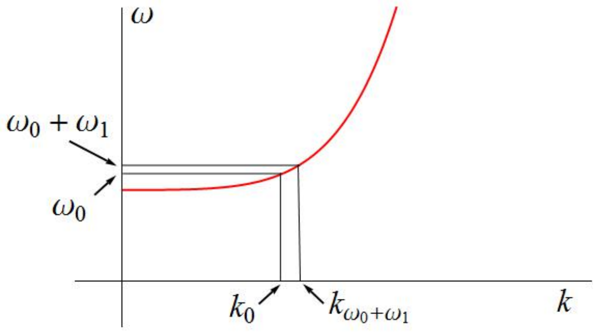
podemos escrever



$$\psi(0,t) =$$

$$= \frac{A}{2}\left[cos[(\omega_0+\omega_1)t] + cos[(\omega_0-\omega_1)t]\right]$$

Suponhamos agora que este sinal se propague ao longo de um capo coaxial até um receptor, localizado num ponto $z \neq 0$.



Acontece que, em uma linha de transmissão, a frequência ω pode variar com o número de onda k, conforme indicado na figura, de forma que $k_0 \neq k_{\omega_0+\omega_1}$. Como $\omega_1 \ll \omega_0$, podemos escrever os números de onda correspondentes às frequências $\omega_0 - \omega_1$ e $\omega_0 + \omega_1$ como

$$\omega_0 - \omega_1 \quad \Rightarrow \quad k_- = k_0 - \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_0 \omega_1$$

$$\omega_0 + \omega_1 \quad \Rightarrow \quad k_- = k_0 + \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_0 \omega_1$$

Então, após propagar uma distância z, o campo da onda será dado por

$$\begin{aligned} \psi(z,t) &= \frac{A}{2}\left\{cos\left[(\omega_0+\omega_1)t - \left(k_0 + \frac{dk}{d\omega}\omega_1\right)z\right] + \right. \\ &\qquad \left. cos\left[(\omega_0-\omega_1)t - \left(k_0 - \frac{dk}{d\omega}\omega_1\right)z\right]\right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \psi(z,t) &= \frac{A}{2}\left\{cos\left[(k_0 z - \omega_0 t) + \omega_1\left(t - \frac{dk}{d\omega}z\right)\right] + \right. \\ &\qquad \left. cos\left[(\omega_0 t - k_0 z) - \omega_1\left(t - \frac{dk}{d\omega}z\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

Usando novamente a relação para $cos(a)\,cos(b)$, temos

$$\boxed{\psi(z,t) = A cos\left[\omega_1\left(1 - \frac{dk}{d\omega}z\right)\right] cos\,(\omega_0 t - k_0 z)}$$

O segundo fator representa a onda portadora que se propaga com a velocidade de fase $v_f = \omega_0/k_0$. Já o primeiro termo representa a amplitude do sinal, que varia com z e t. A velocidade de propagação da amplitude é dada pela condição de que, nesta velocidade, a fase da amplitude permanece constante, ou seja, $\phi = \omega_1 \left(t - (dk/d\omega)z\right) =$ constante,ou

$$d\phi = \omega \left(dt - \frac{dk}{d\omega} dz \right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dk}}$$

Esta velocidade é denominada velocidade de grupo.