Mecânica Quântica — 7600022

Primeira Lista — teste no dia 20/3/2017

Problemas do Capítulo 1 do livro texto

1. As idades de um grupo de pessoas se dividem da seguinte forma: 1 pessoa com 14 anos, 1 com 15, 3 com 16, 2 com 22, 2 com 24 e 5 com 25. Denotamos $N(j)$ o número de pessoas com idade j. Assim, $N(16) = 3$.
   (a) Calcule $\langle j^2 \rangle$ e $\langle j \rangle^2$.
   (b) Determine $\Delta j \equiv j - \langle j \rangle$ para cada j e use a Eq. (1.11) to texto para calcular o desvio padrão.
   (c) Confira com isso a validade da Eq. (1.12).

2. Considere os 25 primeiros dígitos na expansão decimal de π (3,1,4,1,5,9,...).
   (a) Selecionado ao acaso um dígito desse conjunto, quais são é a probabilidade de resultar cada um dos 10 dígitos?
   (b) Qual o dígito mais provável? Qual é a mediana? Qual é a média?
   (c) Encontre o desvio padrão dessa distribuição.

3. O ponteiro do velocímetro danificado de um carro pode girar livremente e colide elasticamente com os pinos no final da escala, de forma que um pequeno empurrão resulta em probabilidade igual de parar em qualquer ângulo entre 0 e π.
   (a) Se $\rho \mathrm{d}\theta$ for a probabilidade que o ponteiro pare entre θ e $\theta + \mathrm{d}\theta$, qual é a densidade de probabilidade $\rho(\theta)$? Mostre $\rho(\theta)$ entre $\theta = -\pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ (Parte desse intervalo é inatingível; portanto $\rho = 0$ nessa região).
   (b) Calcule $\langle \theta \rangle$, $\langle \theta^2 \rangle$ e o desvio padrão.
   (c) Calcule $\langle \operatorname{sen} \theta \rangle$, $\langle \cos \theta \rangle$ e $\langle \cos^2 \theta \rangle$.

4. Mesmo dispositivo do problema anterior, mas agora estamos interessados na coordenada x (horizontal) da posição do ponteiro.
   (a) Qual a densidade de probabilidade $\rho(x)$? Trace o gráfico de $\rho(x)$ em função de x de $-2r$ a $2r$, onde r é o comprimento do ponteiro. No livro-texto há uma dica.
   (b) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e o desvio padrão da distribuição. Você poderia ter extraído esses resultados da parte (c) do problema anterior?

5. É dada a distribuição *Gaussiana*
$$\rho(x) = A e^{-\lambda (x-a)^2},$$
   onde A, a e λ são constantes.
   (a) Calcule A
   (b) Encontre $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e o desvio padrão.
   (c) Mostre $\rho(x)$ em gráfico.

6. No instante $t = 0$, uma partícula tem a função de onda
$$\psi(x,0) = \begin{cases} A\dfrac{x}{a} & (0 \le x \le a) \\ A\dfrac{b-x}{b-a}, & (a \le x \le b) \\ 0, & \text{(em outros pontos)}, \end{cases}$$
   onde A, a e b são constantes.

(a) Normalize ψ, isto é, encontre A em função de a e b.
(b) Desenhe $\psi(x, 0)$ em função de x
(c) Onde é mais provável encontrar a partícula, em $t = 0$?
(d) Qual a probabilidade de encontrar a partícula à esquerda de a. Verifique nos limites $b = a$ e $b = 2a$.
(e) Qual o valor médio esperado de uma série muito grande de medidas de x?

7. Considere a função de onda

$$\psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t},$$

onde A, λ e ω são constantes reais positivas.

(a) Normalize ψ.
(b) Determine os valores médios esperados de medidas de x e de x^2
(c) Encontre o desvio padrão σ de x. Mostre em gráfico $|\psi|^2$ em função de x e marque os pontos $(\langle x\rangle + \sigma)$ e $(\langle x\rangle - \sigma)$ para mostrar que σ representa a largura da distribuição em x. Qual a probabilidade de encontrar a partícula fora desse intervalo?

8. Seja $P_{ab}(t)$ a probabilidade de se encontrar a partícula no intervalo $(a < x < b)$ no instante t.

(a) Mostre que

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t),$$

onde

$$J(x, t) \equiv \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right).$$

Qual a unidade de $J(x, t)$? [J é chamada de *corrente de probabilidade*, porque mede a taxa com que a probabilidade flui pelo ponto x, como vimos em classe. $P_{ab}(t)$ cresce quando há mais probabilidade entrando numa extremidade da região do que saindo na outra.]

(b) Encontre a corrente de probabilidade para a função de onda no problema anterior.