Cálculo Numérico

· Prof. Eduardo Colli:

· PDF: Colli / Asano

· site: moodle do stoa

* P_1 (qui): 27/04
* P_2 (qui): 22/06
* Sub aberta (qui): 29/06

} 7,5

* Atividades de classe } 2,5

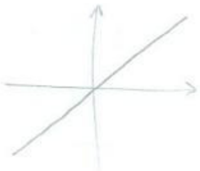
· Quatro blocos:

1 - interpolação polinomial e outras coisinhas
2 - mínimos quadrados
3 - integração numérica
4 - zeros de funções (solução equações)

13/03

Polinômios (de uma variável)

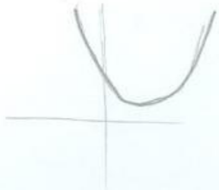
- Ex: $p(x) = x$



grau 1

grau 0 $\begin{cases} p(x) = 2 \\ p(x) = 0 \end{cases}$

grau 2 $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$



$a_2 > 0$

$a_2 < 0$

· notação:

$\mathcal{P}_n = \{ \text{polinômios de grau} \leq n \}$

$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_n x^n ; a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R} \}$

$p \in \mathcal{P}_n ; q \in \mathcal{P}_n \quad \underline{p + q \in \mathcal{P}_n}$

ou seja, se grau $(p) \leq n$, grau $(q) \leq n$, então grau $(p+q) \leq n$

Obs: Não é válido para grau exato:

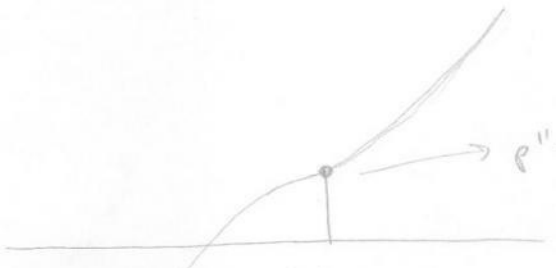
$$\begin{array}{lr} p = a + bx & (\text{grau } 1) \\ + \; q = a - bx & (\text{grau } 1) \\ \hline p + q = 2a & (\text{grau } 0) \end{array}$$

$\mathcal{P}_3$: $\longrightarrow p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

o que vocês sabem?

$a_3 > 0$

$a_3 < 0$



· Cadê os pontos críticos? Pode?

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + a_3 x^3$

· $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

$\longrightarrow$ pode ter 0, 1 ou 2 r

· Neste caso,

· Quantas raízes um polinômio $(\neq 0)$ de $\mathcal{P}_n$ ([redacted]) pode ter, no máximo?

$n = 0$

zero raízes

$n = 1$

1 raiz
(máx

$n = 2$

≤ 2 raízes

- Convencendo alguém:

- suponha que $p \in \mathcal{P}_2$ tenha 3 (ou mais) raízes: x_0, x_1, x_2

Teo. de Rolle: (TVM caso particular)

- entre x_0 e x_1, existe um pt. crítico de p
- entre x_1 e x_2 também

$\Rightarrow$ então p' tem (pelo menos) 2 raízes distintas

Mas $p' \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow$ tem no máximo 1 raiz

ou

$p' \equiv 0$ (é nulo) $\Rightarrow p$ é cte $\Rightarrow p = 0$

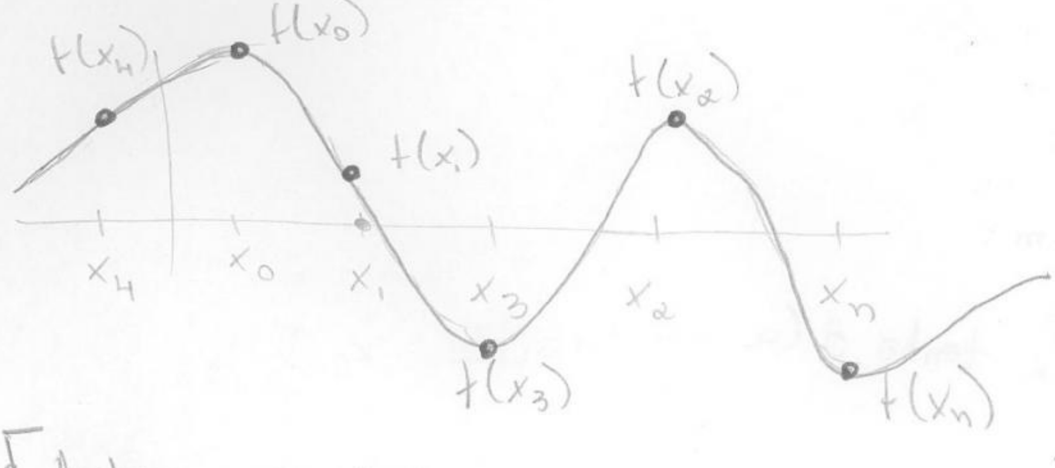
$\rightarrow$ por contradição, prova-se que a afirmação não é verdadeira!

Esse mesmo argumento mostra, indutivamente, que:

$\circledast$ $p \in \mathcal{P}_n$ ou é nulo ou tem, no máximo, n raízes.

Interpolação Polinomial

· Problema genérico



[Achar polinômio P que coincida com f nos pontos dados]

Obs: F

dois casos: ① "experimental"

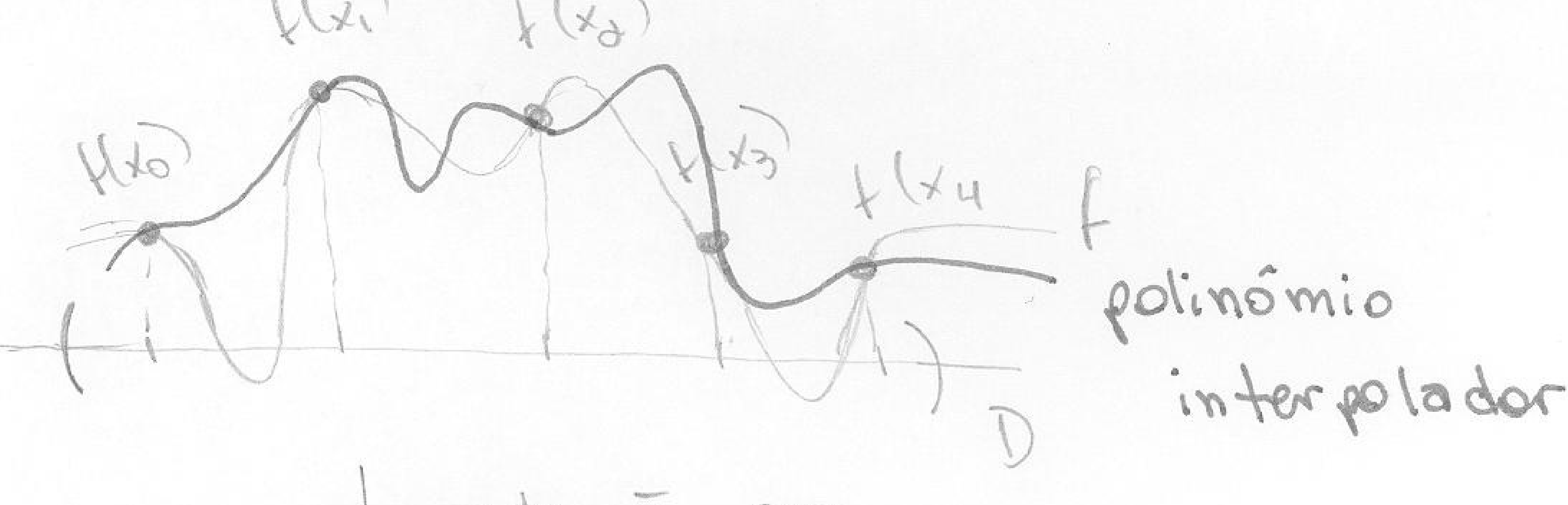
· Duas variáveis, x e y
tabela de dados:

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_n
$\shortparallel$	$\shortparallel$	$\shortparallel$		$\shortparallel$
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

② "teórico": $f: \underset{\subset \mathbb{R}}{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

· domínio D contém os pontos $x_0, x_1, \ldots x_n$.
com a "fórmula" de f, a tabela é calculada:

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$		$f(n)$



· pode n̄ ser o mesmo gráfico !