Escoamento incompressível, tubo rígido I

Balanço de massa:

$$\frac{\partial}{\partial s}(VA) = 0 \quad \Rightarrow \quad VA = Q(t)$$ vazão volumétrica constante na posição *s*

Balanço de momento linear:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}(\tau_{ss}\, A) - \tau_{ps}\frac{P_m}{A} + \rho\, g \,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\rho}{A}\left[\frac{dQ}{dt} + Q^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{A}\right)\right]$$

Integrando entre as posições 1 e 2, resulta:

$$\boxed{p_1 - p_2 + \frac{1}{2}\rho\, Q^2\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) + \rho\, g\,(z_1 - z_2) = \int_1^2 \tau_{ps}\frac{P_m}{A}ds + \rho\frac{dQ}{dt}\int_1^2 \frac{ds}{A} - \int_1^2 \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}(\tau_{ss}\, A)ds}$$

A queda de pressão está composta de quedas de pressão por energia potencial (gravidade), energia cinética (dinâmica), por atrito, por escoamento transiente e por tensões viscosas normais: $\Delta p = p_1 - p_2 = \Delta p_G + \Delta p_K + \Delta p_F + \Delta p_T + \Delta p_N$

$$\Delta p_G = -\rho\, g\,(z_1 - z_2) \qquad \Delta p_F = \int_1^2 \tau_{ps}\frac{P_m}{A}ds \qquad \Delta p_K = -\frac{1}{2}\rho\, Q^2\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$

$$\Delta p_T = \rho\frac{dQ}{dt}\int_1^2 \frac{ds}{A} \qquad \Delta p_N = -\int_1^2 \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}(\tau_{ss}\, A)ds$$

Escoamento incompressível, tubo rígido II

Altura piezométrica H_P e altura de energia H_E:

$$H_P = \frac{p}{\rho g} + z \qquad\qquad H_E = \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g}\frac{Q^2}{A^2} + z = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z$$

Para um escoamento incompressível, permanente e sem viscosidade, a altura de energia é constante ao longo de uma linha de corrente (**equação de Bernoulli**); se o escoamento for irrotacional, a constante é válida para todas as linhas de corrente. A altura de energia muda devido ao atrito, tensões normais e a efeitos transientes; a altura piezométrica muda, além, devido a variações de área.

A tensão cisalhante pode ser modelada com o fator de atrito de Darcy:

$$f\left(Re_{D_h}, \frac{e}{D_h}\right) = \frac{8\tau_{ps}}{\rho V|V|} = \frac{8A^2\tau_{ps}}{\rho Q|Q|} \qquad\qquad \Delta p_F = \int_1^2 \tau_{ps}\frac{P_m}{A}ds = \frac{1}{8}\rho Q|Q|\int_1^2 f\frac{P_m}{A^3}ds$$

onde f pode ser obtida de uma correlação para tubos, e:

$$Re_{D_h} = \frac{\rho|V|D_h}{\mu} = \frac{4\rho|Q|}{\mu P_m}$$

Resulta, finalmente:

$$\boxed{\Delta H_E = H_{E1} - H_{E2} = \frac{Q|Q|}{8g}\int_1^2 f\frac{P_m}{A^3}ds + \frac{1}{g}\frac{dQ}{dt}\int_1^2 \frac{ds}{A} - \frac{1}{\rho g}\int_1^2 \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}(\tau_{ss}A)ds}$$

Escoamento incompressível, tubo rígido III

Balanço de energia total:

$$-q_p\, P_c - \frac{\partial}{\partial s}(q\, A) + \rho\, A\Phi + Q\frac{\partial \tau_{ss}}{\partial s} = \rho\, A\frac{\partial \hat{e}}{\partial t} + \rho\, g\, Q\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\hat{e}}{g} + \frac{p}{\rho\, g}\right)$$

$$\frac{\hat{e}}{g} + \frac{p}{\rho\, g} = \frac{\hat{u}}{g} + \frac{V^2}{2\, g} + z + \frac{p}{\rho\, g} = H_E + \frac{\hat{u}}{g} \qquad \frac{\partial \hat{e}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{Q}{A^2}\frac{dQ}{dt}$$

Integrando, resulta:

$$\boxed{\Delta H_E = H_{E1} - H_{E2} = \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{g} - H_q + H_s + \frac{1}{g\, Q}\int_1^2 A\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}ds + \frac{1}{g}\frac{dQ}{dt}\int_1^2 \frac{ds}{A}}$$

onde:

$$H_q = \frac{1}{\rho\, g\, Q}\left[-\int_1^2 q_p\, P_c\, ds - (q_2\, A_2 - q_1\, A_1) + \rho\int_1^2 A\Phi\, ds\right] \qquad H_s = -\frac{1}{\rho\, g}(\tau_{ss2} - \tau_{ss1})$$

A energia envolvida na perda de altura de energia se transforma em variação de energia interna, calor intercambiado, trabalho contra esforços viscosos normais ou efeitos transientes térmicos e dinâmicos.

Escoamento incompressível, tubo rígido IV

Segundo Princípio da Termodinâmica:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} - \left[-\frac{q_p P_c}{A} \frac{T}{T_p} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s}(q A) + \frac{q}{T} \frac{\partial T}{\partial s} + \rho \Phi \right] \geq 0$$

$$\rho A \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \rho Q \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} - \left[-q_p P_c \frac{T}{T_p} - \frac{\partial}{\partial s}(q A) + \frac{A q}{T} \frac{\partial T}{\partial s} + \rho \Phi A \right] \geq 0$$

Dividindo por $\rho g Q > 0$, integrando e combinando com H_q resulta:

$$\frac{1}{g Q} \int_1^2 A \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} ds + \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{g} - H_q + \frac{1}{\rho g Q} \left[-\int_1^2 q_p P_c \left(\frac{T}{T_p} - 1 \right) ds + \int_1^2 \frac{A q}{T} \frac{\partial T}{\partial s} ds \right] \geq 0$$

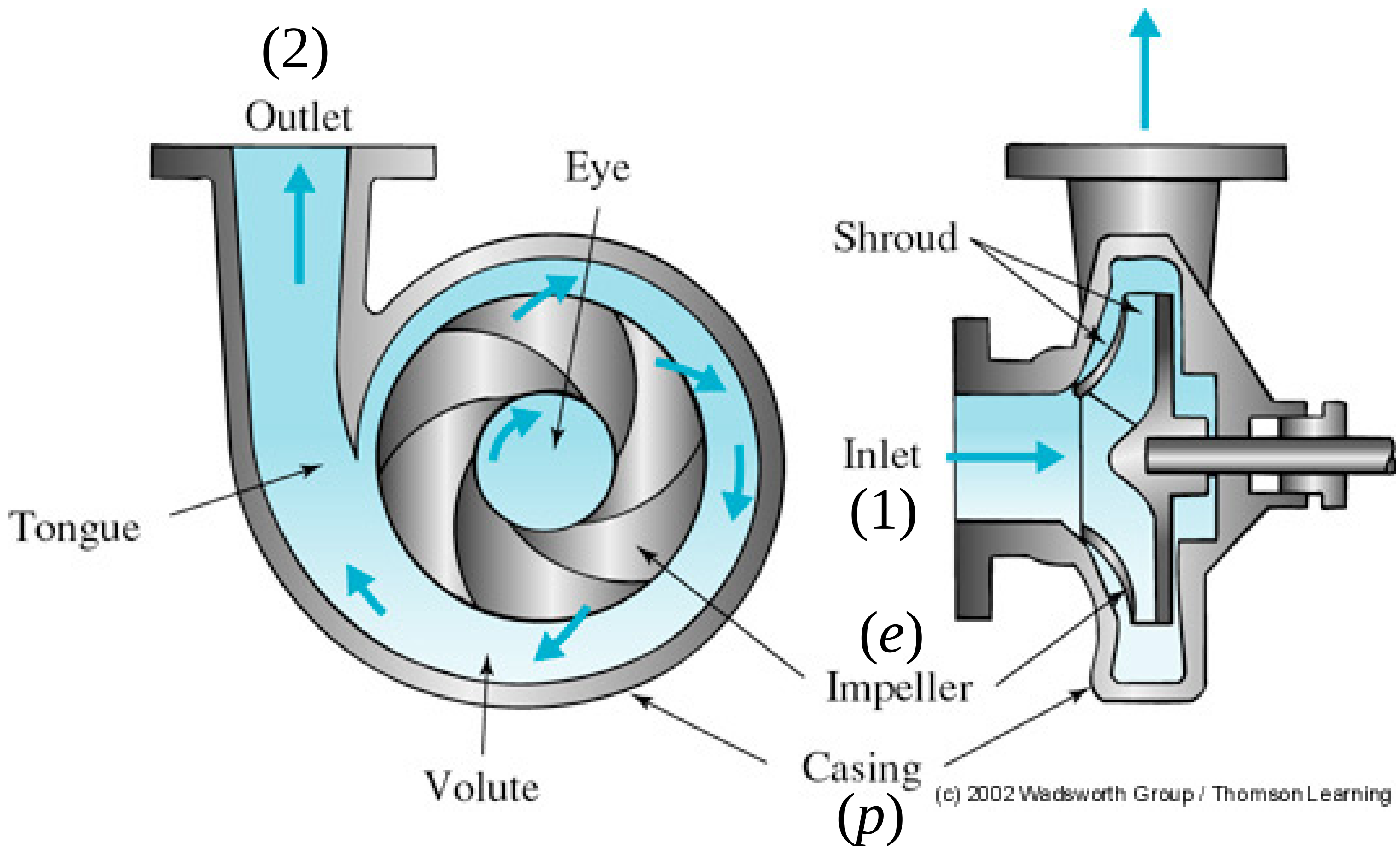
Combinando com o balanço de energia total, obtemos:

$$\boxed{\Delta H_E \geq H_s + \frac{1}{g} \frac{dQ}{dt} \int_1^2 \frac{ds}{A} + \frac{1}{\rho g Q} \left[\int_1^2 q_p P_c \left(\frac{T}{T_p} - 1 \right) ds - \int_1^2 \frac{A q}{T} \frac{\partial T}{\partial s} ds \right]}$$

Para um escoamento permanente e desprezando as tensões viscosas normais, a perda de altura de energia é sempre positiva.

Altura de energia em máquinas I

Em uma máquina, o escoamento é periódico. Aplicaremos as leis de conservação da massa, energia total e Segundo Princípio da Termodinâmica.



Consideramos quatro superfícies: entrada (1), saída (2), parede fixa (*p*) e eixo (*e*).

Altura de energia em máquinas II

Conservação da massa:

$$0=\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\,d\upsilon+\int_{A_1+A_2+A_p+A_e}\rho\,\boldsymbol{V}_r\,.\breve{\boldsymbol{n}}\,dA$$

Supondo que o escoamento médio no tempo é permanente, resulta:

$$\rho_2 V_{2n}\,A_2-\rho_1 V_{1n}\,A_1=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\rho_2 V_{2n}\,A_2=\rho_1 V_{1n}\,A_1=\dot m}$$ (vazão mássica)

Conservação da energia total: $\hat e=\hat u+\frac{1}{2}V^2+g\,z$

$$\dot Q-\dot W=\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\,\hat e\,d\upsilon+\int_{A_1+A_2+A_p+A_e}\rho\,\hat e\left(\boldsymbol{V}_r\,.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA$$

$$\boxed{\dot Q=-\int_{A_1+A_2+A_p+A_e}\boldsymbol{q}.\breve{\boldsymbol{n}}\,dA+\int_{VC}\rho\,\Phi\,d\upsilon}$$

$$\dot W=-\int_{A_1+A_2+A_p+A_e}\left(-p\,\breve{\boldsymbol{n}}+\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}.\breve{\boldsymbol{n}}\right).\boldsymbol{V}\,dA=\int_{A_1+A_2}p\left(\boldsymbol{V}\,.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA+\dot W_e+\dot W_v$$

onde: $$\int_{A_1+A_2}p\left(\boldsymbol{V}\,.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA=\int_{A_1+A_2}\left(\frac{p}{\rho}\right)\rho\left(\boldsymbol{V}\,.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA=\dot m\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

$$\boxed{\dot W_e=-\int_{A_e}\left(-p\,\breve{\boldsymbol{n}}+\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}.\breve{\boldsymbol{n}}\right).\boldsymbol{V}\,dA}$$

$$\boxed{\dot W_v=-\int_{A_1+A_2}\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}.\breve{\boldsymbol{n}}\right).\boldsymbol{V}\,dA=-\left(\tau_{nn2}\,V_{2n}\,A_2-\tau_{nn1}\,V_{1n}\,A_1\right)=-\dot m\left(\frac{\tau_{nn2}}{\rho_2}-\frac{\tau_{nn1}}{\rho_1}\right)}$$

Altura de energia em máquinas III

$$\int_{A_1+A_2+A_p+A_e} \rho\,\hat{e}\left(\boldsymbol{V}_r . \breve{\boldsymbol{n}}\right) dA = \int_{A_1+A_2} \rho\,\hat{e}\left(\boldsymbol{V}_r . \breve{\boldsymbol{n}}\right) dA = \dot{m}\left[\hat{u}_2 - \hat{u}_1 + \frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right)\right]$$

Substituindo e supondo escoamento periódico, obtemos finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_v - \dot{W}_e &= \dot{m}\left[\left(\hat{u}_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) - \left(\hat{u}_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right)\right] \\ &= \dot{m}\left[\hat{h}_2 - \hat{h}_1 + \frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right)\right] = \dot{m}\left(\hat{u}_2 - \hat{u}_1\right) - \dot{m}\, g\, \Delta H_E \end{aligned}}$$

onde $\hat{h} = \hat{u} + \dfrac{p}{\rho}$ é a **entalpia por unidade de massa** (entalpia específica).

Segundo Princípio da Termodinâmica: a equação diferencial de conservação da energia térmica é:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = -\nabla.\boldsymbol{q} - P\,\nabla.\boldsymbol{V} + \nabla\boldsymbol{V} : \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} + \rho\,\Phi$$

Onde $\nabla\boldsymbol{V} : \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ é a **função de dissipação viscosa.** Pelo Segundo Princípio da Termodinâmica:

$$\nabla\boldsymbol{V} : \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \nabla.\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}.\boldsymbol{V}\right) - \left(\nabla.\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}\right).\boldsymbol{V} \geq 0$$

Altura de energia em máquinas IV

Em conseqüência:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} \geq -\nabla.\boldsymbol{q} - P\nabla.\boldsymbol{V} + \rho\Phi$$

Levando em conta a equação de continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \boldsymbol{V}\right) = 0$

resulta: $$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \hat{u}\right) + \nabla.\left(\rho \boldsymbol{V}\,\hat{u}\right)$$

$$\int_{VC} \rho \frac{D\hat{u}}{Dt} d\upsilon = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \hat{u}\right) d\upsilon + \int_{A} \rho \hat{u}\ \boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \frac{DU}{Dt}$$

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \hat{u}\, d\upsilon + \int_{A_1+A_2+A_p+A_e} \rho \hat{u}\ \left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$

$$\int_{A_1+A_2+A_p+A_e} \rho \hat{u}\ \left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA = \dot{m}\left(\hat{u}_2 - \hat{u}_1\right)$$

Integrando os termos do lado direito da desigualdade e considerando escoamento periódico, resulta:

$$\boxed{\dot{m}\left(\hat{u}_2 - \hat{u}_1\right) \geq \dot{Q} - \int_{VC} p\left(\nabla.\boldsymbol{V}\right) d\upsilon}$$

Altura de energia em máquinas V

Combinando com a equação da energia total, resulta finalmente:

$$\boxed{\dot{m}\, g\, \Delta H_E \geq \dot{W}_v + \dot{W}_e - \int_{VC} p\left(\nabla . \boldsymbol{V}\right) d\upsilon}$$

Para escoamento incompressível, e supondo desprezíveis as potencias por esforços normais, a relação anterior fica:

$$\boxed{\dot{m}\, g\, \Delta H_E \geq \dot{W}_e}$$

Para um conduto o uma perda singular $(\dot{W}_e = 0)$, temos:

$$\boxed{\dot{m}\, \Delta H_E \geq 0}$$

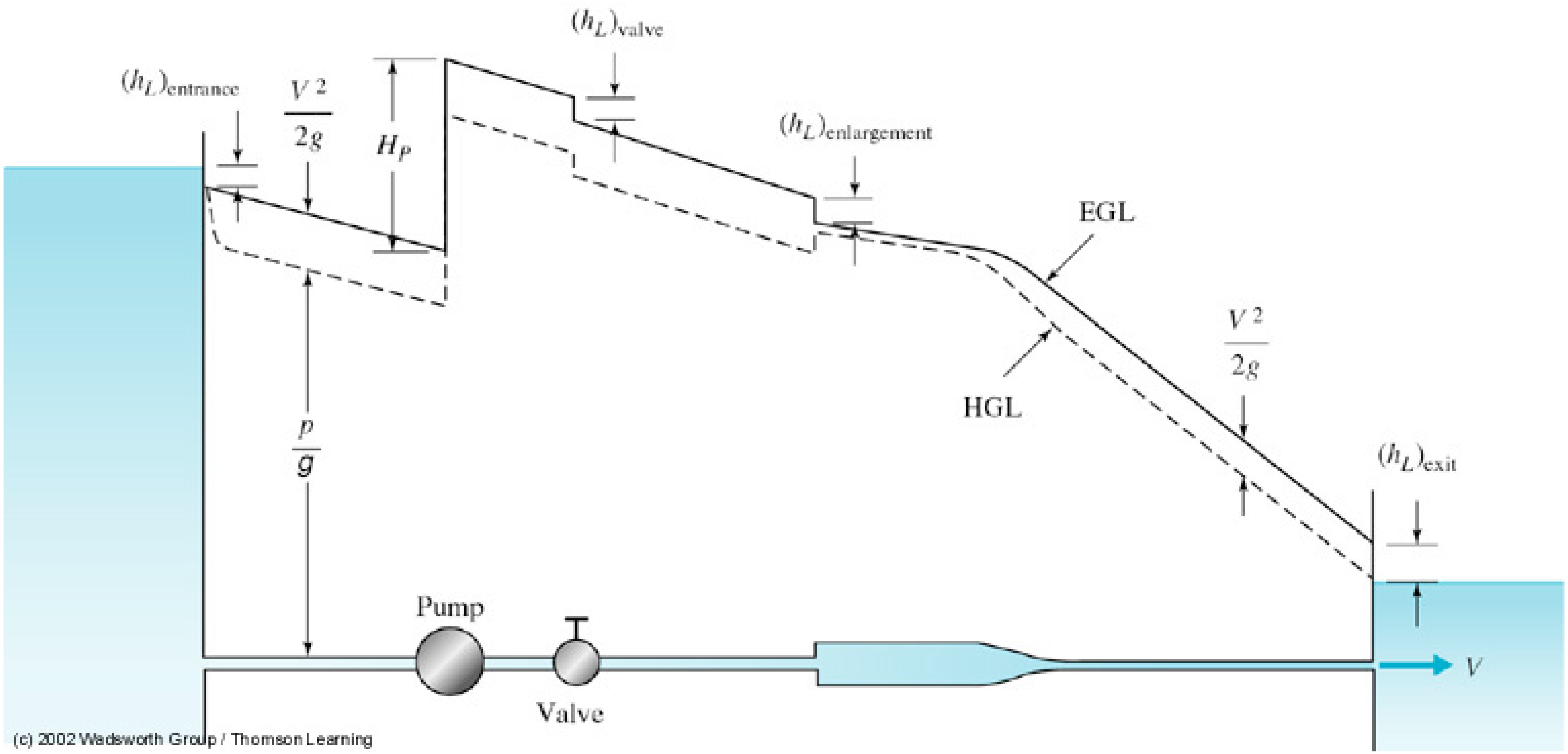
Para uma bomba, resulta $\dot{W}_e = -\dot{W}_B \leq 0$, de maneira que: $\dot{m}\, g \left(-\Delta H_E\right) \leq \dot{W}_B$

A eficiência da bomba resulta: $$\boxed{\eta_B = \frac{\dot{m}\, g \left(-\Delta H_E\right)}{\dot{W}_B} \leq 1}$$

Para uma turbina, resulta $\dot{W}_e = \dot{W}_T \geq 0$, de maneira que: $\dot{m}\, g\, \Delta H_E \geq \dot{W}_T$

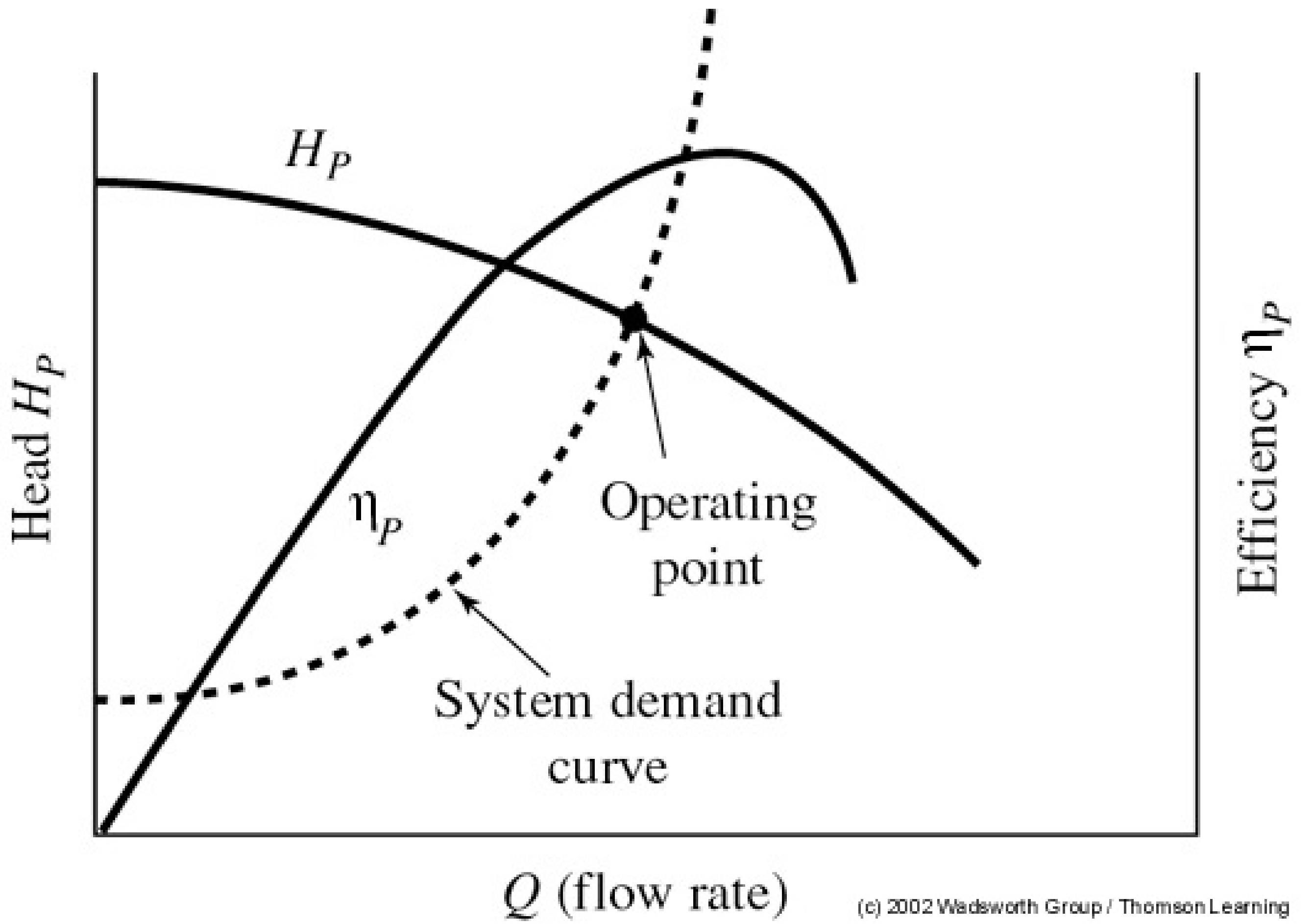
A eficiência da turbina resulta: $$\boxed{\eta_T = \frac{\dot{W}_T}{\dot{m}\, g\, \Delta H_E} \leq 1}$$

Altura piezométrica e de energia



Altura piezométrica e de energia em um sistema de dutos.

Curvas características de uma bomba



O ponto de operação é obtido na intersecção da curva de desempenho do sistema e a curva de altura de carga da bomba. A eficiência deve ser usada para calcular a potência requerida pela bomba.

Escoamentos em redes de tubulação I

Os escoamentos em sistemas de tubulação podem ser tratados por meio de uma analogia com os circuitos elétricos. Para escoamentos incompressíveis, as leis de nó (junção) e de malha são:

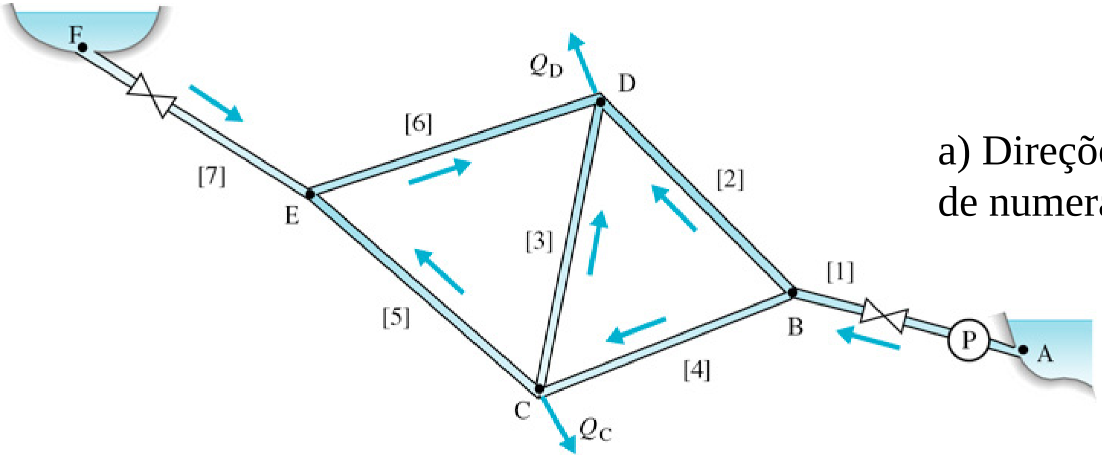
a) A soma algébrica das vazões volumétricas num nó é zero.

b) A soma algébrica das potencias ao longo de qualquer malha definida deve ser zero.

Uma dificuldade é a existência de perdas distribuídas e concentradas não lineares com a vazão. Para simplificar os cálculos, costuma-se supor:

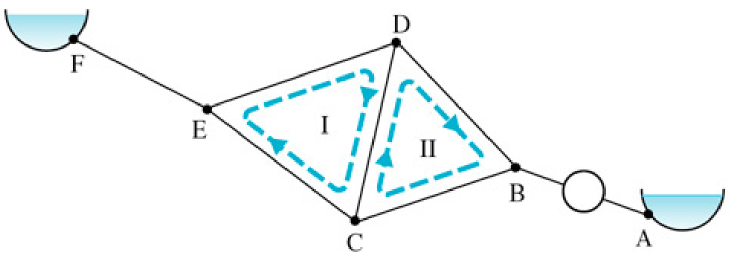
$$\frac{V^2}{2g} << \frac{p}{\rho g} + z$$

Escoamentos em redes de tubulação II



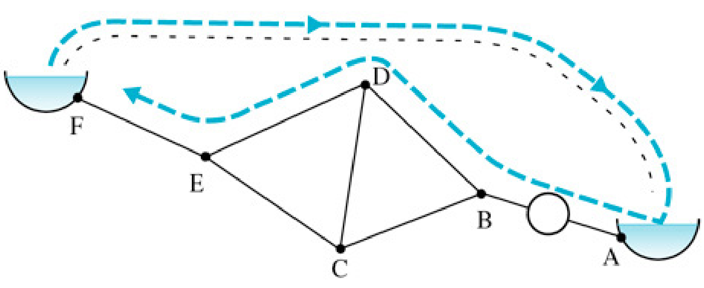
(a)

a) Direções de escoamento e esquemas de numeração hipotéticos.



(b)

b) Definição das malhas interiores.



(c)

c) Caminho entre dois nós de altura de pressão fixa.