

**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Química  
PQI-2201- Fenômenos de Transporte I**

**LISTA DE EXERCÍCIOS,  
QUESTIONÁRIOS E ANEXOS.**

**INFORMAÇÕES DESTE MATERIAL SÃO DA APOSTILA DE FENÔMENOS DE TRANSPORTE I DO  
PROFESSOR TAH WUN SONG**

### Lista de Exercícios Nº 1

*Problemas a serem discutidos em classe:*

(1) Um fluido newtoniano incompressível, de densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$ , escoam em estado estacionário, regime laminar, escoamento desenvolvido unidimensional, à temperatura constante, no interior de um tubo circular horizontal, de raio interno constante  $R$  e comprimento  $L$ . As pressões na entrada e na saída do tubo são iguais a  $P_1$  e  $P_2$  respectivamente.

Determinar (a) o perfil da tensão de cisalhamento; (b) a tensão de cisalhamento no centro do tubo; (c) o perfil de velocidade; (d) a velocidade no centro do tubo; (e) a velocidade média de escoamento; (f) a vazão volumétrica de escoamento; (g) a vazão mássica de escoamento; (h) As expressões obtidas valem para o escoamento num tubo vertical? Justificar todas as passagens da solução.

*Resposta:* (a)  $\tau = (P_1 - P_2)r/2L$ ; (b)  $\tau_c = 0$ ; (c)  $v = [(P_1 - P_2) R^2/4\mu L] [1 - (r/R)^2]$ ; (d)  $v_{max} = [(P_1 - P_2) R^2/4\mu L]$ ; (e)  $v_b = [(P_1 - P_2) R^2]/8\mu L$ ; (f)  $\phi = [(P_1 - P_2) \pi R^4]/8\mu L$ ; (g)  $w = [\rho (P_1 - P_2) \pi R^4]/8\mu L$

(2) Ensaios são feitos para o levantamento da curva característica de uma bomba centrífuga, usando-se água à temperatura ambiente. Medem-se a vazão de escoamento, ajustada por meio de uma válvula globo, e o correspondente aumento de pressão pela bomba. A curva obtida é a mostrada na figura 13-5 do livro-texto, onde a vazão é em gpm (galões por minuto) e o aumento de pressão em psi.

Estimar a potência suprida à bomba quando a vazão de escoamento é de  $10 \text{ m}^3/\text{min}$ . (Problema 4-17 do livro-texto).

*Resposta:* Potência = - 34300 W.

(3) Água é bombeada de um reservatório, à temperatura de  $23^\circ\text{C}$ , até um nebulizador, localizado no topo de uma torre de absorção. A tubulação é em aço carbono, de 3" Schedule N° 40. Pode-se admitir que o perfil de velocidades na tubulação é achatado e que a troca de calor com o ambiente é desprezível. A diferença de cotas entre a superfície livre de água no reservatório e a saída do nebulizador é de 30 m. A pressão relativa na entrada do nebulizador é de  $0,21 \text{ kgf/cm}^2$ . A vazão de escoamento é de  $0,75 \text{ m}^3/\text{min}$ . A potência fornecida à bomba é de 14 CV.

Determinar a temperatura da água ao entrar no nebulizador. (Problema 4-3 do livro-texto).

*Resposta:*  $T_2 = 23,12^\circ\text{C}$

(4) Água é descarregada na base de um tanque grande, onde a pressão relativa é de  $3,5 \text{ kgf/cm}^2$ , e é bombeada para um bocal aberto a atmosfera. O bocal está localizado a 15 m acima da base do tanque. A vazão de escoamento é de  $45 \text{ kg/s}$ . A velocidade média no bocal é de  $20 \text{ m/s}$ . A potência suprida ao eixo da bomba é de 10 CV. O rendimento da bomba é de 75%.

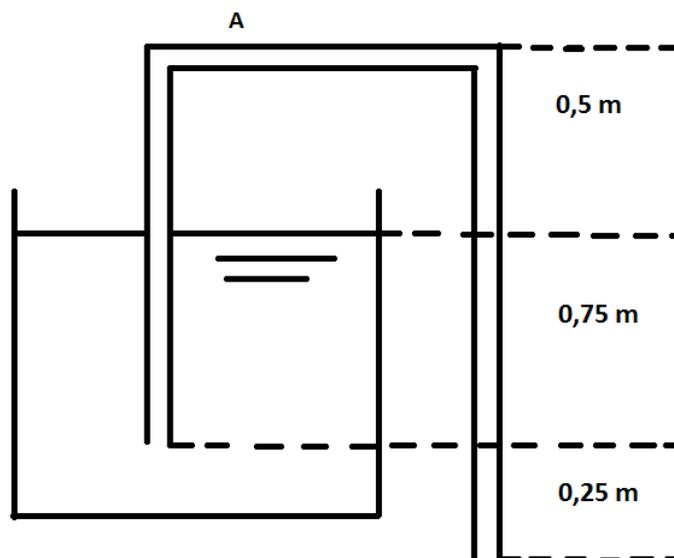
Determinar a perda de energia devida ao atrito, por unidade de massa, na bomba e no restante do sistema. (Problema 4-10 do livro-texto).

*Resposta:*  $l_{wf} = 119 \text{ J/kg}$ ;  $l_{wp} = 41 \text{ J/kg}$ .

*Problemas a serem resolvidos fora de classe:*

(5) Deseja-se retirar água de um recipiente aberto a atmosfera (pressão atmosférica = 101325 Pa), conforme o esquema abaixo. A temperatura do sistema é de 20°C. O diâmetro interno do tubo usado no sifão é de 0,5 cm. Pode-se desprezar o atrito no escoamento.

(a) Determine a vazão de escoamento. (b) Determinar a pressão no ponto A (ver esquema a seguir). (c) Há restrição para o valor do desnível entre o ponto A (o ponto mais alto do sifão) e o nível de água no recipiente? Por quê?



*Resposta: (a)  $w = 0,087 \text{ kg/s}$ . (b)  $P_A = 86625 \text{ Pa (abs)}$ ; (c) Sim*

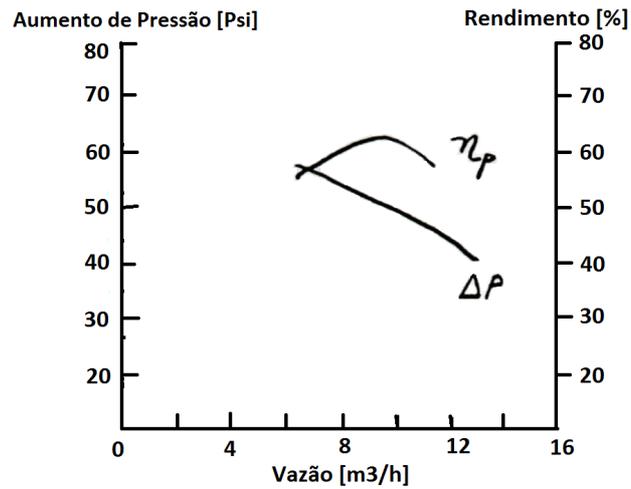
(6) Um fluido newtoniano de densidade relativa igual a 0,998 e viscosidade de 0,8 cP, escoam em regime permanente, laminar, num tubo circular horizontal de diâmetro interno igual a 0,003 in. A velocidade no centro do tubo é de 0,01 m/s.

(a) Determinar a tensão de cisalhamento na parede interna desse tubo. (b) Haveria alteração na solução do problema se o escoamento fosse turbulento? Justificar.

*Resposta: (a)  $\tau_s = 0,0107 \text{ Pa}$ ; (b) sim.*

(7) Uma bomba centrífuga cuja curva característica está mostrada a seguir é usada para transportar água a 20°C, de um reservatório a outro, com vazão de 10 m<sup>3</sup>/h. Tanto o reservatório de alimentação como o de recebimento são abertos a atmosfera, com níveis de líquido mantidos constantes. A altura de água no tanque de alimentação é desprezível. A tubulação é em aço carbono, de 1<sup>1/2</sup>" Schedule N° 40. A perda de energia por atrito no sistema (em J/kg), excluindo-se a bomba, é dada por 1,54 L, onde L é o comprimento total da tubulação (em metros). Como o trecho na sucção (entrada) da bomba é muito curto e não há praticamente trechos horizontais no recalque (saída) da bomba, pode-se admitir que L é o próprio desnível entre a saída da bomba até a descarga da tubulação.

Determinar o valor desse desnível. Justificar sucintamente as passagens da solução.



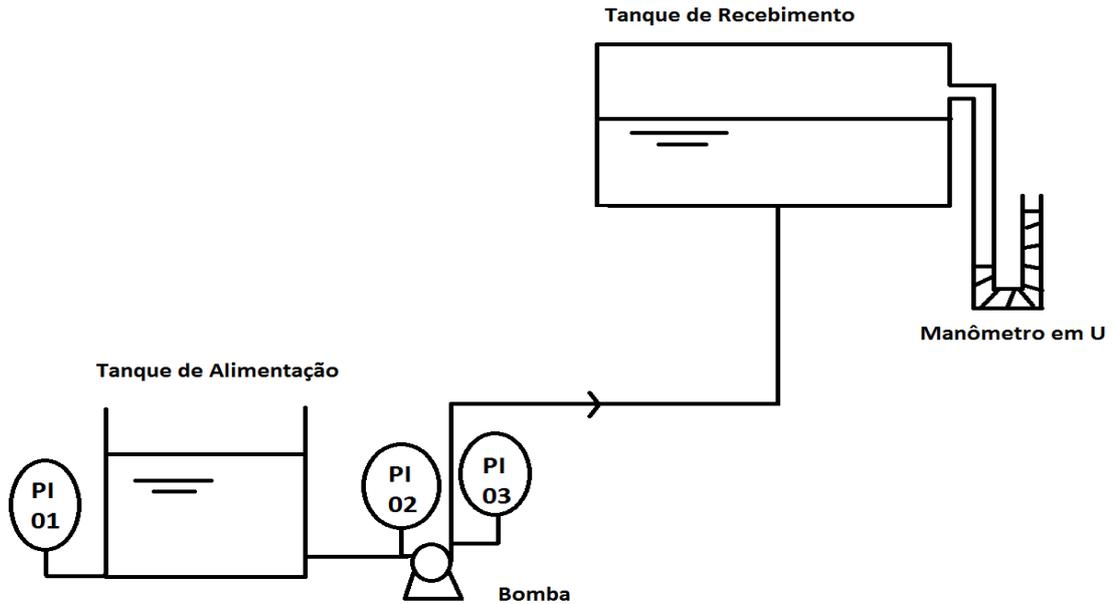
Resposta:  $H = 30,4m$

(8) Água a  $20^{\circ}C$  é bombeada à vazão de  $11,4 \text{ m}^3/h$ , de acordo com o esquema mostrado a seguir. O tanque de alimentação é aberto a atmosfera e o tanque de recebimento é pressurizado. A tubulação é em aço carbono, sendo a parte antes da bomba de  $2^{1/2}$ " Sch N°40 e a parte depois da bomba de 2" Sch N°40. A diferença de cotas entre a entrada da bomba e a superfície livre de água no tanque de recebimento é de 10 m. As leituras dos indicadores de pressão (PI) instalados no sistema são as seguintes:

Indicador de Pressão	Leitura (kPa relativa)
PI-01 (base do tanque de alimentação)	10,0
PI-02 (imediatamente antes da bomba)	8,5
PI-03 (imediatamente depois da bomba)	175,0

A densidade relativa do fluido manométrico usado no manômetro em U, para medir a pressão no tanque de recebimento, é de 13,6 e o seu desnível é de 0,5 m.

Determinar a perda de potência por atrito na tubulação.



Resposta: Perda de potência = 36W

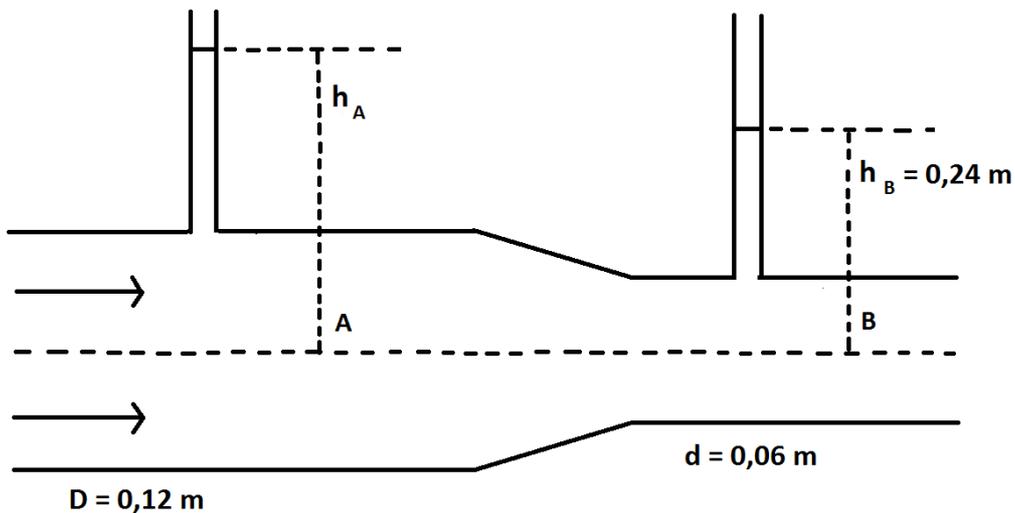
(9) Um fluido newtoniano de densidade igual a  $1,32 \text{ g/cm}^3$  e viscosidade igual a  $18,3 \text{ cP}$  está escoando num tubo reto horizontal, de raio interno de  $0,21 \text{ in}$ .

Para que diferença de pressão por comprimento de tubo, o escoamento deixa de ser laminar? Admitir que o número de Reynolds de transição seja igual a 2100.

Resposta:  $-\Delta P/L = 1430 \text{ (dina/cm}^2\text{)/cm}$

(10) Um líquido escoar de uma seção A para B, num tubo horizontal, de acordo com o esquema mostrado a seguir. A vazão de escoamento é de  $0,02 \text{ m}^3/\text{s}$ . A dissipação de energia devido ao atrito entre as duas seções consideradas é de  $5 \text{ J/kg}$ .

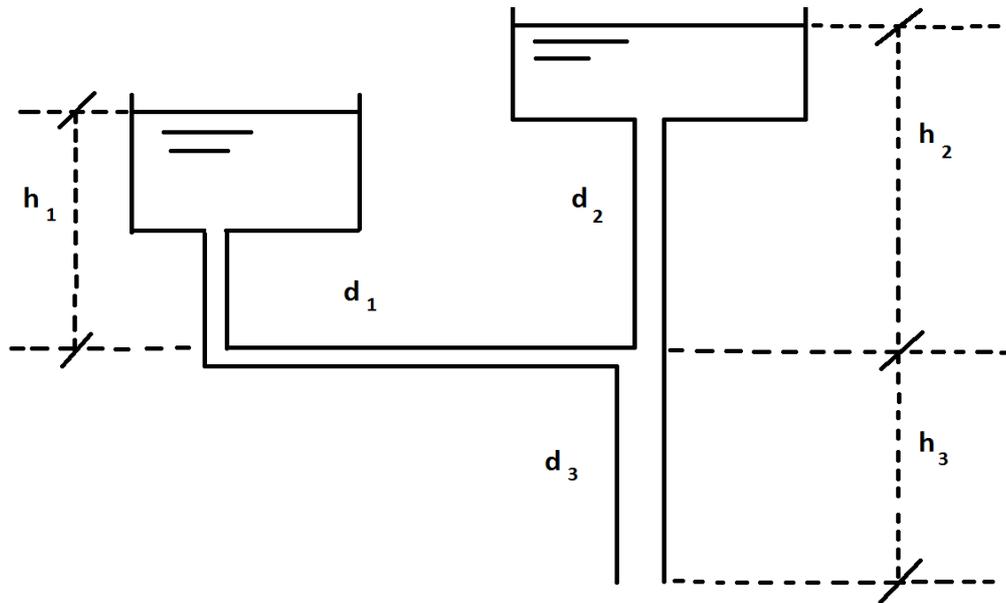
Qual o valor da altura  $h_A$ ? Justificar sucintamente as passagens da solução.



Resposta:  $h_A = 3,14 \text{ m}$

(11) Os escoamentos a partir de dois reservatórios, abertos a atmosfera, juntam-se e o escoamento resultante é descarregado através de um tubo comum, cuja saída também é atmosférica. Os diâmetros internos dos tubos e as cotas estão indicados no esquema a seguir.

Desprezando-se o atrito no sistema e sabendo-se que os dois reservatórios contêm o mesmo líquido, determinar a vazão volumétrica na descarga do tubo comum.



Resposta:  $\phi = \pi (2g)^{0,5} [r_1^2 (h_1 + h_3)^{0,5} + r_2^2 (h_2 + h_3)^{0,5}]$ .

(12) Um fluido newtoniano incompressível, com perfil de velocidades constante, entra num tubo de raio interno R. A vazão mássica w. Numa secção distante da entrada, o escoamento está totalmente desenvolvido, em regime laminar. A velocidade média de escoamento é  $v_b$ .

Determinar a variação de energia cinética total entre a entrada e essa secção, considerando-se os perfis de velocidade específicos em cada secção. Justificar sucintamente as etapas da solução.

Resposta:  $\Delta E_C = [wv_b^2]/2$

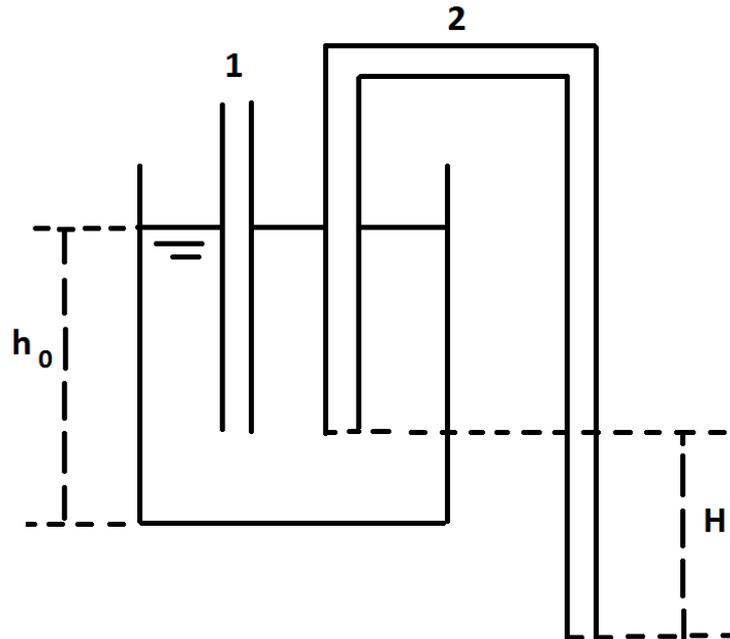
(13) Um fluido newtoniano, incompressível, de densidade  $\rho$  e viscosidade dinâmica  $\mu$ , escoam em regime permanente, laminar, sobre uma placa plana, inclinada de ângulo  $\beta$  com a vertical. O comprimento da placa é L e a sua largura W. A espessura do filme de fluido sobre a placa é  $\delta$ . A temperatura do escoamento é constante.

(a) A partir de um balanço de forças, deduzir a expressão do perfil de velocidades. (b) Obter a expressão da velocidade média. (c) Obter a expressão da força do fluido sobre a superfície da placa. Justificar todas as passagens das deduções.

Resposta: (a)  $v = [\rho g \delta y \cos\beta/\mu] [1 - (y/2\delta)]$ ; (b)  $v_b = \rho g \delta^2 \cos\beta/3\mu$  (c)  $F = \rho g \delta LW \cos\beta$

(14) Um dispositivo muito usado, em escoamento por gravidade, para se ter uma vazão mais ou menos constante, quando esta não é muito elevada, é o frasco de Mariotti, cujo esquema está mostrado a seguir. O frasco é fechado e contém um líquido de densidade constante, até a altura inicial  $h_0$ . Pelo tubo 1, entra ar atmosférico. O ar borbulha no líquido, na base desse tubo e, portanto, o tubo 1 é todo preenchido de ar. Pelo tubo 2, o líquido escoam por meio do sifão formado. A diferença de cotas entre a entrada do tubo 2 e a sua saída (que é atmosférica) é mantida fixa e igual a H. A diferença de cotas entre a entrada do tubo 2 e o ponto mais alto do sifão também é mantida fixa. Por simplificação do problema, como a vazão não é elevada, todo o atrito no sistema pode ser desprezado.

Demonstrar que a vazão de escoamento pelo sifão é constante, mesmo que a altura da superfície livre de líquido abaixe com o tempo. Qual a situação limite para a vazão permanecer constante?



(15) Carregam-se, numa unidade de destilação descontínua, 150 moles de uma mistura líquida que contém 60% em moles de benzeno e 40% de tolueno. A equação que relaciona as frações molares de benzeno no vapor removido do sistema ( $y_A$ ) e no líquido remanescente no recipiente ( $x_A$ ) é dada por  $y_A = \alpha x_A / [1 + (\alpha - 1) x_A]$ , onde  $\alpha$  é a volatilidade relativa entre benzeno e tolueno, admitida constante e igual a 2,57.

Qual a composição do destilado coletado, se a destilação é conduzida até que sobrem 30 moles de líquido no recipiente de carga? (Problema 3-2 do livro-texto).

Resposta:  $x_D = 0,69$ .

(16) Num escoamento desenvolvido, em regime turbulento, no interior de um tubo circular liso, o número de Reynolds é igual a 110000 e o perfil de velocidades numa secção transversal é dado por  $v = v_{\max} [(r_i - r)/r_i]^{1/7}$ , onde  $r_i$  é o raio interno do tubo,  $r$  é a distância do centro do tubo ao ponto considerado e  $v_{\max}$  é a velocidade máxima desse perfil.

Obter a relação  $v_b/v_{\max}$ , sendo  $v_b$  a velocidade média de escoamento. Sugestão: Substituir  $(r_i - r)$  pela variável  $y$ , para simplificar a integração. (Problema 3-3 do livro-texto).

Resposta:  $v_b/v_{\max} = 0,817$ .

(17) Vapor d'água entra num tubo reto, longo, em aço carbono de 3 polegadas de diâmetro nominal e N° de Schedule 40, com uma pressão absoluta de 14 kgf/cm<sup>2</sup>, temperatura de 315,5°C e velocidade média de escoamento igual a 3,0 m/s. Num dado ponto distante da entrada, a pressão absoluta passa para 10 kgf/cm<sup>2</sup> e a temperatura é igual a 315,0°C.

Qual a velocidade média de escoamento nesse ponto? Calcular também o número de Reynolds nesse ponto e na entrada do tubo. Admitir regime permanente. (Problema 3-5 do livro-texto)

Resposta:  $v_{b2} = 4,13 \text{ m/s}$ ;  $Re_2 = 56600$ ;  $Re_1 = 56500$ .

(18) O perfil de velocidade no escoamento de água, entre duas placas planas paralelas (ver figura 10-1 do livro-texto, apresentada na apostila da disciplina) é dado pela relação  $v = v_{\max} = [1 - (y/y_0)^2]$ . Não há escoamento nem variação de propriedades na direção  $z$ .

Usando-se a equação do perfil de velocidades, deduzir a relação  $v_b/v_{\max}$  para esse sistema, onde  $v_b$  é a velocidade média de escoamento. (Problema 3-7 do livro-texto).

Resposta:  $v_b = 0,667 v_{\max}$ .

(19) Uma bomba à vácuo opera de modo que a vazão volumétrica de sucção do gás, baseada nas condições de entrada, seja constante.

Para uma vazão de  $0,01 \text{ m}^3/\text{min}$ , quanto tempo levará para esvaziar um tanque de  $0,1 \text{ m}^3$  que contém ar, abaixando a sua pressão absoluta de  $1 \text{ atm}$  até  $0,01 \text{ atm}$ ? O processo é suficientemente lento de modo que se pode considerar a temperatura do gás no tanque como constante. (Problema 3-8 do livro-texto).

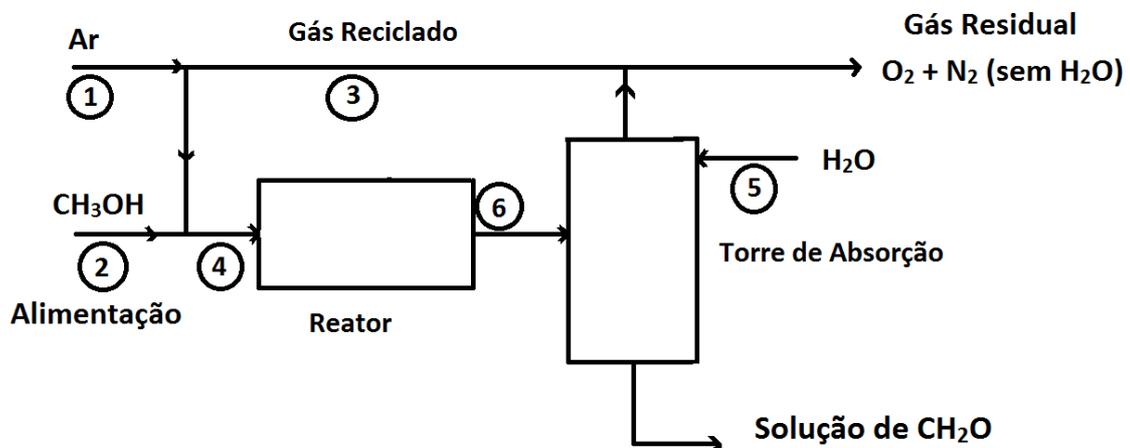
Resposta:  $\theta = 46 \text{ min}$ .

(20) Formaldeído é produzido a partir da oxidação parcial de metanol, segundo a reação química  $\text{CH}_3\text{OH} + \frac{1}{2}\text{O}_2 \rightarrow \text{CH}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$ . A mistura de gás alimentado no reator (corrente 4 no esquema mostrado a seguir) contém 8% em moles de metanol e 10% de oxigênio. O metanol alimentado é completamente convertido a formaldeído no reator, o qual contém um leito de partículas do catalisador  $\text{Fe}_2\text{O}_3 \text{ MoO}_3$ .

Calcular as composições e as vazões molares das correntes 1, 2, 3, 4 e 5, necessárias à fabricação de  $30 \text{ kg/s}$  de uma solução de formaldeído, de concentração igual a 37 % em massa. (Problema 3-10 do livro-texto).

Resposta:

Corrente	Vazão (kmol/s)	Fração molar
1	1,22	$\text{O}_2 = 0,21; \text{N}_2 = 0,79$
2	0,37	$\text{CH}_3\text{OH} = 1,0$ .
3	3,04	$\text{O}_2 = 0,068; \text{N}_2 = 0,932$ .
4	4,62	$\text{O}_2 = 0,1; \text{CH}_3\text{OH} = 0,08; \text{N}_2 = 0,82$ .
S	0,68	$\text{H}_2\text{O} = 1,0$ .



(21) Vapor d'água expande através de um bocal convergente adiabático, entrando com a velocidade média de 60 m/s, pressão absoluta de 25 kgf/cm<sup>2</sup> e temperatura de 315°C.

Calcular a velocidade média de escoamento do vapor d'água no local onde o bocal afunila, sabendo-se que, neste ponto, a pressão absoluta do vapor é de 15 kgf/cm<sup>2</sup> e a temperatura é de 240°C. Pode-se admitir que o perfil de velocidades é achatado em todas as secções ao longo do bocal. (Problema 4-4 do livro-texto).

*Resposta:*  $v_{b2} = 538 \text{ m/s}$ .

(22) Um gás escoo no interior de uma tubulação horizontal de 3" Schedule N° 40, com uma vazão constante de 0,3 kg/s. O gás encontra-se à temperatura de 20,0°C e pressão absoluta de 1,15 atm e tem peso molecular igual a 29. A tubulação é envolta por uma serpentina de aquecimento elétrico, com potência de 80 kW, a qual por sua vez é coberta com uma espessa camada de isolante térmico. No ponto de descarga, a pressão absoluta do gás é de 1,05 atm.

Determinar a temperatura do gás nesse ponto. Considerar que o gás tem comportamento ideal e que seu calor específico é de 0,24 kcal/(kg.°C). (Problema 4-5 do livro-texto).

*Resposta:*  $T = 283^\circ\text{C}$ .

(23) Água sai da base de um tanque grande onde a pressão relativa é de 7 kgf/cm<sup>2</sup>, e escoo através de um tubo conectado à sua base. Em seguida, passa por uma turbina que produz 5,82 CV. A tubulação de saída da turbina está a 18 m abaixo da base do tanque. Nessa tubulação, a pressão relativa é de 3,5 kgf/cm<sup>2</sup>, a velocidade média de escoamento de 20 m/s e vazão igual a 45 kg/s.

Sabendo-se que a perda de energia por atrito no sistema, exceptuando-se a na turbina, é igual a 13 kgf.m/kg, calcular o rendimento da turbina. (Problema 4-11 do livro-texto).

*Resposta:*  $\eta_t = 50 \%$ .

(24) Um tanque cilíndrico isolado termicamente, com diâmetro interno de 60 cm, está cheio de água a 25°C, até uma altura de 60 cm. Adiciona-se ao tanque água a 80°C, à vazão de 45 kg/min, até que a altura de líquido seja de 1,8 m. O conteúdo no tanque está, em qualquer instante, bem homogeneizado.

(a) Quanto tempo se levará para que o tanque atinja a altura final e qual a temperatura da água no tanque nesse instante?

(b) Para acelerar o aquecimento da água, uma serpentina é colocada no interior do tanque, por onde circula vapor d'água saturado. A taxa de calor fornecida pode ser calculada de acordo com a expressão:

$$Q = UA(T_{\text{VAPOR}} - T)$$

Onde Q é a carga térmica suprida ao tanque (kcal/h), U é o coeficiente global de troca térmica igual a 245 kcal/(h.m<sup>2</sup>.°C), A é a área de troca térmica igual a 2,8 m<sup>2</sup>, T<sub>VAPOR</sub> é a temperatura do vapor d'água de aquecimento igual a 110°C e T é a temperatura da água no tanque, variável ao longo do processo.

Qual será a nova temperatura final, quando a altura de água é de 1,8 m? (Problema 4-16 do livro-texto).

*Resposta:* (a)  $\theta = 7,54 \text{ min}$ ,  $T_1 = 61,7^\circ\text{C}$ ; (b)  $T_2 = 70,7^\circ\text{C}$ .

**Lista de Exercícios N° 2**

*Problemas a serem discutidos em classe:*

(1) Um medidor de vazão de placa de orifício, com tomadas de pressão do tipo flange, é instalado numa tubulação em aço carbono de 4" Schedule N° 40, para medir a vazão de uma fração de petróleo a 40°C (densidade relativa = 0,88; viscosidade = 5,45 cP). Um trecho adequado de tubo reto horizontal antecede o medidor. A vazão máxima esperada é de 12000 barris/dia (1 barril = 42 USgal; 1 USgal = 3,785 litros). A queda de pressão pelo medidor de orifício é lida através de um manômetro em U. Usa-se mercúrio (densidade relativa = 13,6) como fluido manométrico e glicol (densidade relativa = 1,11) como fluido de selo. A máxima leitura desse manômetro é de 75 cm.

Determinar o diâmetro do orifício e a perda de potência no medidor.

*Resposta:  $D_o = 5,5\text{cm}$ ; perda de potência = 2 CV.*

*Problemas a serem resolvidos fora de classe:*

(2) A escala de um rotâmetro tem 25 divisões. O flutuador é de um material de construção desconhecido e o seu volume também é desconhecido. Num teste de calibração, faz-se passar ar. A vazão medida pelo método direto foi de 85 L em 122 s. Foram obtidos os seguintes dados no teste: temperatura do ar = 33 °C; pressão estática relativa = 5,21 cm de água; pressão barométrica absoluta = 74,90 cmHg; leitura no rotâmetro = 13; peso do flutuador no ar = 4,62 gf; peso do flutuador na água = 2,96 gf; diâmetro do flutuador = 1,27 cm; diâmetro do topo do rotâmetro = 1,6464 cm; diâmetro do fundo do rotâmetro = 1,3025 cm.

Determinar o coeficiente do rotâmetro. (Problema 6-8 do livro-texto).

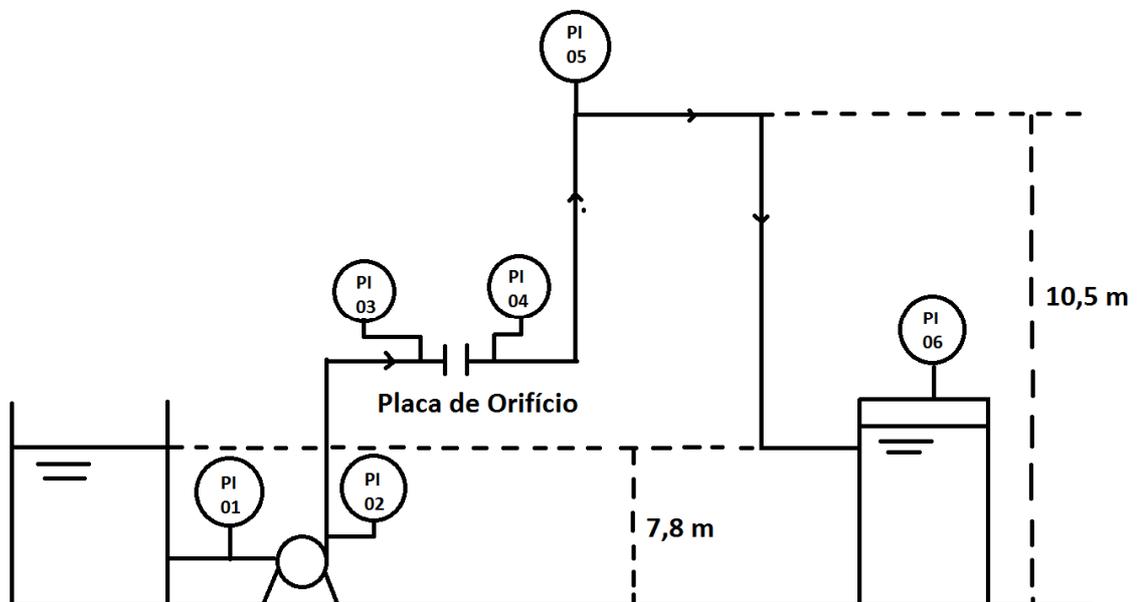
*Resposta:  $C_r = 0,61$ .*

(3) Água a 40°C é bombeada, em regime permanente, através do esquemamostrado a seguir. A densidade da água a 40°C pode ser adotada igual a 1000 kg/m<sup>3</sup>. O tanque de alimentação é aberto à atmosfera e o nível da superfície livre é mantido constante. O nível de água nesse tanque e a saída da tubulação no tanque de recebimento estão na mesma cota (7,8 m) em relação ao solo. A relação entre o aumento de pressão pela bomba ( $\Delta P$ ) e a vazão de líquido ( $\Phi$ ) é dada por  $\Delta P = 6 \times 10^5 - 3,96 \times 10^6 \Phi$ , onde  $\Delta P$  é expresso em Pa e  $\Phi$  em m<sup>3</sup>/s. A cota da bomba em relação ao solo é praticamente nula. Toda a tubulação é em aço carbono, de 2" Schedule N° 40. Ao longo da tubulação, estão colocados vários medidores de pressão (PI - "pressure indicator"). No sistema, está instalado um medidor de vazão com placa de orifício, com tomadas de pressão do tipo canto. Os instrumentos PI-03 e PI-04 estão instalados imediatamente antes e depois da placa de orifício respectivamente. O diâmetro do furo da placa é de 0,021 m. A perda de energia por atrito, excluída a parte perdida no medidor de vazão, no trecho da tubulação entre a saída da bomba e o ponto onde está localizado o manômetro PI-05, é de 40 J/kg. A cota desse ponto é de 10,5 m em relação ao solo. As leituras dadas pelos manômetros, em pressão relativa, estão mostradas na tabela a seguir.

Medidor de pressão	Leitura (kP)	Observação
PI-01	71,5	Instrumento aferido e confiável
PI-02	-	Instrumento avariado
PI-03	582,0	Instrumento aferido e confiável
PI-04	244,7	Instrumento aferido e confiável
PI-05	108,0	Instrumento duvidoso
PI-06	120,0	Instrumento aferido e confiável

Não são dadas a cota onde está instalado o medidor de vazão nem a perda de energia por atrito no trecho de tubulação entre PI-05 e a entrada no tanque de recebimento.

(a) Determinar a leitura correta do PI-02. (b) Calcular a perda de potência por atrito pelo medidor de vazão. (c) Verificar se o manômetro duvidoso (PI-05) fornece leitura coerente com certeza, seguramente incoerente ou "depende" (não conclusivo, isto é, a leitura pode ser coerente ou incoerente). Se o valor é julgado incoerente, dizer se o valor correto deveria ser maior ou menor em relação à leitura original. Se o valor é julgado não conclusivo, dizer de quê depende para o valor poder ser coerente. Justificar as respostas por meio de equacionamento.



Resposta: (a)  $P = 650 \text{ kPa}$  (relativa); (b) perda de potência = 1537 W; (c) leitura errada.

(4) Numa experiência de laboratório para calibração de um medidor de vazão do tipo placa de orifício, usando-se água a  $20^\circ\text{C}$  (densidade =  $1000 \text{ kg/m}^3$ ), o coeficiente do medidor encontrado foi de 0,715. Mas, presumivelmente, esse valor deveria ser de 0,63. A discrepância foi explicada porque havia um bolsão de ar numa das linhas do manômetro em U, acoplado ao medidor de vazão.

Supondo que o valor correto do coeficiente do medidor seja de fato 0,63, qual a coluna vertical de ar para causar o erro observado e em qual dos ramos do manômetro (de pressão alta ou pressão baixa), esse bolsão de ar está localizado? São dados: velocidade real de escoamento no orifício = 2 m/s; diâmetro interno do orifício = 1,4 cm; diâmetro interno da tubulação = 2 cm; desnível observado no manômetro em U = 41 cm; massa específica do fluido manométrico =  $1,75 \text{ g/cm}^3$ .

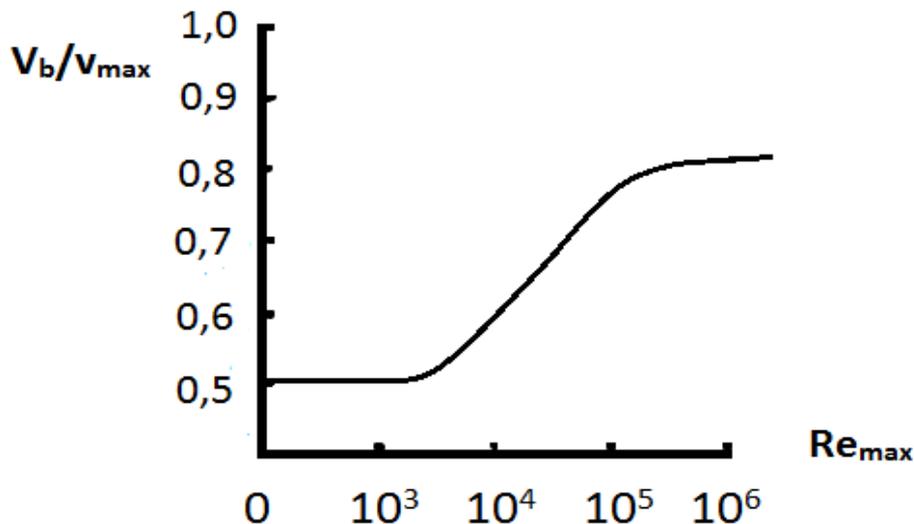
Resposta:  $h = 8,8 \text{ cm}$ .

(5) Deseja-se instalar um medidor de orifício com tomadas de pressão do tipo canto, numa tubulação em aço carbono de 3" Sch 40, para medir a vazão do escoamento de um líquido (densidade =  $800 \text{ kg/m}^3$ , viscosidade =  $2 \text{ cP}$ ), bombeado por uma bomba de potência no eixo igual a  $5 \text{ kW}$  e rendimento de  $60 \%$ . A diferença das pressões antes e depois do medidor será lida através de um manômetro em U, usando-se mercúrio como fluido manométrico (densidade =  $13600 \text{ kg/m}^3$ ). A máxima altura de desnível que pode ser lido nesse manômetro é de  $60 \text{ cm}$ . Sabe-se que a vazão de escoamento pode variar entre  $20 \text{ m}^3/\text{h}$  até  $100 \text{ m}^3/\text{h}$ . Uma engenheira responsável pelo projeto dimensionou o diâmetro do orifício igual a  $6,23 \text{ cm}$ .

Verificar se o valor calculado atende a todas as condições de processo especificadas. Justificar o seu laudo por meio de cálculos e comentários.

(6) Ar usado num secador é pré-aquecido a  $90^\circ\text{C}$  e escoar através de um duto de diâmetro interno igual a  $90 \text{ cm}$ . Um tubo de Pitot é instalado a uma distância conveniente, isenta de perturbações, para assegurar um perfil de velocidades desenvolvido. Ele é posicionado no centro do duto. A leitura do tubo de Pitot fornece um desnível de  $1,37 \text{ cm}$  de água. A pressão estática relativa no ponto de medição é de  $39 \text{ cm}$  de água. O coeficiente do medidor é igual a  $0,98$ . Pode-se adotar a viscosidade do ar igual a  $0,022 \text{ cP}$ . É dado o gráfico anexo entre  $v_b/v_{\text{max}}$  e  $Re_{\text{max}} = \rho v_{\text{max}} D/\mu$ , onde  $v_b$  é a velocidade média de escoamento,  $v_{\text{max}}$  é a velocidade máxima,  $D$  é o diâmetro interno do duto,  $\rho$  e  $\mu$  são respectivamente a densidade e a viscosidade do ar. Deseja-se acoplar ao tubo de Pitot uma escala graduada para facilidade da leitura da vazão volumétrica de processo. O valor da vazão ensaiada, por se tratar de uma condição nominal da planta, deve constar mais ou menos no meio da escala. Para torná-la mais genérica, a escala deve corresponder às condições padronizadas do ar ambiente, a saber,  $60^\circ\text{F}$  e  $1 \text{ atm}$ .

Determinar a vazão de escoamento nessas condições e sugerir a faixa de escala do medidor. Justificar sucintamente as etapas da solução.



Resposta:  $\Phi = 6,63 \text{ m}^3/\text{s}$ ; Escala de  $0$  a  $14 \text{ m}^3/\text{s}$ .

(7) Ar a 60°F (densidade = 0,0864 lb/ft<sup>3</sup>, viscosidade = 1,17 x 10<sup>-5</sup>lb/(ft.s)) é soprado por um ventilador e escoa à vazão de 300 ft<sup>3</sup>/min, através de um duto de diâmetro interno igual a 12 in, até a entrada de um secador do tipo nebulizador ("spray drier"). A vazão de escoamento é medida por meio de uma placa de orifício, acoplada a um manômetro em U, usando-se água (densidade = 62,4 lb/ft<sup>3</sup>) como fluido manométrico. A pressão estática na saída do ventilador é de 2psig. Para vencer a perda de carga pelo secador e periféricos subsequentes, a pressão do ar, na entrada do secador, deve ser de no mínimo 1,8 psig. A linha entre o ventilador e a entrada do secador é relativamente curta, de modo que toda a perda de energia por atrito pode ser atribuída ao medidor de orifício.

Determinar a máxima diferença de pressão no manômetro em U, compatível às condições descritas.

*Resposta:  $-AP = 0,22 \text{ psi}$ .*

(8) Um medidor de orifício, com diâmetro de furo igual a 1 cm e tomadas de pressão do tipo flange, é instalado num tubo em aço carbono de 2" Sch 40, para medir a vazão de ar que será usado num desumidificador. As condições do ar antes do medidor são: temperatura = 21°C, pressão relativa = 1,034 x 10<sup>5</sup>Pa, viscosidade = 0,02 cP. A leitura dada pelo manômetro em U, acoplado ao medidor de orifício, é de 35 cm, sendo a massa específica do fluido manométrico igual a 790 kg/m<sup>3</sup>.

Determinar: (a) a vazão mássica de escoamento; (b) a perda de pressão permanente pelo medidor; (c) a perda de potência pelo medidor.

*Resposta: (a)  $w = 0,0055 \text{ kg/s}$ ; (b)  $\Delta P = 2574 \text{ Pa}$ ; (c) perda de potência = 5,84 W.*

(9) Um hidrocarboneto líquido (densidade = 50 lb/ft<sup>3</sup>, viscosidade = 0,003 lb/(ft.s)) escoa num tubo em aço carbono de 4" Sch 40, no qual está instalada uma placa de orifício, com diâmetro de furo igual a 1,5 in. As tomadas de pressão, do tipo canto, são ligadas a um manômetro em U, que contém mercúrio (densidade relativa = 13,6) como fluido manométrico. Acidentalmente, um pouco de água entrou nesse manômetro. Então, além de um desnível de 12 in de mercúrio, há uma coluna de 3 in de água no topo do mercúrio, no ramo de pressão alta do manômetro.

Qual a vazão mássica de escoamento? Se o operador responsável pelas leituras não tivesse notado a presença de água no manômetro, qual a vazão que ele teria obtido nos seus cálculos?

*Resposta:  $w = 5,484 \text{ kg/s}$ ;  $w' = 5,498 \text{ kg/s}$ .*

(10) Um rotâmetro é usado para medir a vazão de escoamento de água a 20°C numa tubulação. A escala do rotâmetro tem 25 divisões. Os diâmetros no topo e no fundo do corpo do rotâmetro são respectivamente de 1,65 cm e 1,30 cm. O flutuador é do tipo "a" (ver figura 6-8 do livro-texto, na apostila da disciplina), com massa específica de 8,8 g/cm<sup>3</sup>. O volume do flutuador é de 10 cm<sup>3</sup> e o diâmetro na sua seção maior é de 1 cm.

Determinar a vazão mássica de escoamento quando a leitura no rotâmetro indica 13 na escala graduada.

*Resposta:  $w = 406 \text{ g/s}$*

(11) Um medidor de orifício, com diâmetro de furo igual a 5,66 cm, é usado para medir a vazão de escoamento de um óleo (densidade relativa = 0,878, viscosidade = 4,1 cP). O diâmetro interno da tubulação é de 15,41 cm. A diferença de pressões lida entre os pontos imediatamente antes e depois do medidor é de 93,2 kPa. As tomadas de pressão são do tipo flange.

Calcular a vazão volumétrica de escoamento.

Resposta:  $\Phi = 0,0226 \text{ m}^3/\text{s}$ .

(12) Um tubo de Pitoté colocado a uma distância suficientemente longa, livre das perturbações do escoamento, no centro de um duto, em aço carbono de 2" Sch 40, por onde escoava um óleo (densidade relativa = 0,8, viscosidade = 1,5 cP). A leitura dada pelo tubo de Pitoté de 0,4 cm, sendo usada água (densidade =  $1 \text{ g/cm}^3$ ) como fluido manométrico. Ao mesmo tempo em que é feita essa medição, foi obtida a vazão de escoamento pelo método direto, coletando-se 26 kg de óleo em 4 minutos.

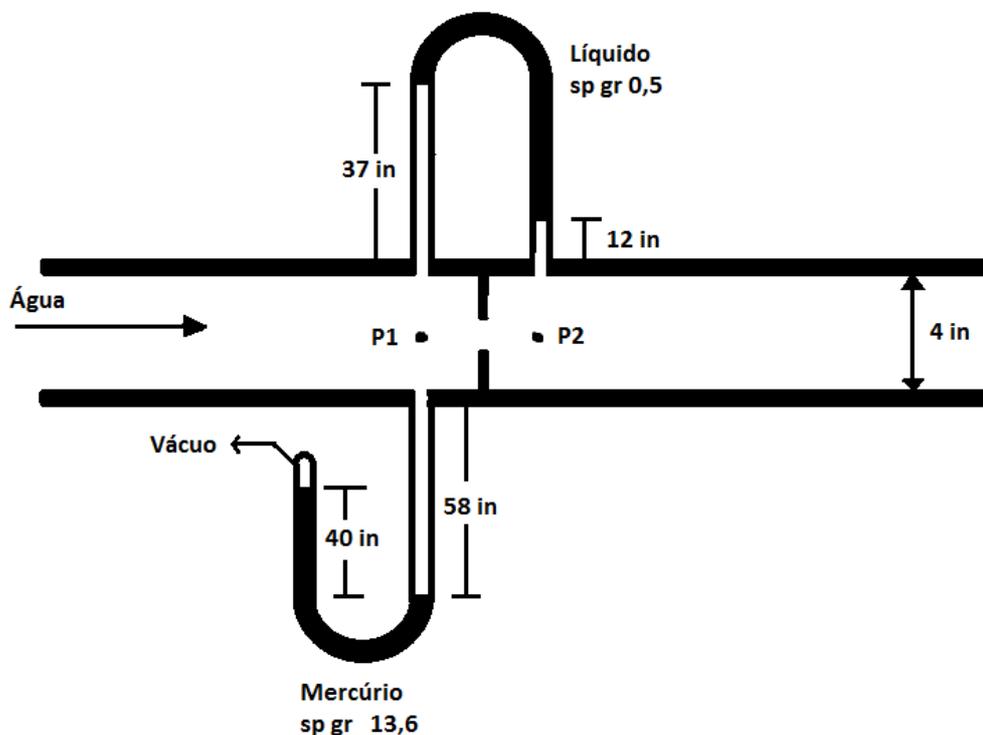
Determinar o valor do coeficiente do tubo de Pitoté.

Resposta:  $C = 0,89$ .

(13) Um manômetro de tubos em U, contendo mercúrio e com um de seus ramos fechado, está ligado à face inferior de uma tubulação que transporta água, conforme mostrado na figura a seguir. No ponto situado imediatamente acima, encontra-se ligada a tomada de pressão a jusante de um manômetro invertido (ver esquema). A densidade relativa do fluido manométrico deste manômetro é igual a 0,5.

Determinar as pressões P1 e P2 (em psia), indicadas no esquema. (Problema 6-1 do livro-texto).

Resposta:  $P1 = 17,56 \text{ psia}$ ;  $P2 = 17,10 \text{ psia}$ .



(14) Durante uma experiência de laboratório, faz-se passar ar, através de um orifício. A pressão absoluta na entrada é de 749,5 mmHg e a temperatura, de 29°C. O volume de ar coletado em 131 s é de 128 L. O diâmetro do orifício é de 0,64 cm e é pequeno, comparado com o do tubo. A queda de pressão através do orifício é de 14,2 cm de água.

Calcular o coeficiente do orifício. (Problema 6-4 do livro-texto).

Resposta:  $C_o = 0,618$

(15) Um rotâmetro está equipado com um flutuador do tipo "c" (ver figura 6-8 do livro-texto, apresentada na apostila da disciplina), com densidade de 1,5 g/cm<sup>3</sup>. Para a leitura 100 no rotâmetro, a vazão correspondente é de 100 cm<sup>3</sup>/min, quando passa água a 20°C.

Calcular a nova vazão, para a mesma leitura 100, se o fluido é: (a) acetona a 10°C; (b) uma solução aquosa de K<sub>2</sub>CO<sub>3</sub> de 20 % em massa, a 60°C; (c) H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> a 40 % em massa, a 10°C. (Problema 6-14 do livro-texto).

Resposta:  $\Phi = 133,5 \text{ cm}^3/\text{min}$ ;  $\Phi' = 75,1 \text{ cm}^3/\text{min}$ ;  $\Phi'' = 53,7 \text{ cm}^3/\text{min}$ .

(16) A tabela a seguir apresenta os dados obtidos para um tubo de Pitot, ao longo de uma seção transversal de uma tubulação de 3" Sch 40, pela qual escoava água a 15°C.

Distância à parede (cm)	Leitura no manômetro (cm de CCl <sub>4</sub> a 15°C)
0,71	5,59
1,35	6,10
1,98	6,60
2,62	7,11
3,25	7,62
3,89	7,87
4,52	7,24
5,16	6,86
5,79	6,10
6,43	5,08
7,06	4,19

Ao mesmo tempo em que eram feitas essas leituras, foram realizadas diversas medidas de vazão, coletando-se a quantidade de água num tanque durante o intervalo de tempo correspondente e o resultado obtido foi de 635 kg em 194,4 s.

Calcular o coeficiente do tubo de Pitot. (Problema 6-2 do livro-texto).

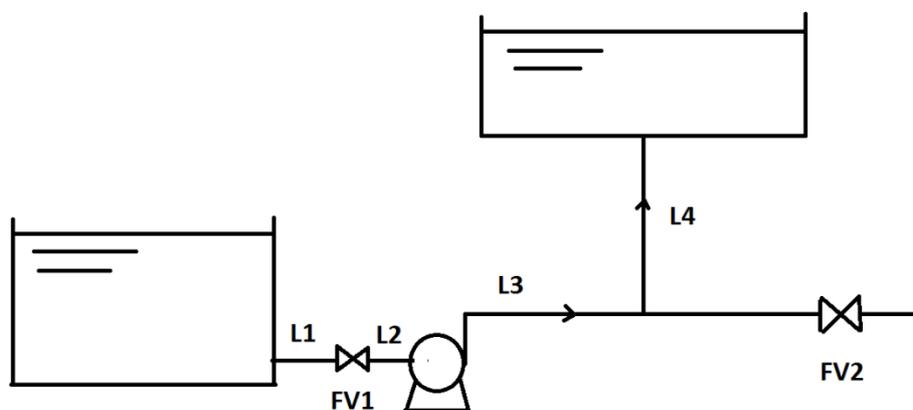
Resposta:  $C = 0,99$ .

## Lista de Exercícios N°3

*Problemas a serem discutidos em classe:*

(1) Água a 15°C é bombeada, à vazão de 380L/min, conforme o esquema mostrado a seguir. Os dois tanques estão abertos a atmosfera. Os níveis de líquido nos dois tanques são mantidos constantes. A diferença de cotas entre as superfícies livres é de 5,2m. Toda a tubulação é em aço carbono. O trecho de tubo antes da bomba é de 3" Schedule N° 40 e o trecho após a bomba é de 2" Schedule N° 40. Os comprimentos dos trechos retos são: L1= 6,10m, L2 = 9,14m, L3 = 30,48 m e L4 = 4,57m. A válvula FV1 é do tipo gaveta e está totalmente aberta; FV2 é uma válvula globo e está fechada. O tê é do tipo padrão. A ligação entre a base do tanque de alimentação e o tubo é uma "entrada de Borda" O rendimento da bomba é de 70 %.

Calcular a potência da bomba. (Exemplo 14-1 do livro-texto).



*Resposta: Potência = - 1,48 HP*

(2) Água a 43°C é descarregada da base de um tanque aberto a atmosfera cujo nível é mantido constante. Em seguida, a água escoar através de um tubo em aço carbono, de 2" Sch 40. A saída do tubo é atmosférica e está a 12,2 m abaixo do nível de líquido no tanque. O comprimento total da tubulação, incluindo-se o do trecho reto e os comprimentos equivalentes das singularidades, é de 45,11 m.

Determinar a vazão de escoamento. (Exemplo 14-2 do livro-texto).

*Resposta:  $\phi = 7,9 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$*

(3) Água a 20°C é retirada a partir de um ramo de uma linha principal. A pressão relativa no ponto de ramificação é de 2,5 atm. A tubulação é em aço carbono, de Schedule N° 40, tem comprimento total de 53 m e descarrega à atmosfera. A saída está a 6,7 m acima do ponto de bifurcação.

Qual o mínimo diâmetro nominal desse ramo para que se tenha uma vazão de escoamento de 1050 L/min? Comentar sobre o resultado. (Problema 14-2 do livro-texto).

*Resposta:  $D = 3'' \text{ Schedule N}^\circ 40$ .*

(4) Água a 20°C escoam da base de um tanque grande, através de um tubo em aço carbono de 2" Sch 40 e comprimento total de 15,20 m, até um ponto situado a 4,5m abaixo da superfície livre de água no tanque. Nesse ponto, as correntes se bifurcam. Parte da água escoam através de um tubo, também em aço carbono, de 1½" Sch 40 e comprimento total de 9 m; o ponto de descarga desse ramo está a 9 m abaixo do nível de água no tanque de alimentação. O restante do fluxo de água escoam através de um tubo em aço carbono, de 1" Sch 40 e comprimento total de 12 m, com ponto de descarga a 6 m abaixo do nível no tanque. As duas descargas são abertas à atmosfera.

Calcular as velocidades médias de escoamento nas três linhas. (Exemplo 14-3 do livro-texto).

Resposta:  $v_{b1} = 3,29 \text{ m/s}$ ;  $v_{b2} = 4,57 \text{ m/s}$ ;  $v_{b3} = 2 \text{ m/s}$

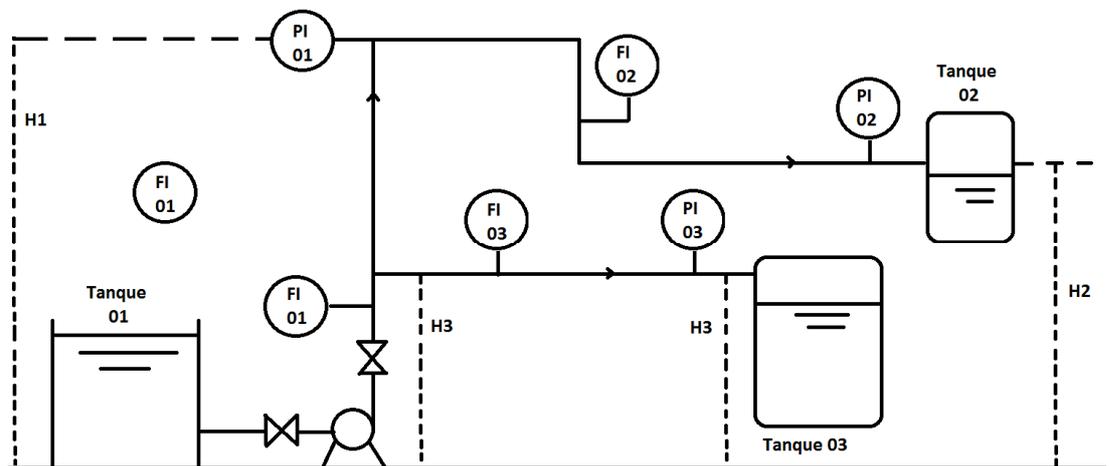
Problemas a serem resolvidos fora de classe:

(5) Um filtro é constituído de um leito de partículas granulares, sendo 50 % em volume com superfície específica de  $8 \text{ cm}^{-1}$  e o restante com superfície específica de  $12 \text{ cm}^{-1}$ . A porosidade média do leito é de 0,43. O diâmetro do leito é de 90 cm e sua altura, de 150 cm. Água a 24°C escoam por gravidade através desse filtro. A pressão relativa na entrada do leito é de 25 cm de água e a pressão na saída é atmosférica.

Determinar a vazão de escoamento. (Problema 14-12 do livro-texto).

Resposta:  $\phi = 0,04 \text{ m}^3/\text{s}$

(6) Um líquido é bombeado conforme o fluxograma mostrado a seguir. São instalados diversos medidores de pressão (PI - pressure indicator) e medidores de vazão (FI - flow indicator) ao longo do sistema.



Os níveis dos tanques podem ser considerados constantes.

As cotas estão indicadas no esquema, sendo  $H1 > H2 > H3$ .

As características das tubulações estão relacionadas na Tabela I

O comprimento equivalente indicado é o "total", incluindo-se o do trecho reto e o das singularidades.

Tabela I - Características das tubulações

Linha	Diâmetro interno	Comprimento equivalente	Rugosidade
Da saída da bomba até a bifurcação	D1	L1	e1
Da bifurcação até o tanque 02	D2	L2	e2
Da bifurcação até o tanque 03	D3	L3	e3

Sabe-se que  $D1 > D3 > D2$ ,  $L1 > L2 > L3$ ,  $e1 = e2 = e3$ .

Os valores das leituras dos instrumentos estão mostrados nas Tabelas II e III. Conforme mostrado nessas tabelas, alguns instrumentos podem não estar corretamente aferidos e apresentam portanto, indicações duvidosas.

Tabela II - Leituras dos medidores de vazão

Medidor	Leitura (m <sup>3</sup> /h)	Laudo da aferição
FI-01	100	Leitura correta
FI-02	70	Leitura duvidosa
FI-03	30	Leitura duvidosa

Tabela III - Leituras dos medidores de pressão

Medidor	Leitura (kPa)	Laudo da aferição
PI-01	150	Leitura duvidosa
PI-02	200	Leitura correta
PI-03	200	Leitura correta

Para cada instrumento considerado duvidoso (FI-02, FI-03 e PI-01), dizer se o valor da leitura com certeza está coerente, seguramente é incoerente ou "depende" (não conclusivo, isto é, pode ser coerente ou incoerente). Justificar por meio de equacionamento.

Para os valores julgados incoerentes, dizer se o valor correto deveria ser maior ou menor em relação à leitura original. Justificar por meio de equacionamento e comentários.

Para os valores julgados não conclusivos, dizer de quê depende para o valor poder ser coerente. Justificar por meio do equacionamento e comentários.

(7) Gasolina a 50°C (densidade = 680 kg/m<sup>3</sup>, viscosidade = 0,22 cP) entra, à vazão de 50 L/s, numa rede de dois tubos paralelos horizontais, que se juntam ao final. Um dos ramos é em aço carbono, tem comprimento equivalente total de 50 m e diâmetro interno igual a 5 cm. O outro ramo é em ferro fundido, tem comprimento equivalente total de 100 m e diâmetro interno igual a 10 cm.

Determinar a vazão de escoamento em cada um dos ramos.

Resposta:  $\phi_1 = 11 \text{ L/s}$ ,  $\phi_2 = 39 \text{ L/s}$

(8) Um derivado de petróleo é bombeado, à vazão de 200 m<sup>3</sup>/h, através de um oleoduto de 180 km de extensão. O diâmetro da tubulação é constante. A diferença de cotas ao longo do trajeto é desprezível. A pressão relativa na saída da bomba é de  $5 \times 10^6$  Pa. A descarga dá-se num tanque aberto a atmosfera. Num dado dia, constatou-se que a vazão de descarga passou para 150 m<sup>3</sup>/h. Por outro lado, o operador da bomba disse que a pressão relativa na saída da bomba continuava a mesma, mas a vazão nesse ponto passou para 280 m<sup>3</sup>/h. Portanto, há um enorme vazamento de produto em algum ponto do trajeto.

Supondo que o regime de escoamento seja laminar em todos os casos, determinar a posição do vazamento.

*Resposta:  $L = 68$  km.*

(9) Através de um tubo liso horizontal, escoo um líquido com  $10^4 < Re < 10^5$

(a) Se a vazão de escoamento é triplicada, por que fator será multiplicado a queda de pressão ao longo do tubo? (b) Qual deverá ser o diâmetro interno do novo tubo para manter a queda de pressão original, mas a vazão de escoamento triplicada? Justificar sucintamente as passagens da solução.

*Resposta: (a)  $\Delta P_2 = 6,84$  ou  $7,22 \Delta P_1$ ; (b)  $D_2 = 1,49$  ou  $1,51 D_1$ .*

(10) Água a 60°F é bombeada à vazão de 240 gpm (galões por minuto) num duto formado pelo espaço anular de dois tubos concêntricos. O comprimento do duto é de 20,3 ft e os diâmetros interno e externo do espaço anular são iguais a 3 in e 7 in respectivamente. O duto pode ser considerado como hidraulicamente liso. A entrada do duto está a 5 ft abaixo da saída. Tanto a entrada como a saída estão à pressão atmosférica.

Determinar a potência necessária para esse bombeamento, sabendo-se que o rendimento da bomba usada é de 70 %.

*Resposta: Potência = 0,44 HP.*

(11) Água a 20°C escoo longitudinalmente na parte externa de um feixe, formado por 9 tubos, circunscrito por um casco de diâmetro interno igual a 5 in. Os tubos são horizontais, têm comprimento de 1,5 m cada, diâmetro externo e diâmetro interno iguais a 1 in e 3/4 in respectivamente e podem ser considerados como hidraulicamente lisos. A variação de pressão ao longo do escoamento é de 7000 Pa.

Determinar a vazão de escoamento.

*Resposta:  $\phi = 0,0322$  m<sup>3</sup>/s*

(12) Esferas de quartzo (densidade = 2,65 g/cm<sup>3</sup>) são colocadas em água a 20°C. Qual o maior diâmetro das esferas para que a decantação por gravidade ainda ocorra em regime viscoso, que segue a chamada lei de Stokes?

*Resposta:  $D = 4,81 \times 10^{-5}$  m*

(13) Foi realizada uma experiência para determinar o comprimento equivalente de um cotovelo padrão em aço galvanizado, de diâmetro interno igual a 2 in. A queda de pressão entre as duas tomadas, distantes de 10 ft de cada ramo do cotovelo colocadas num plano horizontal, foi de 11 psi, quando a vazão de escoamento era de 26 lb/s de água a 20°C.

Qual o comprimento equivalente desse cotovelo?

*Resposta:  $L_{eq} = 8,3$  ft*

(14) Uma bomba envia água a 20°C através de uma tubulação horizontal em aço carbono de 2" Sch 40. A vazão de escoamento é de 7 L/s. Tanto a pressão na entrada da bomba como a da saída da tubulação são atmosféricas. Uma segunda bomba, idêntica à primeira, é colocada na linha, em série com a bomba anterior. Pode-se admitir que a variação de pressão na primeira bomba não se altera pela presença da segunda. O regime de escoamento, em todos os casos, é completamente turbulento ou completamente rugoso.

Qual a nova vazão de escoamento nesse sistema de associação de bombas?

Resposta:  $\phi = 9,87 \text{ L/s}$

(15) Um líquido viscoso armazenado num tanque aberto a atmosfera é drenado, em regime laminar, através de dois tubos verticais distintos, ligados ao fundo do tanque. Os tubos são idênticos, exceto que um deles é duas vezes mais comprido que o outro. Ambos descarregam à atmosfera. Especula-se que o tubo mais curto deveria oferecer menor resistência ao escoamento e, portanto, propiciar uma vazão de escoamento maior. Mas, por outro lado, o tubo mais longo deveria prover uma carga potencial maior e então permitiria um fluxo mais favorável. Com isso, fica-se com a seguinte dúvida: em qual dos tubos, a vazão é maior, ou ainda, a situação é indiferente.

Admitindo-se desprezível a perda de carga devida aos efeitos de entrada e de eventuais válvulas, e desprezando-se também a variação de energia cinética, determinar uma expressão para a velocidade média de escoamento em cada tubo e concluir, em qual dos casos, a vazão é maior.

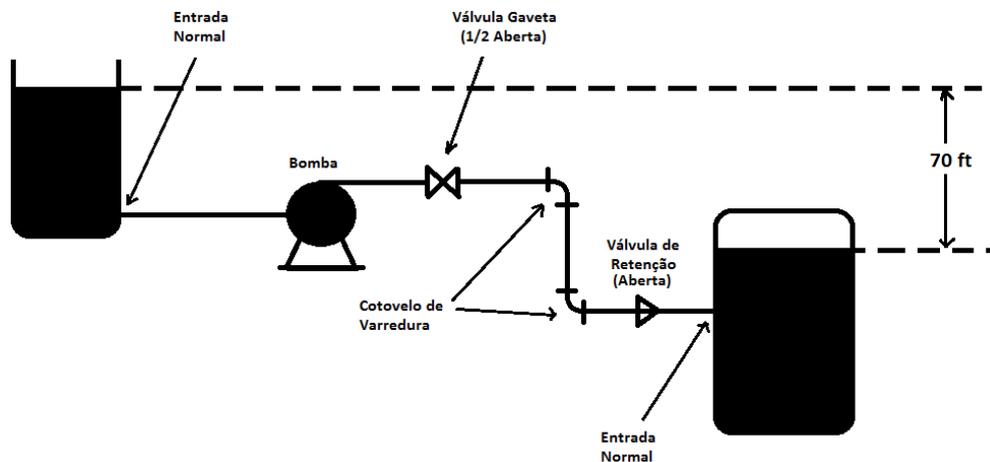
Resposta:  $v_b$  maior no tubo mais curto.

(16) Determinar a força de atrito numa antena de radio de radio de altura igual a 3 ft e diâmetro médio de 0,2 in, submetida a um vento de 96 km/h. As condições do ar ambiente são: pressão absoluta = 1 atm, temperatura = 20°C, viscosidade do ar = 0,02 cP.

Resposta:  $F = 2,38 \text{ N}$ .

(17) Um destilado de 35°API (API = American Petroleum Institute) é transferido de um tanque de armazenagem, a 1 atm absoluta e 27°C, para um tanque pressurizado, com pressão relativa de 3,5 atm, através do sistema de tubulação mostrado a seguir. O líquido escoar à vazão de 10500 kg/h, num tubo de 3" Sch 40, de 140 m de comprimento. As propriedades desse destilado a 27°C são: viscosidade = 3,4 cP e densidade = 0,83 g/cm³.

Calcular o valor mínimo de potência que deve ser fornecida a uma bomba que trabalha com rendimento de 60 %. (Problema 14-1 do livro-texto).



Resposta: Potência = 1,55 HP

(18) Água a 20°C sai de um reservatório de alimentação e é bombeada através de um tubo circular horizontal de concreto, de comprimento igual a 3218 m e diâmetro interno de 25cm, com rugosidade de 0,30 cm. No fim deste tubo, o escoamento divide-se em dois tubos em aço carbono de 4" Sch 40 e 3" Sch 40 respectivamente. A tubulação de 4" tem comprimento total de 60 m e sobe até um ponto situado a 5 m acima do nível de água no reservatório de alimentação, com descarga atmosférica; a vazão de escoamento nesse trecho é de 4000 L/min. A tubulação de 3" também descarrega à atmosfera, num ponto situado a 210 m da bifurcação e na mesma cota do nível de água no reservatório de alimentação. Pode-se desprezar a altura de líquido no reservatório de alimentação.

Calcular a potência que deve ser fornecida à bomba, se a sua eficiência é de 70% (Problema 14-4 do livro-texto).

*Resposta: Potência = 187,9 HP*

(19) Um trocador de calor horizontal, do tipo casco-feixe tubular, é constituído de 70 tubos de diâmetro nominal 1" e BWG 16 (diâmetro interno = 0,0228 m). O comprimento de cada tubo é de 4,20 m. Os tubos estão montados dentro de um casco de diâmetro interno igual a 40 cm. Água entra e sai nas extremidades do lado dos tubos, através de bocais de 3" Sch 40, ligados ao trocador de calor na direção do eixo do trocador de calor. A vazão total da água é de 1200 L/min, com temperatura média de 38°C.

Calcular a queda de pressão total no lado dos tubos do trocador de calor. (Problema 14-5 do livro-texto).

*Resposta:  $-AP = 8950 Pa$ .*

(20) Água escoar em regime permanente, sob ação da gravidade, através de um leito de enchimento contido num cilindro vertical, constituído de partículas esféricas de diâmetro igual a 2,0 cm e porosidade de 0,4. As pressões na entrada e na saída são atmosféricas.

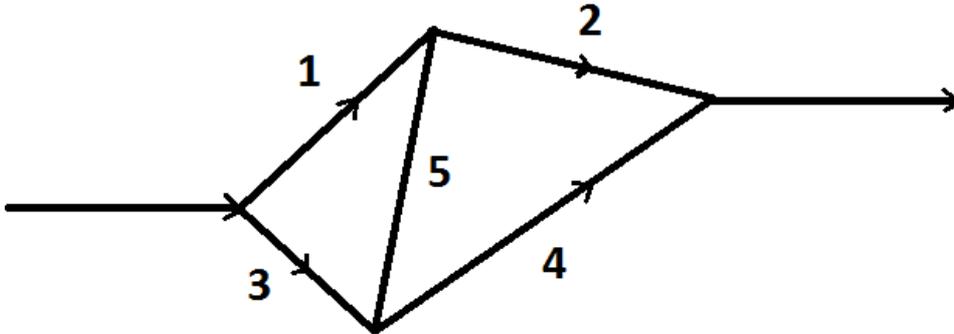
Calcular a velocidade superficial de escoamento. (Problema 14-13 do livro-texto).

*Resposta:  $v_{bs} = 10,8 cm/s$ .*

(21) A figura a seguir mostra esquematicamente o arranjo de um sistema pneumático constituído de tubos capilares. A tabela que acompanha a figura apresenta os comprimentos e os diâmetros internos das linhas, com exceção do diâmetro da linha 4.

Calcular o diâmetro interno dessa linha que provocaria velocidade nula na linha 5, admitindo-se que o escoamento seja laminar em todas as secções do sistema a desprezando-se a variação de energia cinética e potencial. (Problema 14-22 do livro-texto).

	Comprimento	ID
Linha 1	3 m	$1,5 \times 10^{-3}$ m
Linha 2	3,6 m	$2,4 \times 10^{-3}$ m
Linha 3	2,5 m	$3,0 \times 10^{-3}$ m
Linha 4	6 m	?
Linha 5	4,5 m	$1,5 \times 10^{-3}$ m



Resposta:  $D = 0,571$  cm.

(22) Determinar a velocidade terminal para uma pessoa de 90 kg descendo com pára-quedas de um avião. Admitir que o pára-quedas tenha massa de 10 kg, um diâmetro de 9 m quando totalmente aberto e as características de um disco em termos de resistência por atrito. Adotar para densidade do ar o valor de  $1,28 \text{ kg/m}^3$  e para a viscosidade do ar,  $1,734 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$ . (Problema 14-24 do livro-texto).

Resposta:  $v = 4,68 \text{ m/s}$

(23) Adotando-se o critério de velocidade recomendada, estimar o diâmetro comercial de uma tubulação em aço carbono por onde escoar vapor d'água saturado, à pressão absoluta de 120,82 kPa a vazão de 121 kg/h.

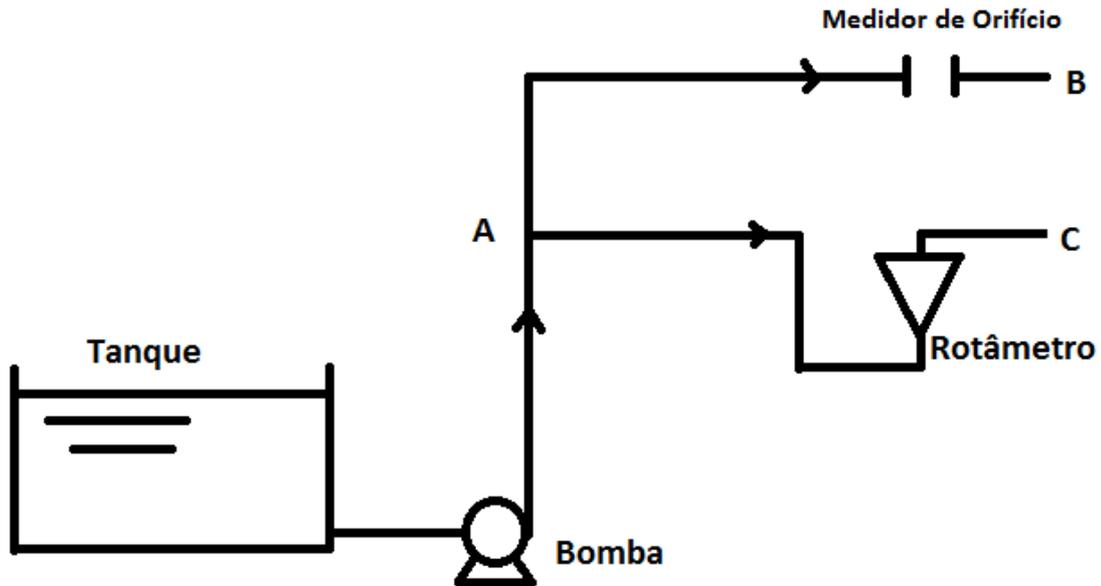
(24) Água (densidade= $1000 \text{ kg/m}^3$ , viscosidade= $0,001 \text{ kg/(m.s)}$ ) é bombeada conforme o esquema mostrado abaixo. O tanque de alimentação e as duas descargas são abertos a atmosfera. A cota do nível de líquido no tanque é de 3 m em relação ao solo. O ponto A (em que ocorre a bifurcação dos fluxos) está a 5 m do solo. A saída B está a 6 m do solo e a saída C está a 5 m do solo. A bomba está instalada no nível do solo. Por simplificação, pode-se considerar que o valor do fator de atrito de Fanning em todas as linhas é o mesmo.

No trecho AB, está instalado um medidor de vazão do tipo orifício. A vazão de escoamento indicada é de  $0,0003 \text{ m}^3/\text{s}$ . Essa linha AB é de 1" Schedule N° 40 (diâmetro interno =  $0,02664 \text{ m}$ ) e apresenta comprimento total de 74 m (já inclusos os dos trechos retos e os comprimentos equivalentes das singularidades e do medidor de orifício).

O trecho AC tem comprimento total de 60 m e é de 1½" Schedule N° 40 (diâmetro interno =  $0,04089 \text{ m}$ ). Nesse ramo, há um rotâmetro que indica uma leitura de  $0,0002 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Mas, há indícios de que, eventualmente, os medidores podem estar descalibrados. Foi então solicitada uma verificação no Serviço de Instrumentação que enviou o seguinte "e-mail". "Foi feita a aferição dos dois medidores de vazão. O medidor de orifício estava CORRETO e o rotâmetro..." A mensagem foi interrompida pela "queda" de energia elétrica que só deve ser restabelecida à tarde.

Com as informações disponíveis, é possível saber se o rotâmetro estava marcando leitura correta ou não? Em caso afirmativo, dizer se estava aferido ou não, e justificar a resposta por meio de cálculos e/ou equacionamento devido. Não é preciso determinar o valor correto da vazão pelo rotâmetro, se o diagnóstico for de rotâmetro descalibrado. Em caso negativo, isto é, se achar que não é possível saber se o rotâmetro estava calibrado ou não, relacionar todas as informações complementares que devem ser fornecidas para um laudo conclusivo e justificar a resposta por meio de cálculos e/ou equacionamento devido.



*Resposta: A leitura do rotâmetro está errada.*

## Lista de Exercícios N°4

*Problemas a serem discutidos em classe:*

(1) Estimar a espessura da camada limite para o escoamento sobre uma placa planahorizontal, com velocidade de aproximação constante de 3 m/s, na posição distantede0,15 m da borda de ataque, admitida com incidência nula, considerando-se os seguintes casos:

Caso	Fluido	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Viscosidade (cP)	Difusividade de quant. de mov. (m <sup>2</sup> /s)
a	Água	1000	1	1 x 10 <sup>-6</sup>
b	Ar	1	0,02	2 x 10 <sup>-5</sup>
c	Glicerina	1260	1500	1,19 x 10 <sup>-3</sup>

*Resposta: (a)  $\delta_a = 0,0011$  m; (b)  $\delta_b = 0,005$  m; (c)  $\delta_c = 0,0386$  m.*

(2) Repetir o problema anterior pare a posição distante de 4 m da borda do ataque. Comentar sobre os resultados.

*Resposta: (a)  $\delta'_a = 0,058$  m; (b)  $\delta'_b = 0,105$  m; (c)  $\delta'_c = 0,199$  m.*

*Problemas a serem resolvidos fora de classe:*

(3) Ar a 60°F e pressão absoluta de 1 atm (viscosidade cinemática = 0,160 x 10<sup>-3</sup> ft<sup>2</sup>/s) escoa sobre uma placa plana horizontal de incidência nula, a uma velocidade de aproximação uniforme igual a 30 ft/s.

(a) Qual a espessura da camada limite no ponto distante de 1 ft da borda de ataque?

(b) Determinar o módulo e a direção da velocidade no ponto de abscissa de 1 ft e ordenada igual à metade da espessura da camada limite.

(c) Determinar a força de atrito na placa de comprimento igual a 1 ft (medido na direção de escoamento, a partir da borda de ataque) e largura também de 1 ft.

*Resposta: (a)  $\delta = 0,354$  cm; (b)  $v = 22,5$  ft/s, ângulo com a horizontal = 0,08°; (c)  $F = 0,0033$  lbf.*

(4) Água esco a 20°C num tubo de diâmetro interno de 0,05 m. O comportamento da camada limite formada na entrada do tubo pode ser considerado como igual ao daquela sobre uma placa plana.

Estimar a distância necessária, medida na direção de escoamento, a partir da entrada, para que o escoamento seja totalmente desenvolvido, isto é, para a borda da camada limite atinja o eixo do tubo, nos seguintes casos de velocidade de aproximação: (a) 15 m/s; (b) 1,5 m/s; (c) 0,015 m/s.

*Resposta: (a)  $L = 2,1$  m; (b)  $L' = 1,18$  m; (c)  $L'' = 0,375$  m.*

(5) O perfil de velocidades na camada limite laminar sobre uma placa plana poder ser aproximado por um polinômio do tipo:  $v_x/v_o = a_0 + a_1 (y/\delta) + a_2 (y/\delta)^2$ , onde  $v_x$  é a velocidade na direção de escoamento  $x$ ,  $v_o$  é a velocidade de aproximação, suposta constante,  $y$  é a direção normal à placa plana e  $\delta$  é a espessura da camada limite.

Determinar os valores das constantes da expressão polinomial.

*Resposta:*  $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = -1$ .

(6) Um fluido newtoniano incompressível de densidade  $\rho$  e viscosidade dinâmica  $\mu$  está confinado entre duas placas planas verticais, espaçadas de distância  $L$ . A placa à esquerda é fixa e a da direita é movida no sentido ascendente, com velocidade constante  $V$ .

Considerando que o escoamento do fluido seja em regime permanente, laminar, determinar, a partir dos balanços diferenciais, o perfil de velocidades resultante.

*Resposta:*  $v_y = [1/2\mu] [-\rho g - dP/dy] [Lx - x^2] + Vx/L$ .

(7) Água a 20°C esco sobre uma placa plana horizontal, com velocidade de aproximação uniforme de 3ft/s.

Determinar a velocidade no ponto distante de  $[x_{cr}/2]$  a partir da borda de ataque, medido na direção de escoamento e de  $[\delta/4]$ , medido na direção normal à placa, sendo  $x_{cr}$  e  $\delta$  medidos em ft.

*Resposta:*  $v = 1,29 \text{ ft/s}$ .

(8) Ar a 50°C e 20 psig (viscosidade = 0,02 cP) esco sobre uma placa horizontal de incidência nula, com uma velocidade de aproximação uniforme de 10 m/s.

(a) Determinar, usando a solução exata de Blasius, as componentes de velocidade  $v_x$  e  $v_y$  no ponto dado por  $x = 0,05 \text{ m}$  e  $y = \delta/2$ , onde  $x$  é a direção de escoamento,  $y$  é a direção normal à placa e  $\delta$  é a espessura da camada limite nessa posição. (b) Determinar a força de atrito numa placa de comprimento igual a 10 m (medido na direção de escoamento a partir da borda de ataque) e largura também de 10 m.

*Resposta:* (a)  $v_x = 7,2 \text{ m/s}, v_y = 0,017 \text{ m/s};$  (b)  $F = 35,1 \text{ N}$ .

(9) Água a 20°C esco sobre uma placa plana horizontal com incidência nula. A velocidade de aproximação é constante e igual a 10 cm/s.

Fazer, a partir da solução de Blasius, os gráficos de  $v_x$  e  $v_y$  em função de  $y$ , na posição  $x = 5 \text{ cm}$ , medida na direção de escoamento a partir da borda de ataque.

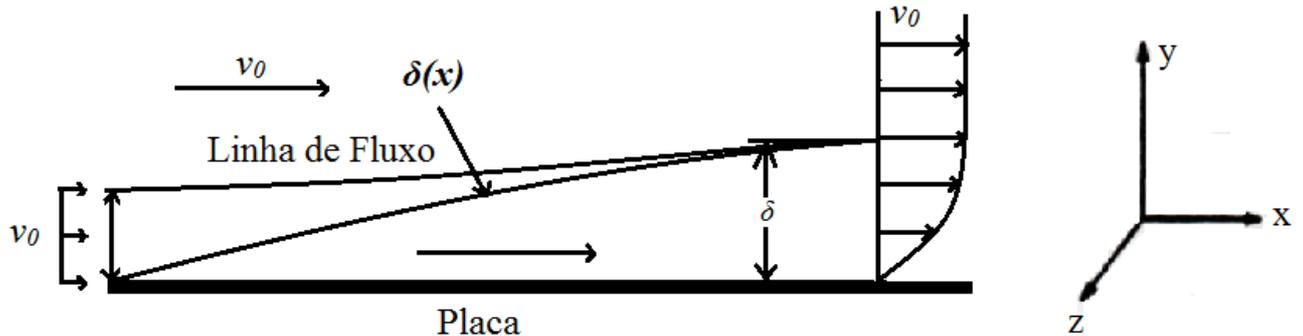
(10) Um fluido incompressível, de densidade  $\rho$ , esco sobre um lado de uma placa plana de largura unitária, conforme mostrado na figura a seguir. O escoamento principal é paralelo à placa. O fluido próximo à placa sofre efeito viscoso. Forma-se então uma camada limite a partir da origem da placa, cuja espessura cresce ao longo do escoamento. Essa camada limite é definida como a região em que a velocidade varia desde o valor nulo para o fluido aderido à placa, até  $v_o$  para a região afastada da placa, no escoamento principal. O perfil de velocidades  $v_x$ , em função da distância normal à placa  $y$ , pode ser aproximado por:

$$\frac{V_x}{V_o} = \frac{3}{2} \left( \frac{Y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Y}{\delta} \right)^3 \quad \text{para } 0 \leq \frac{Y}{\delta} \leq 1$$

$$\frac{V_x}{V_o} = 1 \quad \text{para } \frac{Y}{\delta} \geq 1$$

onde  $\delta$  é a espessura da camada limite numa dada posição  $x$ .

A partir de um balanço global de quantidade de movimento, determinar a força de atrito sobre a placa, em função de  $v_0$ ,  $\delta$  e  $\rho$ . Considera-se que não há variação de pressão. Pode-se escolher a superfície de controle mostrada na figura a seguir, tal que haja escoamento na direção  $x$  apenas na entrada e na saída, isto é, não escoar fluido através da linha (superfície) de corrente; portanto, a vazão mássica de fluido que entra em "a" é igual a que sai em "b" (Problema 5-3 do livro-texto).



Resposta:  $F(x) = -0,139 \rho v_0^2 \delta(x)$ .

(11) O escoamento de um fluido é dado por  $\vec{v} = x^3 y \vec{i} + 2x^2 y z \vec{j}$ . O fluido é incompressível? Justificar a resposta.

Resposta: Não

(12) Obter a equação do balanço diferencial da quantidade de movimento na direção  $z$ , em coordenadas retangulares, para o escoamento unidirecional de um fluido newtoniano incompressível, de viscosidade constante.

Resposta: —

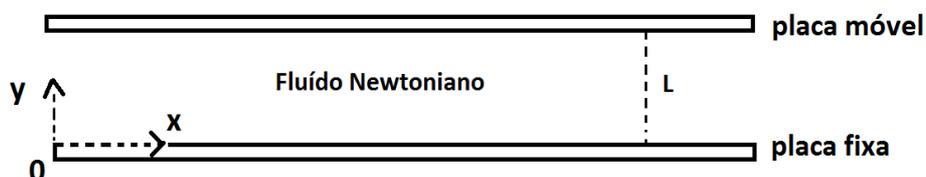
(13) A velocidade de um escoamento unidirecional de um fluido incompressível varia em relação à direção de escoamento? Justificar a resposta.

Resposta: Não

(14) Os componentes de velocidade num escoamento de um fluido incompressível são dados por  $v_x = x^3 y$ ;  $v_y = 2x^2 y z$ . Determinar a equação do componente de velocidade  $v_z$ . Justificar a resposta.

Resposta:  $\vec{v}_z = [(-x^2 z)(3y + z) + C(x, y)] \vec{k}$

(15) Um fluido newtoniano incompressível é colocado no espaço entre duas placas planas horizontais, de largura infinita, separadas da distância  $L$ . Os eixos de coordenadas, assim como a sua origem, são adotados conforme mostrados no esquema a seguir.



A placa superior é puxada com uma força constante e com isso, a placa superior move-se com uma velocidade  $V_0$  constante, no sentido de  $x$  positivo. A placa inferior é fixa. O gradiente de pressão ao longo de  $x$  é desprezível. A temperatura do fluido é mantida constante. Considera-se o escoamento em regime permanente, laminar e unidirecional.

(a) Simplificar a equação do balanço diferencial de massa. Justificar sucintamente todas as passagens da solução.

(b) Simplificar a equação do balanço diferencial de quantidade de movimento na direção  $x$ . Justificar sucintamente todas as passagens da solução.

(c) Deduzir e obter a expressão para o perfil de velocidades de escoamento  $V_x = V_x(y)$ . Justificar sucintamente as passagens da dedução.

Observação: A falta das justificativas em todos os itens solicitados comprometerá totalmente a avaliação, ainda que as respostas estejam corretas.

Resposta: (c)  $V_x = V_0 y/L$

(16) Um tubo capilar longo horizontal de comprimento igual a 0,45 m e diâmetro interno de 0,00076 m é usado como viscosímetro. Nos testes de calibração, foi usada água a 23°C (densidade = 998 kg/m<sup>3</sup>). Para uma diferença de pressão ao longo desse tubo igual a 60355 Pa, a vazão de escoamento medida é de 1 cm<sup>3</sup>/s. Determinar o valor da viscosidade obtido a partir dessa determinação experimental, considerando os seguintes casos:

(a) Desprezar o efeito de entrada

(b) Levantar em conta o efeito de entrada. Sabe-se que o comprimento de entrada no caso pode ser estimado por  $Le/D = 0,0575 Re$ , onde  $Le$  é o comprimento de entrada,  $D$  é o diâmetro interno do tubo e  $Re$  é o número de Reynolds no escoamento desenvolvido (no cálculo deste número de Reynolds, pode-se adotar o valor da viscosidade obtido na literatura). Sabe-se outrossim que, no problema em questão, a variação de pressão por unidade de comprimento de tubo na zona de entrada é duas vezes a do escoamento desenvolvido. A queda de pressão total continua sendo de 60355 Pa.

(c) Comparar os valores de viscosidade obtidos nos dois itens anteriores com o da literatura e comentar a diferença.

Resposta: (a)  $\mu = 1,098 \text{ cP}$ , (b)  $\mu = 0,936 \text{ cP}$

(17) A teoria da camada limite desenvolvida no início do século XX é, segundo alguns autores, um dos últimos grandes avanços teóricos no campo da Mecânica dos Fluidos. A possibilidade de previsão teórica da força de arrasto em corpos submersos com diversas geometrias forneceu uma maior consistência aos projetos envolvendo esse parâmetro. Uma geometria típica neste tipo de problema é a placa plana, cujos procedimentos de cálculo podem ser adaptados a outras geometrias. Determine a força de arrasto em uma placa plana (3,0 m x 1,5 m), de espessura desprezível, quando o ar (fluido newtoniano com  $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$  e  $\mu = 2,0 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ) se desloca a uma velocidade de 5 m s<sup>-1</sup>, na direção normal à aresta de 3 m. Considere que o escoamento sobre as duas superfícies da placa (ver Figura) ocorre em regime laminar e pode ser descrito por:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 2 \left( \frac{Y}{\delta} \right) - \left( \frac{Y}{\delta} \right)^2$$

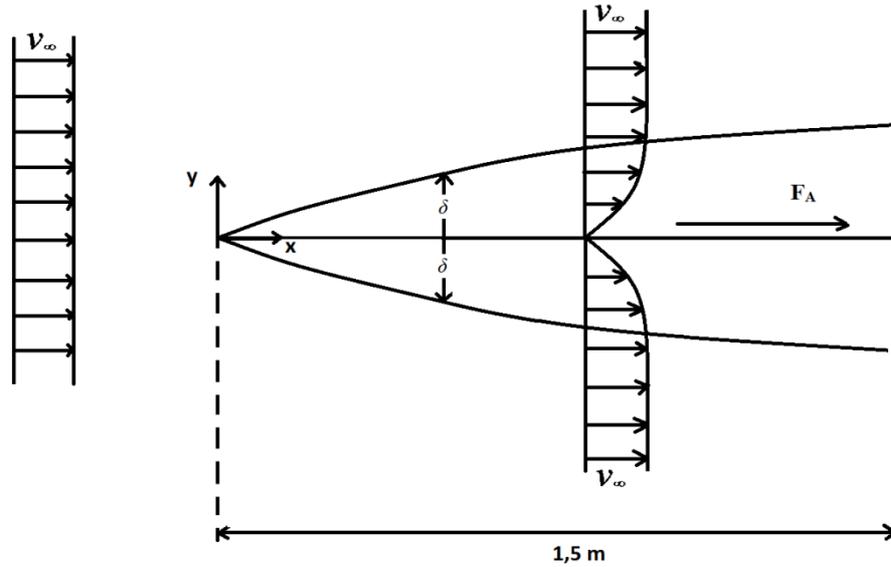
$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,48}{Re_x^{0,5}}$$

$$Re_x = \frac{\rho V_\infty x}{\mu}$$

Onde  $V_\infty$  é a velocidade de escoamento na região afastada da placa;  $\delta$  é a espessura da camada limite;  $Re_x$  é o número de Reynolds local;  $\rho$  e  $\mu$  são respectivamente a densidade e a viscosidade do fluido escoando.

Lembre-se de que a tensão cisalhante local na superfície da placa é dada por:

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=0}$$



Resposta:  $F = 0,294 \text{ N}$

**Lista de Exercícios N° 5**

*Problemas a serem discutidos em classe:*

(1) Ar escoar num tubo capilar de diâmetro interno igual a 4 mm, com velocidade média de 50 m/s. O comprimento do tubo é de 0,1 m. A pressão absoluta na entrada do tubo é de 101 kPa. Adota-se que a densidade do ar é de  $1,23 \text{ kg/m}^3$  e sua viscosidade igual a  $1,79 \times 10^{-5} \text{ Pas}$ . Podem-se desprezar os efeitos de entrada

(a) Determinar a perda de energia por atrito no escoamento para os casos de o tubo ser (a1) de vidro; (a2) extrudado; (a3) em aço carbono. Comentar sobre os resultados.

(b) É razoável admitir que a densidade do ar seja constante ao longo do escoamento? Justificar a resposta.

(c) Qual o erro cometido no resultado se o regime de escoamento tivesse sido considerado como laminar?

*Resposta:* (a1)  $\Delta P_1 = 1076 \text{ Pa}$ ; (a2)  $\Delta P_2 = 1076 \text{ Pa}$ ; (a3)  $\Delta P_3 = 1614 \text{ Pa}$ ; (b) sim; (c)  $\Delta P_{lan} = 179 \text{ Pa}$ .

(2) Ar a 1 atm e  $50^\circ\text{C}$  escoar, em regime turbulento, num tubo liso, reto, longo, horizontal, de 1" Schedule N° 40. A queda de pressão num trecho de 100 m é de 2500 Pa. Pode-se adotar que a viscosidade do ar seja igual a 0,02 cP.

Determinar (a) a espessura da subcamada limite laminar; (b) a velocidade máxima de escoamento; (c) a distância da parede na qual a relação entre a velocidade "média" e a máxima é igual a 0,4.

*Resposta:* (a)  $\delta = 0,235 \times 10^{-3} \text{ m}$ ; (b)  $v = 7,66 \text{ m/s}$ ; (c)  $y = 0,415 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

*Problemas a serem resolvidos fora de classe:*

(3) Água a  $20^\circ\text{C}$  escoar num tubo liso horizontal de diâmetro interno igual a 0,05 m, à velocidade média de 1,5 m/s.

Determinar a velocidade e o comprimento de mistura de Prandtl, num ponto distante de 0,02 m da parede interna do tubo.

*Resposta:*  $v = 1,76 \text{ m/s}$ ;  $l = 0,0033 \text{ m}$ .

(4) Obter uma expressão para a viscosidade turbulenta, para o escoamento desenvolvido de um fluido newtoniano no núcleo turbulento, a partir do perfil logarítmico de velocidades ou perfil universal de velocidades. São dados: densidade do fluido =  $\rho$ ; raio interno do tubo =  $R$ ; tensão de cisalhamento na parede =  $\tau_s$ .

*Respostas:*  $\mu_e = [\tau_s (1-y/R) y] / [2,5 (\tau_s/\rho)^{0,5}]$

(5) Água a  $20^\circ\text{C}$  escoar num tubo liso, horizontal, de diâmetro interno igual a 0,05 m, à velocidade média de 1,5 m/s.

Determinar a tensão de cisalhamento e a viscosidade turbulenta, num ponto distante de 0,02 m da parede interna do tubo.

*Resposta:*  $\tau = 1,095 \text{ Pa}$ ;  $\mu_e = 0,117 \text{ Pas}$

(6) Água a 20°C escoam entre duas placas planas, conforme o esquema mostrado na figura 10-1 do livro-texto, onde  $y_0 = 2$  cm. O perfil da tensão de cisalhamento no duto retangular é dado pela figura 12-5 do livro-texto, onde  $a = \tau_{yx} t/\rho$ ,  $b = \tau_{yx}/\rho$  e  $c = \tau_{yx}r/\rho$ , sendo a, b e c indicados nessa figura.

(a) Determinar a viscosidade turbulenta para  $y = 1,8$  cm. (b) Para qual posição a partir da qual se tem o núcleo turbulento? Justificar a resposta (c) Determinar a tensão de cisalhamento de Reynolds para  $y = 1,8$  cm.

Resposta: (a)  $\mu_e = 12$  cP; (b)  $y = 1,5$  cm; (c)  $\tau_{yx}^r = 0,0466$  lbf/ft<sup>2</sup>.

(7) Água a 40°C escoam num tubo liso horizontal de 1" Schedule N° 40, em regime turbulento. A queda de pressão num trecho de 100 ft é de 30 psi.

Determinar a espessura da zona de transição.

Resposta:  $\delta = 7,7 \times 10^{-5}$  m

(8) Num tubo circular, reto, liso, horizontal, de 1" Schedule N° 40, está escoando água a 40°C, à velocidade média de 0,5 m/s.

Determinar o comprimento de mistura de Prandtl no ponto em que a relação entre a velocidade médio-temporal e a velocidade máxima é de 0,2.

Resposta:  $l = 3,9 \times 10^{-5}$  m

(9) Ar (densidade = 1,12 kg/m<sup>3</sup>, viscosidade = 0,02 cP) escoam à velocidade média de 15 m/s num tubo circular liso de diâmetro interno igual a 25 cm.

Determinar a espessura da subcamada limite viscosa e as velocidades locais a 50 mm e 0,5 mm da parede interna do tubo respectivamente.

Resposta:  $\delta = 1,35 \times 10^{-4}$  m;  $v_1 = 16,1$  m/s;  $v_2 = 7,65$  m/s

(10) Água a 20°C escoam através de um tubo liso horizontal, de diâmetro interno igual a 2 in. A tensão de cisalhamento na parede interna é de 0,33 Pa.

Usando a figura 12-6 do livro-texto, determinar: (a) a velocidade máxima de escoamento; (b) a distância da parede em que a relação entre a velocidade médio-temporal e a velocidade máxima é de 0,2.

Resposta: (a)  $v_{max} = 0,364$  m/s; (b)  $y = 0,274 \times 10^{-3}$  m

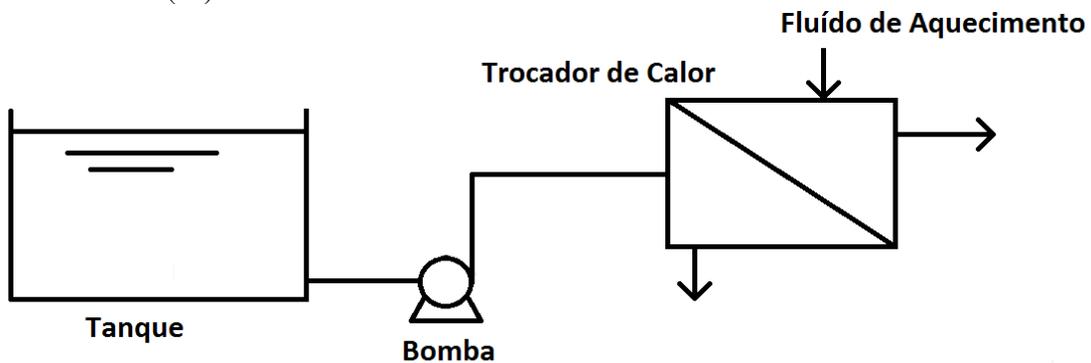
**Questionário N° 1**

(1) Por que uma corrente de água, ao sair da torneira, torna-se progressivamente mais fina?

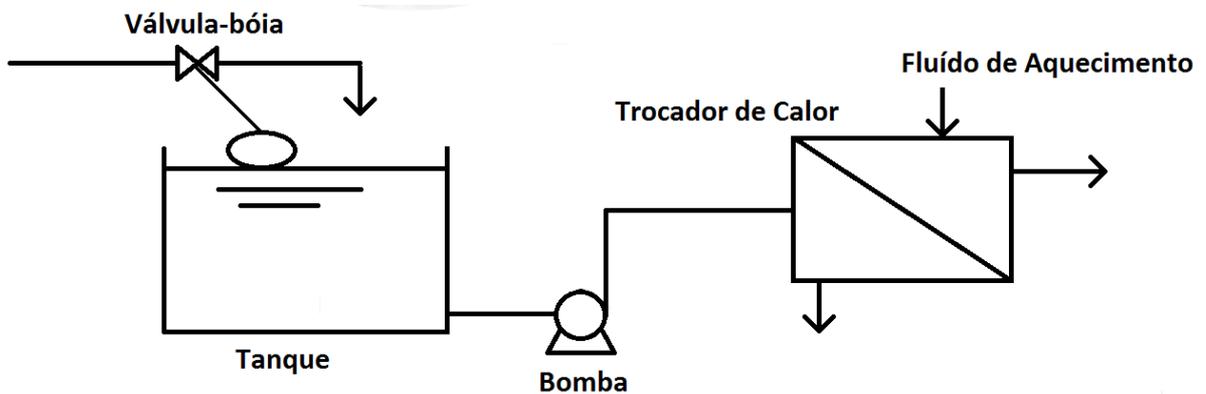
(2) O fiscal de trânsito, conhecido como "marronzinho", desempenha a sua função sob ponto de vista Lagrangeano ou Euleriano? Explicar.

(3) Para cada um dos processos mostrados nos esquemas a seguir, selecionar os volumes de controle apropriados e dizer se o regime é permanente, pseudo-permanente ou não permanente. Explicar.

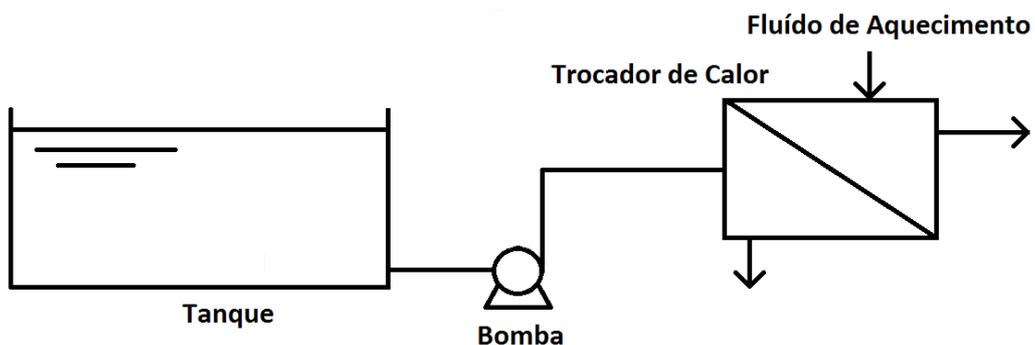
(3a)

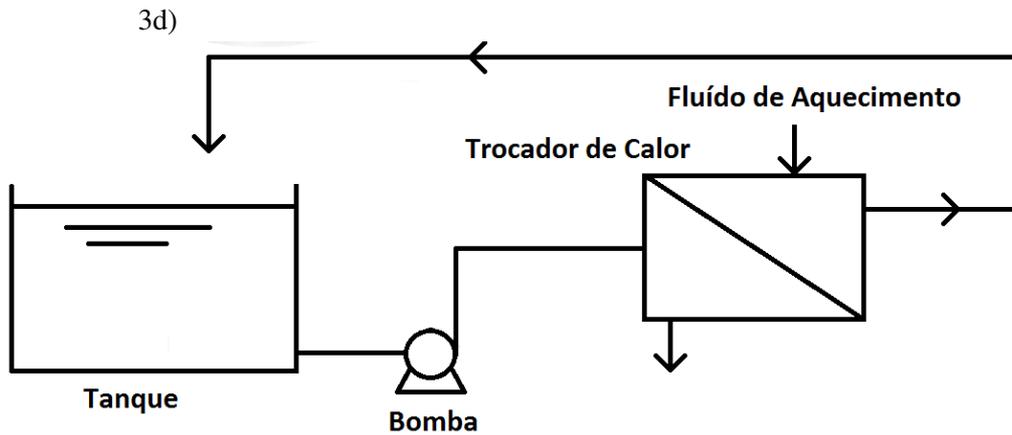


(3b)

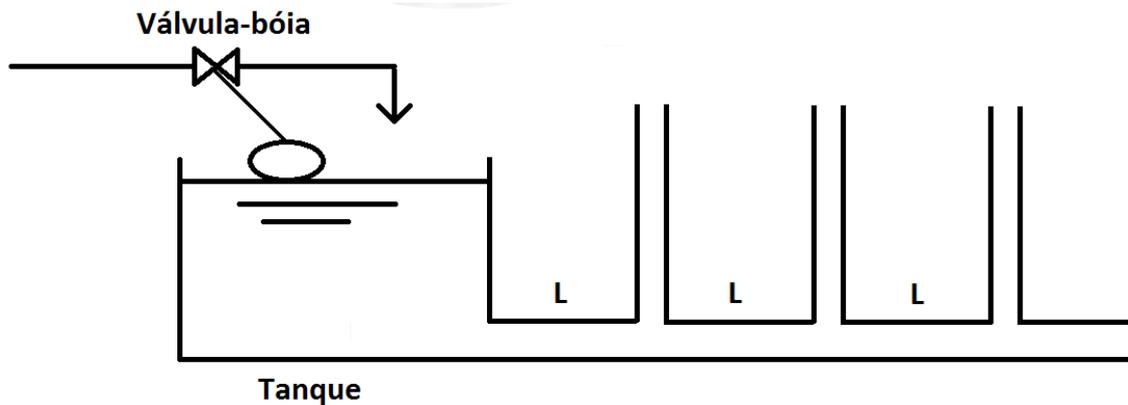


(3c)





(4) Água escoo por gravidade a partir de um tanque, aberto a atmosfera, cujo nível é mantido constante. São instalados piezômetros para medir as pressões ao longo do tubo de saída. Os comprimentos dos trechos entre os piezômetros são iguais entre si. O esquema esta mostrado a seguir.



(4a) Admitindo-se que o atrito no escoamento seja desprezível, fazer um esquema mostrando as alturas de água em cada um dos piezômetros, em relação ao nível de líquido no tanque de alimentação. Justificar a resposta.

(4b) Repetir o problema, levando-se em conta o atrito. Justificar a resposta.

(5) Mostrar que a equação de Hagen Poiseuille é dimensionalmente consistente.

(6) Em que parte da dedução do perfil parabólico de velocidades, foi necessária a hipótese do regime de escoamento laminar?

(7) Quais são as hipóteses admitidas para que a energia cinética por unidade de massa de fluido seja dada por  $v_b^2/2$ , onde  $v_b$  é a velocidade média de escoamento? Justificar a resposta.

(8) O balanço global de energia pode ser expresso por:

$$\iint_A \left( \frac{v^2}{2} + gz + H \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V E \rho dV = q - \dot{W}_s$$

(8a) Qual o significado físico de  $\vec{v} \cdot d\vec{A}$ ?

(8b) Qual a dimensão da equação (energia/massa, energia/tempo, fluxo de energia)? Justificar a resposta.

(8c) Decompor a energia total E e dar o significado de cada parcela componente.

(9) Num escoamento, quais as hipóteses necessárias para que seja válida a igualdade  $v_{b1}A_1 = v_{b2}A_2$ , onde  $v_b$  é a velocidade média de escoamento, A é a área da seção transversal e os índices 1 e 2 representam duas seções distintas ao longo do escoamento.

(10) Dentre as hipóteses relacionadas: {fluido newtoniano, regime permanente, fluido incompressível, regime laminar}, quais devem ser satisfeitas para se poder usar cada uma das equações abaixo? Justificar as respostas.

(10a) Equação I

$$\frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_{P_2}^{P_1} \frac{dP}{\rho} + l_{wf} + \eta_P W_s = 0$$

(10b) Equação II

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g \Delta z + \Delta H = Q - W_s$$

(10c) Equação III

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g \Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + l_w + W_s = 0$$

(11) É correto afirmar que o termo  $l_w$  da equação III da questão anterior (10c) representa a perda de energia por atrito por unidade de tempo, em todo o sistema, exceptuando-se a bomba? Justificar a resposta.

(12) O perfil da tensão de cisalhamento dado por  $\tau = (-\Delta P r/2L)$  vale para o escoamento em regime turbulento? E para um fluido não newtoniano? E para um tubo vertical? E para um tubo rugoso? Justificar cada uma das respostas.

(13) Peso é uma propriedade intensiva? É um tensor de primeira ordem? É uma força de campo? Justificar as respostas.

(14) Na estação de tratamento de efluentes (ETE), o monitoramento da qualidade do descarte final é observado sob enfoque Lagrangeano ou Euleriano? Explicar.

(15) Quais os critérios para a escolha do número de Schedule?

**Questionário N°2**

(1) É correto afirmar que a velocidade com que o gás hidrogênio percorre um trecho de tubo reto, de seção uniforme, é cerca de 20 vezes maior que a do dióxido de carbono, à pressão, temperatura e fluxo mássico constantes? Justificar a resposta.

(2) Um coração não excitado bate em torno de 72 vezes por minuto. Em cada batida, cerca de 70 ml de sangue a pressão de 100 mmHg são bombeados. Estimar a potência desenvolvida pelo coração e comentar sobre o resultado encontrado.

(3) De quais parâmetros depende o coeficiente de um medidor de vazão do tipo placa de orifício?

(4) Aplicando-se a equação de transporte de Reynolds para o caso de um balanço global de quantidade de movimento, dar o significado físico do 1º membro e das duas parcelas do 2º membro dessa equação resultante.

(5) Partindo-se do balanço global de quantidade de movimento dado por

$$\vec{F} = \iint_A \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \vec{v} \rho d\check{V}$$

pode-se chegar à expressão simplificada:  $w \Delta v_x = F_{xp} + F_{xg}$ . Relacionar todas as hipóteses que devem ser admitidas nessa dedução e explicar o quê cada hipótese implica na simplificação.

(6) O aumento de pressão que um líquido adquire ao passar por uma bomba corresponde ao trabalho transmitido pelo eixo? Justificar a resposta.

(7) Aplicar a equação de transporte de Reynolds para o balanço global de energia. Dar o significado físico das duas parcelas do 2º membro dessa equação resultante.

(8) O valor da velocidade média de um fluido, através de um tubo vertical totalmente preenchido, em escoamento descendente, mantém-se constante ou é variável? Justificar a resposta.

(9) Corrigir as afirmações a seguir. Justificar as respostas.

(9a) Uma das diferenças entre os medidores de vazão de placa de orifício e tubo de Pitot é que, no tubo de Pitot, medem-se duas pressões, sendo uma estagnante e outra de impacto, em duas seções distintas ao longo do escoamento, ao passo que, na placa de orifício, as duas pressões medidas são chamadas de dinâmicas, também em duas seções distintas.

(9b) A equação de Bernoulli rigorosamente não pode ser usada para escoamento em regime laminar

(9c) Um dos modos de se obter a vazão mássica de escoamento, através de um duto circular, é usar um tubo de Pitot, medir a velocidade no centro desse duto, multiplicar o valor por 0,5 e pela área da seção transversal do duto.

(9d) Três das hipóteses admitidas na dedução da equação de Bernoulli, mostrada abaixo, são: 1ª - Não há variação de temperatura entre as secções de entrada e saída; 2ª - A densidade do fluido assume valor constante em todo o volume de controle; 3ª - Não há troca de calor envolvida no processo.

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g \Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + l_w + W_s = 0$$

(9e) O conceito de estado pseudo-estacionário depende do intervalo de tempo considerado.

(10) Dar os conceitos de pressão estática, dinâmica, termodinâmica, de Bernoulli, de impacto e estagnante.

(11) É correto afirmar que, para a maioria dos gases, a viscosidade cinemática diminui com a temperatura? Justificar a resposta.

(12) Um líquido newtoniano (densidade =  $\rho$ , viscosidade =  $\mu$ ) sai, por gravidade, da base de um tanque atmosférico cujo nível é mantido constante e escoar através de um tubo reto horizontal, em regime permanente, laminar, unidimensional, isotérmico. O diâmetro interno do trecho inicial do tubo (comprimento = 5 L) é igual a  $D_1$  e o diâmetro interno do trecho final (comprimento nãoo dado) é igual a  $D_2 = 0,5 D_1$ . São instalados diversos medidores de pressão estática ao longo do tubo. Os resultados estão mostrados na tabela abaixo.

Manômetro	Localização	Pressão relativa (kPa)
PI-01	Base do tanque (antes de sair do tanque)	350
PI-02	Distante L da saída do tanque	340
PI-03	Distante 2 L da saída do tanque	330
PI-04	Distante 4 L da saída do tanque	310
PI-05	Distante 5 L da saída do tanque (um pouco antes da redução do diâmetro do tubo)	300
PI-06	Distante 6 L da saída do Tanque	290

Sabe-se que os manômetros PI-04 e PI-05 estão bem calibrados e indicam leituras corretas. Comentar cada uma das demais leituras dos manômetros PI-01, PI-02, PI-03 e PI-06, dizendo se estão corretas ou erradas. Para os valores considerados errados, dizer se o valor correto deveria ser muito maior, maior, menor ou muito menor em relação à leitura original considerada como errônea. Justificar sucintamente todas as passagens da solução.

**Questionário N° 3**

(1) Na obtenção do perfil de velocidades do escoamento em espaço anular, formado por dois tubos circulares concêntricos, as condições de contorno conhecidas são de que espécie?

(2) Para o escoamento em espaço anular, a superfície em que a velocidade é máxima, está mais próxima à parede interna ou à parede externa? Justificar a resposta.

(3) No estudo da camada limite laminar sobre uma placa plana, um gráfico importante é o de  $f'(\eta)$  em função de  $\eta$ . Explicar por que o gráfico apresenta um aspecto assintótico.

(4) Para o estudo de camada limite laminar sobre uma placa plana: (a) Dar três condições de contorno da velocidade  $v_x$  em relação à posição  $y$ , onde  $v_x$  é a velocidade de escoamento na direção paralela a placa e  $y$  é a direção normal a placa. (b) Justificar fisicamente cada uma das condições de contorno. (c) Dar a espécie de cada uma das condições.

(5) Corrigir as afirmações a seguir. Justificar as respostas.

(5a) Para aplicar a equação de Navier Stokes, que representa um balanço de diferencial de energia, o fluido precisa ser newtoniano, incompressível, em escoamento sob estado estacionário.

(5b) Um dos fatores que acelera a transição da camada limite laminar paraturbulenta é um aumento de temperatura no líquido em escoamento.

(5c) A equação de Bernoulli só pode ser aplicada para um fluido newtoniano, de densidade e viscosidade constantes.

(5d) O gráfico do fator de atrito em tubo em função do número de Kármán apresenta vantagens de uso quando a perda de carga no problema é desconhecida.

(5e) A condição necessária e suficiente para a separação da camada limite é que o gradiente de pressão seja negativo em relação ao escoamento.

(5f) Para que  $\text{div}(\mathbf{v})$  seja nulo, o fluido deve ser newtoniano, incompressível e estar escoando em regime laminar permanente.

(5g) O fator de atrito não depende da rugosidade do tubo quando o regime de escoamento é laminar ou quando o tubo é completamente rugoso.

(6) Um dos gráficos muito importantes no estudo de camada limite em placa plana é o dado por  $f'(\eta) \times \eta$ , onde  $\eta = y [\rho v_o / \mu x]^{1/2}$  e  $f'(\eta) = v_x / v_o$ .

(6a) Dar um roteiro sucinto para a construção desse gráfico.

(6b) Que informações, podem ser extraídas do gráfico?

(6c) É possível determinar a velocidade de escoamento numa dada posição a partir do gráfico? Em caso afirmativo, mostrar o procedimento dessa determinação. Em caso negativo, explicar o que falta para a determinação da velocidade.

(7) Qual o significado físico de  $\iint_A \vec{v} \cdot \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$ ? Justificar a resposta.

(8) O perfil da tensão de cisalhamento no escoamento de um fluido newtoniano através de um tubo circular é parabólico? Justificar a resposta.

(9) Simplificar a equação de Bernoulli para o caso de o volume de controle ser uma bomba centrífuga, com diâmetros distintos nas tubulações na entrada e saída. Justificar as passagens da solução.

(10) Dar quatro diferenças entre os medidores de vazão de placa de orifício e tubo de Pitot.

(11) A tensão de cisalhamento dentro da camada limite laminar, no escoamento de um fluido newtoniano, sobre uma placa plana, é dada por  $\tau_s = 0,332 \mu v_o (\rho v_o / \mu x)^{1/2}$ .

(11a) Descrever sucintamente o roteiro de dedução dessa expressão e dar as outras hipóteses admitidas na dedução.

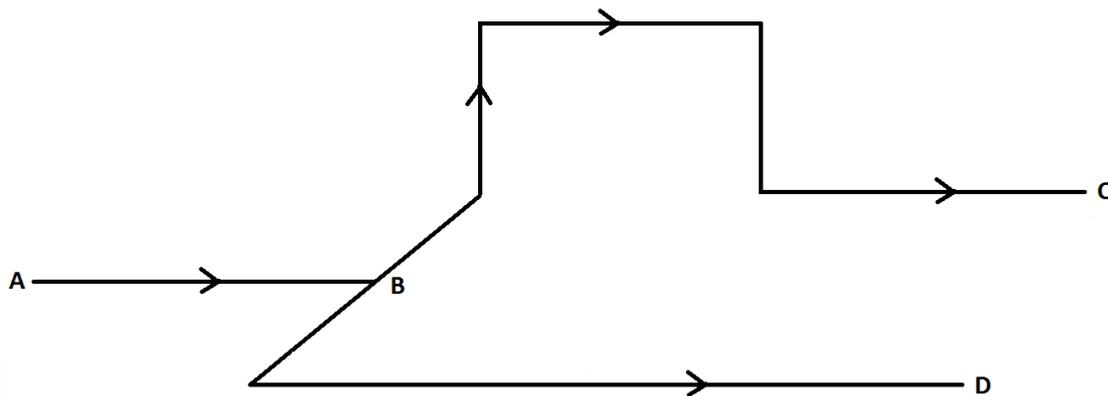
(11b) O valor da tensão de cisalhamento depende da posição normal à placa? Por quê?

(12) Maionese é transportada através de uma tubulação. Nesse estudo, pode-se aplicar as equações de Bernoulli e de Navier-Stokes? Justificar as respostas.

(13) Simplificar a equação de Navier Stokes em coordenadas cilíndricas para o escoamento na direção axial, em regime permanente, laminar, de um fluido newtoniano, em um espaço anular, formado por dois tubos circulares concêntricos. Justificar sucintamente cada simplificação. Dar as condições de contorno necessárias.

(14) A equação de continuidade e a equação de Navier Stokes, para coordenadas esféricas, estão apresentadas no Apêndice 2 do livro-texto. Dar os significados físicos dos termos ou agrupamentos de termos dessas equações.

(15) Seja o escoamento de um fluido conforme o esquema mostrado a seguir. Os pontos A, B, C e D estão num mesmo plano horizontal. As pressões em C e D são atmosféricas.



(15a) A variação de pressão em cada ramo é a mesma? Justificar a resposta.

(15b) A vazão de escoamento em cada ramo é a mesma? Em caso afirmativo, justificar a resposta. Em caso negativo, dar as condições complementares que devem ser satisfeitas para que as vazões sejam iguais entre si.

(15c) A perda de carga por atrito em cada ramo é a mesma? Em caso afirmativo, justificar a resposta. Em caso negativo, dizer em qual ramo a perda de carga é maior e justificar.

**Questionário N°4**

(1) Costuma-se afirmar que o fator de atrito para o escoamento laminar é dado por  $16/Re$ . Dar todas as condições de modo a tornar essa afirmação mais precisa e conceitual.

(2) Há diversos modos de expressar um balanço de energia. Os mais usuais são dados em energia/massa (J/kg), potência (W) ou carga (m). Dar os procedimentos para a sua conversão mútua.

(3) Na dedução das equações do balanço global de energia, admitidas certas hipóteses, chega-se a:

$$\frac{1}{2} \Delta \left[ \frac{w(v^3)_{av}}{v_b} \right] + g \Delta \left[ \frac{w(vz)_{av}}{v_b} \right] + \Delta \left[ \frac{w(vH)_{av}}{v_b} \right] + \frac{\partial \check{E}}{\partial \theta} = q - W_s$$

Que hipóteses adicionais devem ser admitidas para passar da equação acima para se chegar à mostrada a seguir? Explicar em que parte da dedução cada hipótese é usada.

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g \Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + l_w + W_s = 0$$

(4) Para os casos apresentados a seguir, dizer se, para ser usada a referida equação, cada uma das hipóteses relacionadas: deve ser satisfeita, não pode ocorrer ou é indiferente.

(4a) Equação  $l_{wf} = 2 f L v_b^2 / D$

Hipóteses a serem analisadas: fluido newtoniano, tubo completamente rugoso, regime permanente, tubo vertical, regime laminar, densidade constante.

(4b) Equação  $f = 0,046 Re^{-1/5}$

Hipóteses a serem analisadas: tubo liso, tubo horizontal, regime de escoamento desenvolvido, regime turbulento.

(4c) Equação  $\tau_s = - \Delta P D / 4L$

Hipóteses a serem analisadas: tubo horizontal, tubo liso, regime turbulento, regime permanente, fluido newtoniano, atrito desprezível.

(5) Corrigir as afirmações a seguir. Justificar as respostas.

(5a) Para que o regime de escoamento seja considerado laminar, o número de Reynolds deve ser inferior a 2100.

(5b) O perfil de velocidades num escoamento laminar pode não ser parabólico.

(5c) O número de Reynolds na entrada de um tubo circular, antes do desenvolvimento do perfil de velocidades, é expresso por  $\rho v_o D / \mu$ , onde  $\rho$  e  $\mu$  são propriedades do fluido, avaliadas à temperatura da parede,  $D$  é o diâmetro interno do tubo e  $v_o$  é a velocidade máxima de escoamento.

(5d) A subcamada viscosa persiste no escoamento turbulento, mesmo depois de o perfil de velocidades ter-se desenvolvido.

(5e) No escudo de um escoamento em regime laminar, não há necessidade de recorrer às variáveis médio-temporais.

(5f) Na chamada "distribuição universal de velocidades" em um escoamento turbulento, os limites de validade de cadauma das três equações componentes estão relacionados com a respectiva intensidade dos turbilhões.

(5g) A tensão de Reynolds esta relacionada ao atrito devido aos turbilhões.

(5h) O fator de atrito não depende do número de Reynolds quando o tubo é liso ou quando o regime é completamente turbulento.

(5i) O diâmetro equivalente para um duto de secção triangular equilátera de lado  $L$  é dado por  $\left[ L 3^{1/2} / 6 \right]$ .

(5j) A equação de Navier Stokes é um balanço diferencial de quantidade de movimento para um fluido incompressível.

(5k) A espessura da camada limite turbulenta cresce mais rapidamente em relação a da laminar.

(5l) Se uma placa plana é suficientemente longa ou se a velocidade de aproximação é muito alta, o escoamento na camada limite formada tende a tornar-se turbulento.

(5m) A conveniência do uso de variáveis médio-temporais num escoamento turbulento deve-se à caoticidade das variáveis físicas reais.

(5n) A viscosidade turbilhonar é uma propriedade própria do fluido e depende da posição e da rugosidade da parede do tubo.

(5o) O chamado "perfil logarítmico de velocidades" só se aplica para o escoamento em regime turbulento num tubo liso.

(6) Dar um roteiro de dedução do perfil da tensão de cisalhamento para o escoamento, na direção axial, em regime permanente, laminar, de um fluido newtoniano, incompressível, em um espaço anular, formado por dois tubos circulares concêntricos.

(7) É correto afirmar que a variação de pressão em cada um dos ramos quando uma corrente se bifurca é a mesma, em regime permanente? Justificar a resposta.

(8) Dar quatro fatores que reduzem o número de Reynolds crítico no escoamento sobre uma superfície sólida.

(9) Dar a expressão do número de Reynolds para o escoamento de um fluido de densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$ , através de um espaço externo formado por 4 tubos (diâmetro externo =  $d_e$ ; diâmetro interno =  $d_i$ ), circunscritos por um tubo maior (diâmetro externo =  $D_e$ , diâmetro interno =  $D_i$ )

(10) Um fluido newtoniano escoar em regime laminar, no interior de um tubo circular horizontal. Deduzir a expressão de  $l_{wf}$  (perda de energia por massa por causa do atrito) em função das propriedades do fluido, dimensões do tubo e vazão de escoamento. Repetir a dedução para o caso de o tubo ser vertical.

(11) Dar algumas aplicações práticas ao se conhecer o perfil de velocidades num escoamento.

## Balço Global de Massa

A equação de Transporte de Reynolds é dada por:

$$\frac{DN}{D\theta} = \iint_A \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \eta \rho dV$$

onde N é uma dada grandeza,  $\eta = N/\text{massa}$  e  $\frac{DN}{D\theta} = \frac{\partial N}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial N}{\partial x} + v_y \frac{\partial N}{\partial y} + v_z \frac{\partial N}{\partial z}$

Essa derivada é conhecida como a derivada substancial ou substantiva ou material e corresponde à derivada no enfoque lagrangeano, em que a observação é feita acompanhando-se o objeto em estudo.

No caso de balanço global de massa:

$$N = M \\ \eta = M/M = 1$$

Então, a equação de transporte de Reynolds nesse caso fica:

$$\frac{DM}{D\theta} = \iint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \rho d\check{V}$$

Mas,  $\frac{DM}{D\theta} = 0$  por definição de sistema fechado. Portanto:

$$\iint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \rho d\check{V} = 0$$

O produto escalar  $[\vec{v} \cdot d\vec{A}]$  representa a vazão volumétrica que atravessa a superfície de controle infinitesimal  $dA$ . Multiplicando-se esse produto escalar por  $\rho$ , tem-se a vazão mássica que atravessa a superfície de controle infinitesimal  $dA$ . Quando se faz a integração em toda a superfície de controle, resulta a vazão “total” que atravessa a superfície de controle.

Vale lembrar que a direção do vetor  $d\vec{A}$  é caracterizada pela normal à superfície, com sentido, por convenção, sempre para fora do volume de controle. Assim, se o vetor  $\vec{v}$  também tem sentido “para fora” (saindo do volume de controle), o ângulo formado pela velocidade e pela normal será menor que  $\pi/2$  e o produto escalar será positivo. Analogamente, se o vetor  $\vec{v}$  tem sentido “para dentro” (entrando no volume de controle), o ângulo formado pelos dois vetores será obtuso e o produto escalar será negativo.

Então, o significado físico do primeiro termo da equação do balanço global de massa é a variação da vazão mássica que atravessa a superfície de controle – “o que sai menos o que entra” (os sinais são dados pelos produtos escalares dos vetores de velocidade e área).

O segundo termo no balanço global representa o acúmulo de massa dentro do volume de controle em relação ao tempo.

## Balanco Global de Energia

### Caso Geral

A equação de Transporte de Reynolds é dada por:

$$\frac{DN}{D\theta} = \iint_A \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \eta \rho dV$$

onde N é uma dada grandeza,  $\eta = N/\text{massa}$  e  $\frac{DN}{D\theta} = \frac{\partial N}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial N}{\partial x} + v_y \frac{\partial N}{\partial y} + v_z \frac{\partial N}{\partial z}$ .

Essa derivada, conforme visto anteriormente, é conhecida como a derivada substancial ou substantiva ou material e corresponde à derivada no enfoque lagrangeano.

No caso de balanço global de energia:

$$\begin{aligned} N &= \check{E} && \text{(energia total)} \\ \eta &= \check{E}/m = E && \text{(energia/massa)} \end{aligned}$$

Então, a equação de transporte de Reynolds nesse caso fica:

$$\frac{D\check{E}}{D\theta} = \iint_A E \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V E \rho d\check{V}$$

Mas, pela termodinâmica, sabe-se que

$$\frac{D\check{E}}{D\theta} = \frac{dQ}{d\theta} - \frac{dW}{d\theta}$$

ou

$$\frac{D\check{E}}{D\theta} = q - \dot{W}$$

A energia total pode ser escrita como a soma das energias interna, cinética e potencial:

$$E = U + \frac{v^2}{2} + gz$$

Observe que todos os termos da equação acima são expressos em energia/massa.

Mas  $H = U + pV$ , onde H é a entalpia específica e V é o volume específico. Tem-se:

$$E = H - pV + \frac{v^2}{2} + gz$$

Então

$$q - \dot{W} = \iint_A \left[ H - pV + \frac{v^2}{2} + gz \right] \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_{\tilde{V}} E \rho d\tilde{V}$$

Separando o colchete em dois e fazendo o produto escalar  $\vec{v} \cdot d\vec{A}$ , a equação fica:

$$q - \dot{W} = \iint_A \left[ H + \frac{v^2}{2} + gz \right] \rho v dA \cos \alpha - \iint_A pV \rho v dA \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_{\tilde{V}} E \rho d\tilde{V}$$

O termo trabalho/tempo pode ser expresso de acordo com as diversas “procedências”:

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \iint_A pV \rho v dA \cos \alpha + \iint_{A_s} pV \rho v_s dA_s \cos \beta$$

O primeiro termo do segundo membro da equação representa o trabalho de eixo (“shaft”). O segundo termo é o trabalho realizado por unidade de massa de fluido, à pressão  $p$ , quando entra no volume de controle ou sai dele, ao deslocar um volume  $V$  na vizinhança (trabalho convectivo). O terceiro termo corresponde ao trabalho realizado pelo movimento não cíclico de uma parte sólida da superfície de controle, à velocidade  $v_s$ , que forma uma inclinação  $\beta$  em relação à normal à superfície  $dA_s$  (como se fosse uma deformação da superfície).

Com isso, pode-se escrever:

$$q - \dot{W}_s - \iint_A pV \rho v dA \cos \alpha - \iint_{A_s} pV \rho v_s dA_s \cos \beta = \iint_A \left[ H + \frac{v^2}{2} + gz \right] \rho v dA \cos \alpha - \iint_A pV \rho v dA \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_{\tilde{V}} E \rho d\tilde{V}$$

Finalmente

$$q - \dot{W}_s - \iint_{A_s} pV \rho v_s dA_s \cos \beta = \iint_A \left[ H + \frac{v^2}{2} + gz \right] \rho v dA \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_{\tilde{V}} E \rho d\tilde{V}$$

Vale lembrar que a equação acima está expressa em termos de energia/tempo.

## Casos Particulares

**Caso I**  $v_s = 0 \Rightarrow$  a integral dupla do 1º membro é nula

$$\alpha_2 = 0^\circ \text{ (saída do VC)} \Rightarrow \cos \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 = 180^\circ \text{ (entrada do VC)} \Rightarrow \cos \alpha_1 = -1$$

$\rho =$  constante em cada seção  $\Rightarrow \rho$  “sai” da integral dupla em cada seção.

A equação do balanço global de energia fica:

$$q - \dot{W}_s = \rho_2 \iint_{A_2} \left[ vH + \frac{v^3}{2} + vgz \right] dA - \rho_1 \iint_{A_1} \left[ vH + \frac{v^3}{2} + vgz \right] dA + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_{\tilde{V}} E \rho d\tilde{V}$$

Essa expressão pode ser escrita de outro modo. Para tanto, alguns termos serão rearranjados, conforme a seguir.

Pode-se escrever  $\rho_2 \iint_{A_2} \frac{v^3}{2} dA$  como:

$$\rho_2 \iint_{A_2} \frac{v^3}{2} dA = \left[ \frac{w_2}{v_{b2} A_2} \right] \iint_{A_2} \frac{v^3}{2} dA = \frac{w_2}{v_{b2} A_2} \frac{(v^3)_{av,2}}{2} A_2 = \frac{w_2 (v^3)_{av,2}}{2 v_{b2}}$$

Analogamente pode-se escrever desse modo para a seção 1. Estendendo essa maneira para  $(vH)$  e  $(vgz)$ , resulta:

$$q - \dot{W}_s = \frac{w_2 (vH)_{av,2}}{v_{b2}} + \frac{w_2 (v^3)_{av,2}}{2 v_{b2}} + \frac{w_2 g (vz)_{av,2}}{v_{b2}} - \frac{w_1 (vH)_{av,1}}{v_{b1}} - \frac{w_1 (v^3)_{av,1}}{2 v_{b1}} - \frac{w_1 g (vz)_{av,1}}{v_{b1}} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_{\tilde{V}} E \rho d\tilde{V}$$

**Caso II**  $v_s = 0 \Rightarrow$  a integral dupla do 1º membro é nula

$$\alpha_2 = 0^\circ \text{ (saída do VC)} \Rightarrow \cos \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 = 180^\circ \text{ (entrada do VC)} \Rightarrow \cos \alpha_1 = -1$$

$\rho =$  constante em cada secção  $\Rightarrow \rho$  “sai” da integral dupla em cada secção.

$w_2 = w_1 = w =$  constante  $\Rightarrow$  pode-se colocar  $w$  em evidência e em seguida dividir membro a membro por  $w$ .

A equação do balanço global de energia fica:

$$Q - \dot{W}_s = \frac{(vH)_{av,2}}{v_{b2}} + \frac{(v^3)_{av,2}}{2 v_{b2}} + \frac{g (vz)_{av,2}}{v_{b2}} - \frac{(vH)_{av,1}}{v_{b1}} - \frac{(v^3)_{av,1}}{2 v_{b1}} - \frac{g (vz)_{av,1}}{v_{b1}} + \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_{\tilde{V}} E \rho d\tilde{V}$$

Vale observar que essa nova equação passa a ser em termos de energia/massa, pois foi dividida por  $w$ .

**Caso III**  $v_s = 0 \Rightarrow$  a integral dupla do 1º membro é nula

$$\alpha_2 = 0^\circ \text{ (saída do VC)} \Rightarrow \cos \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 = 180^\circ \text{ (entrada do VC)} \Rightarrow \cos \alpha_1 = -1$$

$\rho = \text{constante em cada secção} \Rightarrow \rho$  “sai” da integral dupla em cada secção.

$w_2 = w_1 = w = \text{constante} \Rightarrow$  pode-se colocar  $w$  em evidência e em seguida dividir membro a membro por  $w$ .

Não há acúmulo de energia  $\Rightarrow$  a integral tripla é nula.

Com isso, fica:

$$Q - W_s = \frac{(vH)_{av,2}}{v_{b2}} + \frac{(v^3)_{av,2}}{2v_{b2}} + \frac{g(vz)_{av,2}}{v_{b2}} - \frac{(vH)_{av,1}}{v_{b1}} - \frac{(v^3)_{av,1}}{2v_{b1}} - \frac{g(vz)_{av,1}}{v_{b1}}$$

**Caso IV**  $v_s = 0 \Rightarrow$  a integral dupla do 1º membro é nula

$\alpha_2 = 0^\circ$  (saída do VC)  $\Rightarrow \cos \alpha_2 = 1$

$\alpha_1 = 180^\circ$  (entrada do VC)  $\Rightarrow \cos \alpha_1 = -1$

$\rho = \text{constante em cada secção} \Rightarrow \rho$  “sai” da integral dupla em cada secção.

$w_2 = w_1 = w = \text{constante} \Rightarrow$  pode-se colocar  $w$  em evidência e em seguida dividir membro a membro por  $w$ .

Não há acúmulo de energia  $\Rightarrow$  a integral tripla é nula.

A variação de velocidade, cota e temperatura (entalpia) é desprezível em cada secção  $\Rightarrow (v^3)_{av} = v_b^3$ ;  $(vH)_{av} = v_b H$ ;  $(vz)_{av} = v_b z$ .

A equação do balanço global de energia fica:

$$Q - W_s = (H_2 - H_1) + \frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

ou

$$Q - W_s = \Delta H + \frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z$$

## Balço Global de Energia Mecânica

Serão substituídos os termos “não mecânicos” da última equação por termos de energia mecânica.

Inicialmente, vale lembrar de novo que:

$$H = U + pV$$

Em termos “diferenciais”, pode-se escrever:

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

Ou ainda, em termos “integrais”:

$$\Delta H = \Delta U + \int_{V_1}^{V_2} pdV + \int_{p_1}^{p_2} Vdp$$

Mas, pela termodinâmica:

$$\Delta U = Q - W_{irrev} = Q - [W_{rev} - l_w] = Q - \left[ \int_{V_1}^{V_2} pdV - l_w \right]$$

Logo

$$\Delta H = Q - \left[ \int_{V_1}^{V_2} pdV - l_w \right] + \int_{V_1}^{V_2} pdV + \int_{p_1}^{p_2} Vdp$$

O termo  $\int_{V_1}^{V_2} pdV$  se cancela e  $V = 1/\rho$ . Então:

$$\Delta H = Q + l_w + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

Substituindo o termo  $\Delta H$  na equação de balanço global de energia (caso particular IV), tem-se:

$$Q - W_s = Q + l_w + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

O termo  $Q$  se cancela.

Chega-se finalmente à chamada equação de Bernoulli (ou equação de Bernoulli estendida):

$$\frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + l_w + W_s = 0$$

Se  $\rho =$  constante em todo o volume de controle, a equação simplifica-se para:

$$\frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + l_w + W_s = 0$$

ou

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + l_w + W_s = 0$$

## Casos Particulares da Equação de Bernoulli

### Volume de Controle com Bomba

Pode-se distinguir a parcela  $l_w$  (perda de energia/massa por causa do atrito) em dois termos: o primeiro ( $l_{wp}$ ) refere-se à perda na bomba e o segundo ( $l_{wf}$ ) à perda em todo o volume de controle menos a bomba.

Define-se ainda o rendimento ou a eficiência da bomba como  $\eta_p = (W_s + l_{wp})/W_s$ , onde, na convenção de sinais adotada, para o caso de bomba,  $W_s$  é  $< 0$  (o fluido recebe energia). Deve-se ressaltar que  $l_w$ ,  $l_{wp}$  ou  $l_{wf}$  são sempre  $> 0$ .

Substituindo esses novos termos na equação de Bernoulli, resulta:

$$\frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + l_{wf} + \eta_p W_s = 0$$

### Volume de Controle com Turbina

Nesse caso, pode-se considerar  $l_w = l_{wt} + l_{wf}$ , sendo  $l_{wt}$  a perda de energia/massa na turbina. O rendimento da turbina é definido como  $\eta_t = W_s/(W_s + l_{wt})$ , onde na convenção de sinais adotada, para o caso de turbina,  $W_s$  é  $> 0$  (o fluido fornece energia).

A equação de Bernoulli fica:

$$\frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + l_{wf} + \frac{W_s}{\eta_t} = 0$$

## Balço Global de Quantidade de Movimento

A equação de Transporte de Reynolds é dada por:

$$\frac{DN}{D\theta} = \iint_A \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \eta \rho dV$$

onde N é uma dada grandeza,  $\eta = N/\text{massa}$  e  $\frac{DN}{D\theta} = \frac{\partial N}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial N}{\partial x} + v_y \frac{\partial N}{\partial y} + v_z \frac{\partial N}{\partial z}$

Essa derivada é conhecida como a derivada substancial ou substantiva ou material e corresponde à derivada no enfoque lagrangeano, em que a observação é feita acompanhando-se o objeto em estudo.

No caso de balanço global de quantidade de movimento:

$$N = M\vec{v}$$

$$\eta = M\vec{v}/M = \vec{v}$$

Então, a equação de transporte de Reynolds nesse caso fica:

$$\frac{D(M\vec{v})}{D\theta} = \iint_A \vec{v}\rho\vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \vec{v}\rho dV$$

Mas, no enfoque Lagrangeano, tem-se:

$$\frac{D(M\vec{v})}{D\theta} = \vec{v} \frac{DM}{D\theta} + M \frac{D\vec{v}}{D\theta} = M\vec{a} = \vec{F}$$

pois  $\frac{DM}{D\theta} = 0$  por definição de sistema fechado. Portanto:

$$\vec{F} = \iint_A \vec{v}\rho\vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \vec{v}\rho dV$$

As forças podem ser de: gravidade, atrito, pressão.

Deve-se observar que o aspecto vetorial da equação deve-se à velocidade pois o produto escalar (vazão volumétrica) é escalar.

## Equações de Fator de Atrito em Tubulação

### Equação de Churchill

$$f_D = 8 \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A + B)^{3/2}} \right]^{1/12}$$

onde:

$$A = \left[ 2,457 \ln \frac{1}{(7/Re)^{0,9} + 0,27\epsilon/D} \right]^{16}$$
$$B = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

### Equação de Chen

$$\frac{1}{\sqrt{f_D}} = -2,0 \log \left[ \frac{\epsilon}{3,7065D} - \frac{5,0452}{Re} \log \left( \frac{1}{2,8257} \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{Re^{0,8981}} \right) \right]$$

para  $Re > 4000$

Referências:

- CHURCHILL, S.W. Chem. Eng., 91 (Nov 7, 1977).  
CHEN, N.H. Ind. Eng. Chem. Fundam., 18, 3, 1979.

# BALANÇOS DIFERENCIAIS E CAMADA LIMITE

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Química  
PQI-2201- Fenômenos de Transporte I

## Balanco Diferencial de Massa

### Caso Geral

Seja o volume de controle finito  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Pelo balanço de massa, tem-se:

$$[(\rho v_x)_{x+\Delta x} - (\rho v_x)_x] \Delta y \Delta z + [(\rho v_y)_{y+\Delta y} - (\rho v_y)_y] \Delta x \Delta z + [(\rho v_z)_{z+\Delta z} - (\rho v_z)_z] \Delta x \Delta y + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} (\Delta x \Delta y \Delta z) = 0$$

Dividindo-se a expressão por  $(\Delta x \Delta y \Delta z)$  e em seguida fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  e  $\Delta z \rightarrow 0$ , temos que:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

ou

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

ou

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

As equações acima podem ser escritas de outro modo ainda. Desenvolvendo-se as derivadas, tem-se:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

Colocando  $\rho$  em evidência, resulta:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left( v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) = 0$$

Ou

$$\rho \text{div} \vec{v} + \frac{D\rho}{D\theta} = 0$$

Todas as equações ora obtidas, expressas de diversos modos, representam o balanço diferencial de massa e são conhecidas como Equações de Continuidade. A sua validade pressupõe apenas que o fluido seja contínuo.

No Apêndice 2 do livro-texto encontram-se as equações de balanço diferencial de massa para os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

## Casos Particulares

**Caso I** Regime permanente  $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$

A equação do balanço diferencial de massa fica então:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

ou

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

**Caso II**  $\rho = \text{constante} \Rightarrow \frac{D\rho}{D\theta} = 0$

A equação do balanço diferencial de massa fica então:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ou

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

## Balço Diferencial de Quantidade de Movimento

### Caso Geral

Seja o volume de controle finito  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Pelo balanço de quantidade de movimento na direção x, tem-se:

$$\begin{aligned} & [(\rho v_x v_x)_{x+\Delta x} - (\rho v_x v_x)_x] \Delta y \Delta z + [(\rho v_y v_x)_{y+\Delta y} - (\rho v_y v_x)_y] \Delta x \Delta z + \\ & [(\rho v_z v_x)_{z+\Delta z} - (\rho v_z v_x)_z] \Delta x \Delta y + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} [\Delta x \Delta y \Delta z] \\ & = -\{[(\tau_{xx})_{x+\Delta x} - (\tau_{xx})_x] \Delta y \Delta z + [(\tau_{yx})_{y+\Delta y} - (\tau_{yx})_y] \Delta x \Delta z \\ & + [(\tau_{zx})_{z+\Delta z} - (\tau_{zx})_z] \Delta x \Delta y\} - \{[(p)_{x+\Delta x} - (p)_x] \Delta y \Delta z\} + \rho (\Delta x \Delta y \Delta z) g \end{aligned}$$

Dividindo-se a equação por  $(\Delta x \Delta y \Delta z)$  e em seguida fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  e  $\Delta z \rightarrow 0$ , resulta em:

$$\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial \theta} = - \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Essa equação pode ser escrita de outro modo. Desenvolvendo-se as derivadas, vem:

$$\begin{aligned} & v_x \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + (\rho v_x) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + (\rho v_y) \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + (\rho v_z) \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ & + v_x \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \theta} = - \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

Colocando-se  $v_x$  e  $\rho$  em evidência, fica:

$$\begin{aligned} & v_x \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right] \\ & + \rho \left[ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \right] \\ & = - \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

O primeiro colchete do 1º membro da equação acima é nulo pela equação de continuidade e o segundo é a derivada substancial de  $v_x$ . Então, o balanço diferencial de quantidade de movimento na direção x pode ser escrito como:

$$\rho \frac{Dv_x}{D\theta} = - \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

## Casos Particulares

### Caso I Fluido newtoniano

Para os fluidos newtonianos, demonstra-se que valem as seguintes relações para  $\tau$ :

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2\mu}{3} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ \tau_{yy} &= -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2\mu}{3} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ \tau_{zz} &= -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2\mu}{3} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]\end{aligned}$$

Substituindo  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{zx}$  na equação geral, tem-se:

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv_x}{D\theta} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2\mu}{3} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x\end{aligned}$$

### Caso II Fluido newtoniano Viscosidade constante

Após devido rearranjo matemático da última equação, chega-se a:

$$\rho \frac{Dv_x}{D\theta} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

### Caso III Fluido newtoniano Viscosidade constante Densidade constante

Nesse caso,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , ou seja, o segundo parênteses do 2º membro é nulo. Logo:

$$\rho \frac{Dv_x}{D\theta} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Explicitando a derivada substancial, resulta a chamada equação de Navier-Stokes, na direção x:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

As equações de Navier-Stokes nas direções y e z são dadas respectivamente por:

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

No Apêndice 2 do livro adotado, encontram-se as equações de Navier-Stokes para os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

## Solução de Casos Particulares da Equação de Navier-Stokes

### Caso I Escoamento num Tubo Circular

Determinar o perfil de velocidades num escoamento unidimensional (direção axial), sob regime laminar, estado estacionário, escoamento isotérmico desenvolvido, de um fluido newtoniano incompressível, num tubo circular horizontal de diâmetro constante.

Equação de continuidade:

$$\text{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Considerando-se as hipóteses do caso estudado, a equação simplifica-se para:

$$\rho \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

Equação de quantidade de movimento na direção z:

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Considerando-se que  $\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{L}$  = constante, a equação simplificada fica:

$$\mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = \frac{\Delta p}{L}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r \Delta p}{\mu L}$$

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{\Delta p r^2}{\mu L} + C_1$$

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r + \frac{C_1}{r}$$

1ª condição de contorno:

$$C_1 = 0$$

Então:

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r$$
$$v_z = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{r^2}{2} + C_2$$

2ª condição de contorno:

$$C_2 = -\Delta p \cdot R^2 / 4\mu L$$

Portanto, o perfil de velocidades resulta:

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\mu L} (r^2 - R^2)$$

Ou

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\mu L} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] = v_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

## Caso II Escoamento entre Placas Planas

Determinar o perfil de velocidades num escoamento unidimensional (direção longitudinal), sob regime laminar, estado estacionário, escoamento isotérmico desenvolvido, de um fluido newtoniano incompressível, entre duas placas planas paralelas horizontais, com espaçamento entre elas constante (ver fig. 10-1 do livro adotado).

Equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Equação de quantidade de movimento na direção x:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Considerando-se que  $\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{L}$  = constante, a equação simplificada fica:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{\Delta p}{L}$$
$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta p}{\mu L} y + C_1$$

1ª condição de contorno:

$$C_1 = 0$$

Então:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta p}{\mu L} y$$
$$v_x = \frac{\Delta p}{\mu L} \frac{y^2}{2} + C_2$$

2ª condição de contorno:

$$C_2 = -\Delta p \cdot y_0^2 / 2\mu L$$

Portanto, o perfil de velocidades resulta:

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\mu L} (y^2 - y_0^2)$$

Ou

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\mu L} y_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 \right] = v_{max} \left[ 1 - \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 \right]$$

### Caso III Escoamento num Espaço Anular

Determinar o perfil de velocidades num escoamento unidimensional (direção axial), sob regime laminar, estado estacionário, escoamento isotérmico desenvolvido, de um fluido newtoniano incompressível, num espaço anular formado por dois tubos circulares concêntricos horizontais de diâmetros respectivamente constantes.

Equação de continuidade simplificada:

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

Equação de quantidade de movimento na direção z simplificada:

$$\mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = \frac{\Delta p}{L}$$
$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r \Delta p}{\mu L}$$
$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{\Delta p}{\mu L} \frac{r^2}{2} + C_1$$
$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r + \frac{C_1}{r}$$

1ª Condição de contorno:

$$r = R_1 ; v_z(r) = 0$$

2ª Condição de contorno:

$$r = R_2 ; v_z(r) = 0$$

Então:

$$v_z = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{r^2}{2} + C_1 \ln r + C_2$$

Substituindo as condições de contorno na equação acima, temos que:

$$0 = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{R_1^2}{2} + C_1 \ln R_1 + C_2$$

$$0 = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{R_2^2}{2} + C_1 \ln R_2 + C_2$$

Subtraindo-se as equações acima, encontra-se  $C_1$

$$C_1 = -\frac{\Delta p}{4\mu L} * \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

E substituindo  $C_1$ , encontra-se  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L} * \left[ \frac{(R_1^2 - R_2^2) \ln(R_1)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - R_1^2 \right]$$

Logo:

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 - \frac{\Delta p}{4\mu L} * \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} * \ln r + \frac{\Delta p}{4\mu L} * \left[ \frac{(R_1^2 - R_2^2) \ln(R_1)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - R_1^2 \right]$$

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\mu L} \left[ r^2 - R_1^2 - \left( \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) * \ln \frac{r}{R_1} \right]$$

Derivando-se a equação acima em relação a  $r$ , pode-se encontrar a posição onde a velocidade será máxima:

$$r_{max} = \sqrt{\frac{R_1^2 - R_2^2}{2 \ln \frac{R_1}{R_2}}}$$

Substituindo-se a expressão do  $r_{max}$  na equação anterior, tem-se o perfil de velocidades:

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\mu L} \left[ r^2 - R_1^2 - 2r_{max}^2 * \ln \frac{r}{R_1} \right]$$

## Camada Limite Laminar em Placa Plana

### Hipóteses do Estudo

Escoamento bidimensional de um fluido newtoniano, incompressível, dentro da camada limite laminar, formada sobre uma placa plana horizontal, com incidência nula na borda de ataque, sob regime permanente, isotérmico, com velocidade de aproximação constante, gradiente de pressão desprezível na direção de escoamento.

### Perfil de Velocidades

Equação de continuidade:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Então:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{eq. 1})$$

Equação de quantidade de movimento na direção x:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial\theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Então:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (\text{eq. 2})$$

No caso da placa plana  $dp/dx = 0$ .

Condições de contorno:

$$y = 0 : v_x = v_y = 0$$

$$y = \infty : v_0 = 0$$

Define-se a função corrente  $\Psi$  de modo que  $\frac{\delta\Psi}{\delta y} = v_x$  e  $\frac{\delta\Psi}{\delta x} = -v_y$ .

Então, a eq. 2 fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} \right) - \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \right) &= \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{eq. 3})$$

Para a solução desta equação diferencial, será usado o método de Combinação de Variáveis. Definem-se as novas variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} \eta &= y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \\ f(\eta) &= \frac{\Psi}{\sqrt{\frac{v_o \mu x}{\rho}}} \end{aligned}$$

Com isso, demonstra-se que, após devidos rearranjos, a eq. 3 torna-se uma equação diferencial ordinária de 3ª ordem:

$$f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} = 0 \quad (\text{eq. 4})$$

As relações entre as novas variáveis introduzidas  $[\eta, f(\eta)]$  e as anteriores  $[v_x, v_y]$  são dadas por:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = f'(\eta) \sqrt{\frac{v_o \mu x}{\rho}} \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} = f'(\eta) v_o \\ v_y &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\left[ f'(\eta) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu}} x^{-3/2} \right) \sqrt{\frac{v_o \mu x}{\rho}} + f(\eta) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_o \mu}{\rho x}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_o \mu}{\rho x}} \left[ y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} f'(\eta) - f(\eta) \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_o \mu}{\rho x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \end{aligned}$$

Logo, as condições de contorno da eq. 4 são:

$$\eta = 0 : f = f' = 0$$

$$\eta = \infty : f' = 1,0$$

Uma das soluções da eq. 4 que satisfaz as condições de contorno acima é a chamada solução exata de Blasius, dada pela série polinomial:

$$f(\eta) = 0,16603 \cdot \eta^2 - 4,594 \cdot 10^{-4} \cdot \eta^5 + 2,4972 \cdot 10^{-6} \cdot \eta^8 - 1,4277 \cdot 10^{-8} \cdot \eta^{11} + \dots$$

A sua derivada é:

$$f'(\eta) = 0,33206 \cdot \eta - 22,9715 \cdot 10^{-4} \cdot \eta^4 + 19,9776 \cdot 10^{-6} \cdot \eta^7 - 15,7047 \cdot 10^{-8} \cdot \eta^{10} + \dots$$

Finalmente, os perfis das componentes de velocidade  $v_x$  e  $v_y$  serão dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} v_x &= v_o f'(\eta) = v_o [0,33206 \cdot \eta - 22,9715 \cdot 10^{-4} \cdot \eta^4 + \dots] \\ &= v_o \left[ 0,33206 y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} - 22,9715 \cdot 10^{-4} \left( y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu v_o}{\rho x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu v_o}{\rho x}} \left[ y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \left( 0,33206 y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} - 22,9715 \cdot 10^{-4} \left( y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \right)^4 + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 0,16603 \left( y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \right)^2 - 4,594 \cdot 10^{-4} \left( y \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \right)^5 + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

### Tensão de Cisalhamento na Placa

A tensão de cisalhamento sobre a placa ( $y = 0$ ) para um fluido newtoniano é obtida por:

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Mas, pelo perfil de velocidades  $v_x$  anteriormente determinado, tem-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = v_o \left[ 0,33206 \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} - 4 * 22,9715 \cdot 10^{-4} \left( \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \right)^4 y^3 + \dots \right]$$

Então:

$$\tau_s = 0,33206 \mu v_o \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}}$$

### Força de Atrito na Placa

A força de atrito sobre a placa plana de comprimento  $L$  (direção  $x$ ) e largura  $b$  (direção  $z$ ) é dada por:

$$F_d = \int_0^b \int_0^L \tau_s dx dz = \int_0^b \int_0^L 0,33206 \mu v_o \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} dx dz = b \cdot 0,33206 \mu v_o \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \cdot 2 \cdot \sqrt{x} \Big|_0^L$$

$$F_d = 0,66412b\mu v_o \sqrt{\frac{\rho v_o L}{\mu}}$$

ou

$$F_d = 0,66412b\mu v_o \sqrt{Re_L}$$

## **Coefficiente de Atrito na Placa**

O fator ou coeficiente de atrito é definido como:

$$f = \frac{\text{Força de atrito}}{(\text{área característica})(\text{energia cinética característica})}$$

$$f = \frac{F_d}{(bL) \left( \frac{1}{2} \rho v_o^2 \right)}$$

$$f = 1,328 \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_o L}}$$

$$f = 1,328(Re_L)^{-1/2}$$

## **Espessura da Camada Limite Laminar**

Fazendo-se o gráfico de  $f'(\eta)$  em função de  $\eta$ , observa-se que para  $\eta \sim 5$ ,  $f'(\eta)$  assume o valor assintótico igual a 1. Pelas definições de  $f'(\eta)$  e  $\eta$ , então:

$$5 = \delta \sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}}$$

ou

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho v_o}}$$

## Balanço Global em Camada Limite

### Balanço Global de Massa na Camada Limite

No volume de controle indicado, pelo balanço global de massa, tem-se:

$$\iint_A v \rho \cos \alpha \, dA + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V \rho \, d\check{V} = 0$$

Como se trata de regime permanente, a derivada em relação ao tempo é nula. No caso, a superfície de controle  $A$  é a soma de  $(A_1 + A_2 + A_3)$ , sendo que:

$$\begin{aligned} \text{Em } A_1: & \quad v \cos \alpha = -v_x \\ \text{Em } A_2: & \quad v \cos \alpha = +v_x \\ \text{Em } A_3: & \quad v \cos \alpha = v \cos \alpha \end{aligned}$$

Então:

$$\iint_{A_2} v_x \rho \, dA - \iint_{A_1} v_x \rho \, dA + \iint_{A_3} v \rho \cos \alpha \, dA = 0$$

Donde, obtém-se:

$$\iint_{A_3} v \rho \cos \alpha \, dA = - \left[ \iint_{A_2} v_x \rho \, dA - \iint_{A_1} v_x \rho \, dA \right] \text{ (eq. 1)}$$

### Balanço Global de Quantidade de Movimento na Camada Limite

Pelo balanço global de quantidade de movimento na direção  $x$ , tem-se:

$$\iint_A v_x \rho v \cos \alpha \, dA + \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_V v_x \rho \, d\check{V} = R_x + F_{xp} + F_{xd} + F_{xg}$$

Simplificando-se a equação, fica:

$$\iint_A v_x \rho v \cos \alpha \, dA = F_{xd}$$

Subdividindo-se de novo a superfície de controle  $A$  em  $(A_1 + A_2 + A_3)$ , vem:

$$\iint_{A_2} v_x^2 \rho \, dA - \iint_{A_1} v_x^2 \rho \, dA + \iint_{A_3} v_o v \rho \cos \alpha \, dA = F_{xd} \text{ (eq. 2)}$$

Substituindo a eq. 1 na eq. 2, resulta:

$$\iint_{A_2} v_x^2 \rho \, dA - \iint_{A_1} v_x^2 \rho \, dA - v_o \left[ \iint_{A_2} v_x \rho \, dA - \iint_{A_1} v_x \rho \, dA \right] = F_{xd}$$

Para  $\rho = \text{constante}$ :

$$\begin{aligned} \iint_{A_2} (v_x^2 - v_o v_x) dA - \iint_{A_1} (v_x^2 - v_o v_x) dA &= \frac{F_{xd}}{\rho} \\ \iint_{A_2} v_x (v_o - v_x) dA - \iint_{A_1} v_x (v_o - v_x) dA &= -\frac{F_{xd}}{\rho} \end{aligned}$$

$$dA = dy \, dz$$

$$\int_0^W \int_0^{\delta_2} v_x (v_o - v_x) dy dz - \int_0^W \int_0^{\delta_1} v_x (v_o - v_x) dy dz = -\frac{F_{xd}}{\rho}$$

$$-F_{xd} = \tau_{s,av} (x_2 - x_1) W$$

Onde  $\tau_{s,av}$  é o valor médio da tensão de cisalhamento na placa, entre  $x_2$  e  $x_1$  (pois  $\tau_s$  varia com  $x$ ) e  $[(x_2 - x_1)W]$  é a área da placa considerada.

Então:

$$\begin{aligned} W \int_0^{\delta_2} v_x (v_o - v_x) dy - W \int_0^{\delta_1} v_x (v_o - v_x) dy &= \frac{\tau_{s,av} (x_2 - x_1) W}{\rho} \\ \frac{\int_0^{\delta_2} v_x (v_o - v_x) dy - \int_0^{\delta_1} v_x (v_o - v_x) dy}{x_2 - x_1} &= \frac{\tau_{s,av}}{\rho} \end{aligned}$$

Quando  $(x_2 - x_1) \rightarrow 0$ , ou seja, quando  $x_2 \rightarrow x_1$ ,  $\tau_s$  assume o valor num dado ponto  $x$ .

Logo:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (v_o - v_x) dy = \frac{\tau_s}{\rho} \text{ (eq. 3)}$$

Essa equação será usada posteriormente na dedução da espessura da camada limite.

## Aplicações para a Camada Limite Laminar

Um perfil de velocidades simples para o escoamento dentro da camada limite laminar é dado por um polinômio de 3º grau (série polinomial já “truncada”):

$$\frac{v_x}{v_o} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Essa equação é solução daquela equação diferencial ordinária de 3º grau (ver Camada Limite Laminar em Placa Plana) e atende as condições de contorno, a saber:

$$\begin{aligned} y = 0: & \quad v_x = 0 \\ y = \delta: & \quad v_x = v_o \\ y = \delta & \quad \frac{dv_x}{dy} = 0 \text{ (} v_x \text{ é máxima)} \end{aligned}$$

Substituindo esse perfil no lugar de  $v_x$  na eq. 3, tem-se:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_o \left[ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] \left[ v_o - v_o \left( \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right) \right] dy = \frac{\tau_s}{\rho}$$

Efetuada-se a integração, resulta:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{280\tau_s}{39v_o^2\rho} \text{ (eq. 4)}$$

Mas, para o fluido newtoniano,

$$\tau_s = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0}$$

Derivando-se  $v_x$  em relação a  $y$ , a partir do perfil de velocidades considerado (polinômio de 3º grau), vem:

$$\tau_s = \mu \frac{3v_o}{2\delta}$$

Então, voltando-se à eq. 4, resulta:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{280}{39v_o^2\rho} \left( \mu \frac{3v_o}{2\delta} \right)$$

Finalmente, para se obter a expressão da espessura da camada limite, basta integrar a equação acima. Logo:

$$\int_0^{\delta_L} \delta d\delta = \frac{280}{39v_o^2\rho} \frac{3\mu v_o}{2} \int_0^L dx$$

$$\delta_L = 4,64 \sqrt{\frac{\mu L}{\rho v_o}}$$

Vale lembrar que, pela solução de Blasius, a expressão obtida para a espessura da camada limite laminar é semelhante (o coeficiente era 5, no lugar de 4,64).

A partir da tensão de cisalhamento e da força de atrito, chega-se à seguinte equação para o fator de atrito:

$$f = 1,29 . Re_L^{-1/2}$$

De novo, a expressão é semelhante àquela obtida a partir da solução de Blasius (o coeficiente era 1,328, no lugar de 1,29).

### Aplicações para a Camada Limite Turbulenta

Um perfil de velocidades simples para escoamento turbulento no interior de um tubo circular é dado por  $v = v_{max}(y/R)^{1/7}$ . “Adaptando-se” essa equação para o escoamento dentro da camada limite turbulenta sobre uma placa plana, pode-se escrever:  $v_x = v_o(y/\delta)^{1/7}$ .

Substituindo esse perfil no lugar de  $v_x$  na eq. 3, tem-se:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[ v_o \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] \left[ v_o - v_o \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] dy = \frac{\tau_s}{\rho}$$

Efetuada-se a integração, resulta:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{7} \frac{\tau_s}{\rho v_o^2}$$

Para prosseguir na obtenção da espessura da camada limite, necessita-se de uma expressão para  $\tau_s$ . De novo, essa será obtida a partir de “adaptações” da expressão correspondente em tubo circular.

Num tubo circular,  $\tau_s = f(\rho v_b^2/2)$ . Uma das equações para o fator de atrito em tubo liso é  $f = 0,079(\rho v_b D/\mu)^{-1/4}$ .

Para o escoamento na camada limite turbulenta sobre uma placa plana, pode-se fazer as seguintes “aproximações”:  $D = 2\delta$ ;  $v_b = 0,817v_{max} = 0,817v_o$ .

Então, a equação da tensão de cisalhamento sobre a placa fica:

$$\tau_s = \frac{\rho(0,817v_o)^2}{2} \left[ 0,079 \left( \frac{\rho 0,817v_o 2\delta}{\mu} \right)^{-1/4} \right]$$

$$\tau_s = 0,023 \rho v_o^2 \left( \frac{\rho v_o \delta}{\mu} \right)^{-1/4}$$

Então, voltando-se à eq. 4, resulta:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{7\rho v_o^2} 0,023\rho v_o^2 \left(\frac{\rho v_o \delta}{\mu}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^{\delta_L} \delta^{-\frac{1}{4}} d\delta = \frac{72}{7} \cdot 0,023 \left(\frac{\rho v_o}{\mu}\right)^{-\frac{1}{4}} \int_0^L dx$$

$$\delta_L = 0,376 \left(\frac{\rho v_o L}{\mu}\right)^{\frac{1}{5}} L$$

$$\delta_L = 0,376(Re_L)^{\frac{1}{5}} L$$

A partir da tensão de cisalhamento e da força de atrito, chega-se à seguinte equação para o fator de atrito:

$$f = 0,072(Re_L)^{-1/5}$$

Convém destacar que para as equações deduzidas, pressupôs-se que a camada limite turbulenta inicia logo na borda de ataque.

Para o caso de ocorrer uma camada limite laminar antecedendo a turbulenta, pode-se usar a equação de Prandtl-Schlichting para o fator de atrito:

$$f = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}} - \frac{A}{Re_L}$$

onde  $A$  é uma constante cujo valor depende do  $Re$  de transição ( $Re$  crítico):

$Re_{cr}$	$3 \times 10^5$	$5 \times 10^5$	$1 \times 10^6$	$3 \times 10^6$
$A$	1050	1700	3300	8700

## Camada Limite Laminar em Placa Plana

Expressões deduzidas a partir da solução de Blasius

$$v_x = f'(\eta)v_o \quad (\text{componente de velocidade } v_x)$$

$$v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v_o\mu}{\rho x}}[\eta f'(\eta) - f(\eta)] \quad (\text{componente de velocidade } v_y)$$

$$\eta = y\sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}}$$

$$f(\eta) = 0,16603.\eta^2 - 4,594.10^{-4}.\eta^5 + 2,4972.10^{-6}.\eta^8 - 1,4277.10^{-8}.\eta^{11} + \dots$$

$$f'(\eta) = 0,33206.\eta - 22,9715.10^{-4}.\eta^4 + 19,9776.10^{-6}.\eta^7 - 15,7047.10^{-8}.\eta^{10} + \dots$$

(Ver solução gráfica nas figuras 11-8 e 11-9, Bennett & Myers, 1982)

$$\tau_s = 0,33206\mu v_o\sqrt{\frac{\rho v_o}{\mu x}} \quad (\text{tensão de cisalhamento na placa})$$

$$F_d = 0,66412.b.\mu.v_o\sqrt{Re_L} \quad (\text{força de atrito na placa})$$

$$f = 1,328(Re_L)^{-1/2} \quad (\text{fator de atrito na placa em camada limite laminar})$$

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\mu x}{\rho v_o}} \quad (\text{espessura da camada limite laminar})$$

## Camada Limite Turbulenta em Placa Plana ( $x_{cr} = 0$ )

$$\delta = 0,376\left(\frac{\rho v_o L}{\mu}\right)^{-1/5} L \quad (\text{espessura da camada limite turbulenta})$$

$$f = 0,072\left(\frac{\rho v_o L}{\mu}\right)^{-1/5} \quad (\text{fator de atrito na placa em camada limite turbulenta})$$

## Fluidos Não Newtonianos

### Características

Não seguem a lei de viscosidade de Newton dada por:

$$\tau = -\mu\dot{\gamma} = -\mu[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^t]$$

A relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é uma função linear, sem passar pela origem dos eixos das coordenadas.

A viscosidade aparente é função da taxa de deformação e em alguns casos dependente do tempo:

$$\tau = -\mu_a\dot{\gamma} \text{ sendo } \mu_a = \mu_a(\dot{\gamma}, t)$$

### Tipos de fluidos não newtonianos (Brodkey, 1967; Brodkey, 1988)

O comportamento pode depender da concentração, do modo de preparação, da idade, das condições de ensaio, do instrumento usado, do tempo de medição adotado e de outros fatores.

#### Tipos independentes do tempo

*Shear thinning fluid (fluido pseudoplástico)*

A viscosidade aparente decresce com o aumento da tensão de cisalhamento.

No gráfico de  $[\log \tau \text{ x } \log \dot{\gamma}]$ , a inclinação é menor do que 1.

*Shear thickening fluid (fluido dilatante)*

A viscosidade aparente cresce com o aumento da tensão de cisalhamento.

No gráfico de  $[\log \tau \text{ x } \log \dot{\gamma}]$ , a inclinação é maior do que 1.

*Bingham plastic fluid (fluido plástico de Bingham) e generalized plastic fluid*

Não escoam até que a tensão de cisalhamento exceda um valor  $\tau_0$ . A viscosidade aparente pode ser constante (*ideal Bingham plastic*) ou não (*generalized plastic*) em relação à tensão de cisalhamento.

#### Tipos dependentes do tempo

*Thinning with time (fluido tixotrópico)*

É aquele em que, num ensaio feito à taxa de deformação constante, a tensão de cisalhamento (ou a viscosidade aparente) diminui com o tempo (ao longo do ensaio).

A curva reológica obtida num ensaio depende do tempo de resposta adotado, suficientemente rápido ou não para seguir o efeito da taxa de variação com o tempo.

*Thickening with time (fluido anti-tixotrópico ou reopético)*

A viscosidade aparente aumenta com o tempo.

*Viscoelástico*

Apresenta tanto o comportamento de fluido (viscoso) e de sólido (elástico).

## **Caracterização reológica**

### **Tipos de viscosímetros:**

*Viscosímetro capilar:* medem-se a queda de pressão e a vazão de escoamento, usando-se diversos diâmetros e comprimentos.

*Viscosímetro rotacional (cilindros concêntricos, placa-cone):* medem-se o torque (→ tensão de cisalhamento  $\tau$ ) e a rotação (com a geometria → taxa de deformação  $\dot{\gamma}$ ).

### **Cuidados na medição (Brodkey, 1967):**

Os métodos de medição de um ponto simples de viscosidade, envolvendo apenas uma taxa de deformação, têm pouca aplicabilidade para fluidos não newtonianos.

O tempo de medição deve ser condizente com o tempo de resposta do material.

Há diversos problemas comuns que podem complicar a medição: a existência de “plug flow”, escorregamento na parede, efeitos de aquecimento, efeitos de extremidade, instabilidade laminar e turbulência.

Deve-se observar como é definido o valor da “viscosidade” fornecido pelo reômetro.

## **Exemplos de fluidos não newtonianos**

### *Pseudoplásticos:*

maionese, suco de laranja, solução de sabão, esgoto com detergente, licor negro, solução de altos polímeros, solução de polietileno, emulsão de borracha látex, solução de ésteres de celulose em solventes orgânicos, plásticos fundidos, tintas, pasta celulósica em suspensão aquosa, sangue, solução de acetato de celulose.

### *Dilatantes:*

soluções de goma arábica, cola acrílica, soluções de silicato de potássio, suspensões de amido, suspensões de areia, suspensões de óxido de titânio, suspensões com alto teor de sólidos de modo geral.

### *Binghamianos:*

suspensões de rochas e minérios, suspensões de dióxido de titânio, argila e talco, lamas de perfuração, sucos de frutas com muita pectina, pasta de dente.

### *Tixotrópicos:*

areia movediça, molho de tomate, margarina, tintas de impressão, polímeros em solução, plásticos fundidos, lamas de perfuração.

*Reopéticos:*

suspensões de bentonita e gesso, suspensão de oleato de amônio.

*Viscoelásticos:*

betumes, gelatinas, massa de pão, polímeros em solução, plásticos fundidos.

## Fator de Atrito de Fanning

*Fluido Newtoniano*

Regime laminar ( $N_{Re} < 2100$ )

$$f = \frac{16}{N_{Re}}$$

Regime turbulento ( $N_{Re} > 4000$ )

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log_{10}(N_{Re}\sqrt{f}) - 0,4$$

$$\text{onde } N_{Re} = \frac{\rho v_b D}{\mu}$$

*Fluido da Lei de Potência (Power Law)*

$$\sigma = K(\dot{\gamma})^n$$

Regime laminar ( $N_{Re,PL} < N_{Re,PL,critical}$ )

$$f = \frac{16}{N_{Re,PL}}$$

$$\text{onde } N_{Re,PL} = \left( \frac{D^n v_b^{2-n} \rho}{8^{n-1} K} \right) \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^n$$

$$N_{Re,PL,critical} = \frac{6464n}{(1+3n)^2 \left( \frac{1}{2+n} \right)^{(2+n)/(1+n)}}$$

Observação:  $N_{Re,PL,critical}$  pode ser obtido a partir da Figura 1.1 de Valentas et al., 1997

Regime turbulento ( $N_{Re,PL} > N_{Re,PL,critical}$ )

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left( \frac{4}{n^{0,75}} \right) \log_{10}[(N_{Re,PL})f^{1-(n/2)}] - \left( \frac{0,4}{n^{1,2}} \right)$$

Observação:  $f$  pode ser obtido a partir da Figura 1.2 de Valentas et al., 1997.

*Fluido Herschel-Bulkley*

$$\sigma = K(\dot{\gamma})^n + \sigma_o$$

Regime laminar

$$f = \frac{16}{\Psi N_{Re,PL}}$$

$$\text{onde } \Psi = (1 + 3n)^n (1 - c)^{1+n} \left[ \frac{(1-c)^2}{(1+3n)} + \frac{2c(1-c)}{(1+2n)} + \frac{c^2}{(1+n)} \right]^n$$

$$N_{Re,PL} = 2N_{He,M} \left( \frac{n}{1+3n} \right)^2 \left( \frac{\Psi}{c} \right)^{\frac{2-n}{n}}$$

$$N_{He,M} = \frac{D^2 \rho}{K} \left( \frac{\sigma_o}{K} \right)^{\frac{2-n}{n}}$$

Observação:  $f$  pode ser obtido a partir das Figuras 1.6 a 1.15 de Valentas et al., 1997

## Perda por Atrito em Singularidades

*Fluido Newtoniano: Regime turbulento*

Usar dados da Tabela 1.5 de Valentas et al., 1997.

Contração brusca  $k_f = 0,55 \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \left(\frac{2}{\alpha}\right)$

Expansão brusca  $k_f = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{2}{\alpha}\right)$

onde  $\alpha = 1$

*Fluido Newtoniano: Regime laminar*

Usar dados da 1.6 de Valentas et al., 1997.

*Fluido Não Newtoniano:  $N_{Re}$  ou  $N_{Re,PL} > 500$*

Usar dados da Tabela 1.5 de Valentas et al., 1997.

*Fluido Newtoniano ou Não Newtoniano:  $20 < N_{Re}$  ou  $N_{Re,PL} < 500$*

Adotar  $k_f = \beta/N$  onde  $N = N_{Re}$  ou  $N_{Re,PL}$

$$\beta = 500(k_f)_{turbulento}$$

$(k_f)_{turbulento}$  é obtido da Tabela 1.5 de Valentas et al., 1997.

Para contração brusca:  $(k_f)_{turbulento} = 0,55 \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \left(\frac{2}{\alpha}\right)$

Para expansão brusca:  $(k_f)_{turbulento} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{2}{\alpha}\right)$

onde  $\alpha = \frac{2(2n+1)(5n+3)}{3(3n+1)^2}$