

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA**



**APOSTILA COMPLEMENTAR
LABORATÓRIO DE MECÂNICA - 4300254
(Licenciatura em Física)**

Apêndices retirados da apostila de Laboratório de Mecânica – 4300254 (versão 14 de maio de 2014) formulada pelo Profº Dr Nilberto Medina e Profº Dr Vito Vanin.

1º SEMESTRE/2016

I - LEIS DE CONSERVAÇÃO

Introdução

O texto a seguir tem por objetivo apoiar as experiências sobre as leis de conservação da mecânica. Em diferentes arranjos experimentais deverá ser investigada a conservação (ou não) da energia, da quantidade de movimento (momento linear) e do momento angular (quantidade de movimento angular). A metodologia adotada nas experiências será essencialmente a mesma de qualquer experiência de cinemática: Medem-se as posições e tempos do(s) corpo(s) em movimento e se calculam as grandezas de interesse em função do tempo, no caso, as diferentes formas de energia, a energia total e as quantidades de movimento linear e angular. As energias do sistema deverão, sempre que possível, ser graficadas num mesmo sistema de eixos ($E \times t$). Quando de interesse, as grandezas vetoriais momento linear e momento angular podem ser analisadas decompondo-as num sistema de eixos e tratando-as algebricamente ou desenhando-as como flechas em escala num diagrama, sempre tendo como pano de fundo as leis de conservação da mecânica.

As leis de conservação na mecânica

A descoberta das leis da dinâmica, ou das leis do movimento, foi um momento relevante na história da ciência. Antes de Newton, o movimento de corpos tais como planetas era um mistério - podia apenas ser descrito sem entender exatamente o porquê. Com Newton, veio o entendimento. Até os pequenos desvios das leis de Kepler para o movimento dos planetas devido às perturbações entre eles, passaram a ser calculados. Note que as leis de Kepler apenas descrevem o movimento, enquanto que as Leis de Newton permitiram a previsão do movimento a partir de princípios fundamentais. Também o movimento de pêndulos, osciladores com molas e pesos, e outros dispositivos podiam ser analisados completamente após as leis de Newton terem sido enunciadas.

O Princípio da Inércia enunciado por Galileu foi um grande avanço na compreensão do movimento dos corpos: Um corpo não perturbado permanece em movimento retilíneo com velocidade constante caso esteja em movimento ou permanece parado se estiver parado. Todavia este não parece ser um caso comum na natureza. Se movermos um objeto sobre uma mesa, o movimento em geral cessa, assim que pararmos de empurrá-lo. Isto ocorre simplesmente porque, ao largar o objeto, ele de fato não foi deixado de ser perturbado, mas ainda se encontra sob ação da mesa, cujo atrito promove o freamento. O Princípio da

Inércia é, aparentemente, contrário à nossa experiência diária e certamente necessitou um bocado de imaginação para ser enunciado.

Inicia-se o estudo da mecânica pela cinemática, ou seja, a descrição do movimento. Com a dinâmica estudam-se as causas do movimento. Com Newton, a dinâmica pode ser totalmente resumida em três leis:

1ª lei: É na verdade uma reedição do princípio da inércia: Na ausência de forças a velocidade de um corpo, em qualquer sistema de referência inercial, não se altera.

2ª lei:
$$\vec{F}_{res} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

3ª lei: À ação num corpo corresponde uma reação de módulo igual e de sentido contrária no corpo que produz a ação.

Note que velocidade é uma grandeza vetorial! Não alterar a velocidade significa que não se alteram o módulo, a direção nem o sentido.

As três leis de Newton podem ser usadas para descrever os movimentos de todos os corpos desde que se conheçam as leis das forças que neles atuam. O cálculo nem sempre é simples. No caso do movimento de um ou dois corpos, pode-se até obter uma solução analítica (é o que fizemos até agora no curso de física). O cálculo de um sistema planetário é muito mais complexo. A descrição do movimento de cada molécula num volume gasoso é praticamente impossível. Ocorre que existem grandezas, que podem ser derivadas dessas três leis, cuja abrangência e utilidade excedem a da própria mecânica. Três grandezas serão estudadas a seguir:

- A energia
- A quantidade de movimento linear
- O momento angular

Energia

Energia é um conceito extremamente importante em física. Energia não é uma substância física, não é um fluido. Energia é uma grandeza que pode ser calculada e cuja utilidade reside no fato de se conservar. Está presente em todo lugar e em muitas formas diferentes. É comum definir energia como a

capacidade de realizar trabalho, enquanto que trabalho é uma forma transferência de energia de um sistema para outro. Essa definição circular é imprecisa e deve ser evitada. Também é comum se referir a um objeto como “possuidor” de uma certa quantidade de energia e então calcular quanta energia foi transferida desse objeto para outro. A energia de um objeto depende do referencial adotado e por isso não é uma característica do objeto. Pelo contrário, energia é uma grandeza calculada, baseada em medidas realizadas num determinado sistema de referência. Dessa forma, interessam apenas as transformações de energia de uma forma para outra, dado que seu valor absoluto depende do sistema de referência. Apesar dessa “indefinição” do valor da energia de um objeto, o conceito de energia em física é muito importante uma vez que se verificou que, num sistema isolado, a energia se conserva, qualquer que seja seu valor.

A energia de um sistema isolado é constante.

Existem várias formas de energia e sua multitudine é justamente um dos complicadores para sua identificação. Entre muitas de suas formas, temos a energia cinética, a energia potencial, energia térmica, energia luminosa, etc.

Num sistema isolado, a energia pode ser convertida de uma forma em outra, mas não pode ser criada nem destruída. Na frase acima a palavra chave é *isolado*. Na prática, nenhum sistema está totalmente isolado, mas em geral é possível estabelecer condições em que se controlam as formas de energia e as possíveis transformações. A conservação da energia é um postulado, baseado na observação, e não pode ser provado. A conservação da energia é um conceito tão bem estabelecido na física, que quando acontece de falhar, inventa-se nova forma de energia para explicar a diferença. A energia térmica e a energia do campo eletromagnético foram inventadas justamente para satisfazer o princípio da conservação da energia. Outro exemplo ocorreu em 1930 quando Wolfgang Pauli postulou a existência do neutrino, observado apenas em 1953, para satisfazer a conservação da energia e do momento linear no decaimento β .

As várias formas de energia

Energia cinética (K). É a forma de energia associada ao movimento de um objeto. A energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (I.1)$$

Energia térmica

É um tipo de energia interna dos corpos devido ao movimento aleatório de seus átomos e moléculas. Pode ser transferida de um corpo a outro, apenas por diferenças de temperatura. Note que a relação entre temperatura e energia do corpo pode ser muito complicada, quando o corpo não for gasoso. Calor sim é a energia transferida.

Energia térmica é uma energia interna.

A energia térmica pode ser gerada a partir do atrito entre dois corpos em que a energia de movimento (cinética) é convertida em calor. Neste caso, por depender da forma em que ocorreu o movimento, a energia térmica depende da trajetória do corpo. Em mecânica, a energia térmica é de recuperação difícil. Em geral a energia térmica, resultante de atrito, é dada como dissipada, isto é, “perdida” para outra forma de energia não aproveitável mecanicamente.

Energia potencial

É uma forma de energia que depende apenas da posição do corpo em um campo de força. A energia potencial está sempre associada a um tipo de força, denominada força conservativa, que por sua vez também depende apenas da posição do corpo.

Energia potencial é uma energia de posição

A energia potencial não depende da trajetória ou da velocidade do corpo. Força conservativa é um tipo especial de força, que permite armazenar energia mecânica de um sistema na forma de energia potencial, dependente apenas da configuração do sistema (leia-se posição de cada componente do sistema em um dado referencial). A força gravitacional, a força entre cargas elétricas e a força elástica de uma mola são exemplos de forças conservativas.

Não há uma função padronizada para o cálculo da energia potencial de um sistema, que deve ser calculada a partir da definição do trabalho da força conservativa correspondente: a variação da energia potencial de um sistema é igual ao negativo do trabalho realizado pela força,

$$\Delta U = -\Delta W \quad (I.2)$$

$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (I.3)$$

Note que U_a pode ser escolhido arbitrariamente e é muito comum usar $U_a=0$ J. Dessa forma, a energia potencial elástica de uma mola, cuja força é dada por $\vec{F} = -k\vec{x}$, é dada por: $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$, onde x é a distância da posição de *equilíbrio* ($F = 0$). A energia potencial de um corpo submetido a um campo de força uniforme (força gravitacional na superfície da Terra) é $U = mgh$, onde h é a altura medida a partir de um referencial qualquer.

A conservação da energia mecânica

Partindo da 2ª Lei de Newton, num sistema em que $\vec{F}_{res} = \vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é dado por:

$$\Delta W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x}' = \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{x}' \quad (I.4)$$

que resulta em:

$$\Delta W = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \Delta K \quad (I.5)$$

O trabalho realizado é igual a variação de energia cinética. Se a força for conservativa, $\Delta U = -\Delta W$, donde se conclui que $\Delta K = -\Delta U$, ou seja:

$$E = K_a + U_a = K_b + U_b \quad (I.6)$$

que demonstra a conservação da energia mecânica para um sistema isolado com forças conservativas.

A conservação do momento linear

Partimos da segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (I.7)$$

onde $\sum \vec{F}$ é a resultante (soma) de todas as forças externas aplicadas. Na ausência de forças externas, ou seja, quando $\sum \vec{F} = 0$, temos que:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0 \quad (I.8)$$

De onde se conclui que

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{constante} \quad (I.9)$$

O produto $\vec{p} = m\vec{v}$ é denominado momento linear e a equação (I.9) enuncia sua conservação na ausência de forças externas.

A conservação do momento angular

A segunda lei de Newton pode ser reescrita em coordenadas angulares:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (I.10)$$

bastando lembrar as definições do torque ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$) e do momento angular ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$).

Novamente, na ausência de torques externos o momento angular se conserva.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{constante}$$

Assim como a energia, o momento linear e o momento angular dependem do referencial. Todavia, uma vez que a resultante das forças (ou torques) externos seja nula, garante-se a conservação dos momentos.

II - EXPRESSÃO DE VALORES DE MEDIDAS EXPERIMENTAIS

Introdução

O valor de uma grandeza submetida a medição costuma ser determinado por meio de um procedimento que, em geral, envolve algum(ns) instrumento(s) de medição. O próprio processo de medida, assim como o instrumento usado, tem limites de *precisão* e *exatidão*, ou seja, toda medida realizada tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido. A seleção do processo de medida, do instrumento usado e a reprodutibilidade do resultado obtido têm que ser expressas de alguma forma. Em alguns aparelhos, por exemplo, a incerteza do instrumento já vem marcada, caso contrário, a metade da menor divisão da escala é um bom começo. Note que nada sabemos ainda sobre a reprodutibilidade do processo de medida.

A incerteza é importante na hora de compararmos resultados. Na tabela abaixo, temos os resultados de duas medidas de uma mesma grandeza com diferentes aparelhos e um padrão.

medida	viscosidade ($\text{g cm}^{-1} \text{s}^{-1}$)
A	$9,8 \pm 0,2$
B	$12,3 \pm 4,0$
padrão	9,30

Na tabela, o valor σ após o símbolo “ $\pm$ ” indica em geral o desvio-padrão, que, junto com o valor médio x , define um intervalo que tem ~68% de probabilidade de conter o valor da grandeza:

$$P(x - \sigma \leq x_0 \leq x + \sigma) = 68\%.$$

Esse intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ é chamado *intervalo de confiança* e o valor da probabilidade, *de nível de confiança*¹. O conceito associado ao valor que segue o

¹ Em física e engenharia é comum definir o intervalo de confiança de um desvio padrão, ao qual se associa 68% de probabilidade de conter o valor da grandeza. Em outras áreas, tais como epidemiologia, saúde e ciências médicas, dois ou até três desvios padrão, que correspondem a níveis de confiança mais elevado, são bastante comuns.

símbolo “±” é o de *incerteza*². No caso acima, apesar da medida A estar aparentemente mais próxima do padrão, sua incerteza, expressa pelo intervalo de confiança, indica um provável erro de medida ou de avaliação de incerteza, enquanto o valor da medida B, apesar de ter uma incerteza maior, concorda com o valor do padrão.

Algarismos significativos

Em medidas físicas é fácil encontrar uma dispersão de valores muito grande. O raio de um átomo e o raio de uma galáxia são exemplos entre tantos outros. Para expressar esses valores adequadamente, é conveniente o uso da notação científica. Escreve-se o valor com apenas um dígito antes da vírgula, completam-se com algarismos decimais necessários (eventualmente truncando e arredondando o valor em alguma casa decimal) e se multiplica tudo pela potência de dez, adequada. Por exemplo, o comprimento de um fio vale 14269513 mm ou é da ordem de $1,43 \times 10^7$ mm. Note que se usaram apenas dois algarismos após a vírgula, sendo que o último foi arredondado para “cima” uma vez que 1,4269... está mais próximo de 1,43 que de 1,42. A regra de arredondamento aqui proposta é aumentar em uma unidade o número do último dígito quando o da próxima casa for ≥ 5 , mantendo-o, no caso contrário³. Note que ao truncar ou arredondar as casas decimais, podemos perder informação, o que pode ser evitado usando quantos algarismos forem necessários depois da vírgula; por exemplo $1,4269513 \times 10^7$ mm reproduz o valor 1426951 com toda sua precisão.

Denomina-se *algarismo significativo* cada um dos algarismos que compõem o valor de uma grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda usados para acerto de unidades. Mas, atenção: ZEROS À DIREITA SÃO SIGNIFICATIVOS. Na tabela a seguir, um mesmo valor do raio de uma roda é escrito com diferentes números de algarismos significativos.

raio (mm)	Algarismos significativos
57,896	5
$5,79 \times 10^1$	3

² Deve-se evitar o termo *erro* para a incerteza. Se uma medida tem um erro de natureza não aleatória, este deve ser corrigido!

³ Outra regra de arredondamento difere apenas no que se faz quando o dígito a ser suprimido for o 5: arredonda-se o anterior para cima se ele for ímpar e mantém-se, se par. A regra proposta no texto é comum nas calculadoras e planilhas de computadores.

 $5,789600 \times 10^1$

7

 $0,6 \times 10^2$ 1

A escolha de quantos significativos usar para representar o valor da grandeza depende da própria grandeza, do processo de medida e do instrumento utilizado. Quando se trata da representação de um valor experimental, ou qualquer outro, sujeito a incerteza na determinação, o número de significativos é determinado pela sua incerteza.

O NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS DA REPRESENTAÇÃO DE UM VALOR EXPERIMENTAL É DETERMINADO PELA SUA INCERTEZA

O exemplo seguir ilustra essa questão. Suponha que se deseje medir o tamanho do besouro na Figura II.1.



Figura II.1. Medindo o tamanho de um besouro.

Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro, qual das alternativas abaixo expressa melhor o seu tamanho?

- a) Entre 0 e 1 cm
- b) Entre 1 e 2 cm
- c) Entre 1,5 e 1,6 cm
- d) Entre 1,54 e 1,56 cm
- e) Entre 1,546 e 1,547 cm

Acertou quem optou pela alternativa d). Isso porque, na leitura de uma escala, o algarismo significativo mais à direita de um número deve sempre ser o duvidoso (não esqueça: o algarismo duvidoso é significativo!). Resumindo: Qualquer medida por comparação entre um objeto e uma escala deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do dígito (duvidoso). Uma vez que a régua foi marcada em milímetros, você deve estimar o comprimento fracionário (em décimos de mm) que melhor expressa a medida. Você pode não

precisar se vale 1,54, 1,55 ou mesmo 1,56, em consequência da *incerteza* na medida.

Outro exemplo: Qual o diâmetro da moeda na Figura II.2?

Figura II.2.
Medindo o
diâmetro de uma
moeda.



- a) Entre 0 e 2 cm
- b) Entre 1 e 2 cm
- c) Entre 1,9 e 2,0 cm
- d) Entre 1,92 e 1,94 cm
- e) Entre 1,935 e 1,945 cm

No exemplo acima, podemos afirmar que a metade da menor divisão é uma estimativa da nossa incerteza: portanto o diâmetro da moeda pode ser expresso como:

$$1,92 \pm 0,05 \text{ cm}$$

$$1,92(5) \text{ cm}$$

EXPRESSÃO DA INCERTEZA

Como devemos expressar a incerteza de uma medida? Que grandeza usamos para expressá-la? **Quantos significativos** deve ter o valor da incerteza de uma medida?

Nesta disciplina, sempre usaremos um desvio-padrão da média para expressar a incerteza da média, que é a prática na Física e corresponde a um intervalo de

confiança de probabilidade relativamente baixa. Em relação ao número de significativos, adotaremos a seguinte convenção⁴:

- Se o primeiro dígito significativo do desvio-padrão for menor que 3, usaremos DOIS significativos.
- Caso o primeiro dígito significativo do desvio-padrão for maior ou igual a 3, usamos UM algarismo significativo, exceto se ele foi determinado a partir de muitos dados, quando usam-se dois significativos.

Atenção: quando a incerteza resulta de uma estimativa, de um chute ou de convenções aproximadas, como a metade da menor divisão da escala de um instrumento, sugerimos usar apenas UM dígito significativo. Não tem sentido, por exemplo, expressar a incerteza de uma régua milimetrada com DOIS significativos (0,50 mm), basta escrever 0,5 mm.

EXPRESSÃO DA GRANDEZA

- Usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza como para sua incerteza.
- O número de algarismos significativos da incerteza é dado pela regra acima.
- O número de dígitos depois da vírgula na incerteza tem que ser o mesmo que o do valor da medida.
- A notação científica pode e deve ser usada para melhor legibilidade.

Veja alguns exemplos abaixo. Note a correspondência entre o número de casas decimais do desvio e do mensurando.

notação errada	notação correta
$5,30 \pm 0,0572$	$5,30 \pm 0,06$
$124,5 \pm 11$	125 ± 11

⁴ Conforme Vuolo (1992) e Inmetro (1998).

$$(45 \pm 2,6) \times 10^1$$

$$(45,0 \pm 2,6) \times 10^1$$

$$0,0000200 \pm 0,0000005$$

$$(200 \pm 5) \times 10^{-7}$$

* A última linha expressa uma notação inconveniente, embora correta.

Conceitos básicos para expressão de incertezas

O texto a seguir é uma adaptação do Guia para Expressão da Incerteza de Medição publicada pelo INMETRO (1998). Infelizmente, normas metrológicas são um assunto um tanto burocrático, mas também é parte da linguagem científica que precisamos dominar. Não houve de modo algum a pretensão de exaurir o assunto. Ao leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos ou ansioso por outros exemplos, recomendamos fortemente consultar a referência citada.

Medição

O objetivo de uma **medição** é determinar o **valor** do **mensurando**, isto é, o valor da **grandeza específica** a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do **método de medição** e do **procedimento de medição**.

- **Medição:** conjunto de operações que têm por objetivo determinar um valor de uma grandeza.
- **Valor (de uma grandeza):** expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número. *Exemplo: comprimento de uma barra: 5,34m*
- **Mensurando:** grandeza específica submetida à medição. *Exemplo: temperatura de fusão da glicerina.*
- **Grandeza (mensurável):** atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. O termo “grandeza” pode se referir a uma grandeza em sentido geral (*comprimento, tempo, massa...*) ou **grandeza específica** (*comprimento de uma barra, resistência elétrica de um fio*). Os símbolos das grandezas estão definidos na norma ISO 31.

- **Método de medição:** sequência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições. *Exemplos: método de substituição, método diferencial, método de “zero”...*
- **Procedimento de medição:** conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método. *Um procedimento (de medição) deve ser descrito em um documento com detalhes suficientes para permitir que outro experimentador execute a medição sem informações adicionais*

Resultado de uma medição

Em geral, o **resultado de uma medição** é somente uma aproximação ou **estimativa** do valor do mensurando e, assim, só é completa quando acompanhada pela declaração de **incerteza** dessa estimativa. Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries (ou um conjunto) de observações obtidas sob **condições de repetitividade**.

- **Resultado de uma medição:** valor atribuído a um mensurando obtido por medição. Deve-se indicar claramente se o resultado se refere à *indicação*, se é um *resultado corrigido* ou *não corrigido* e se corresponde ao *valor médio de várias medições*. A expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza da medição.
- **Estimativa:** valor de uma estatística (*uma fórmula em que entram os dados experimentais e sai o resultado que representa a grandeza*) usada para estimar um parâmetro (*a média, por exemplo*) da totalidade de itens (*em geral infinito*), obtido como resultado de uma operação sobre uma amostra (*em geral um conjunto limitado de dados*) supondo um determinado modelo estatístico das funções de probabilidade (*distribuição normal, por exemplo*).
- **Incerteza (de medição):** parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. Entende-se que o resultado de uma medição é a melhor estimativa do valor de um mensurando e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, contribuem para a dispersão.
- **Repetitividade (de resultados de medições):** grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição.

Condições de repetitividade incluem:

- mesmo procedimento de medição
- mesmo observador
- mesmo instrumento de medição sob as mesmas condições
- mesmo local
- repetição em curto período de tempo

Erros e incertezas

Deve-se atentar e distinguir com cuidado os termos “*erro*” e “*incerteza*”. Esses termos não são sinônimos, ao contrário, representam conceitos completamente diferentes. Não devem ser confundidos nem mal empregados.

Erro

Uma medição tem imperfeições que dão origem a um **erro** no resultado da medição. O erro costuma ser classificado em dois componentes: **erro aleatório** e **erro sistemático**. O erro aleatório tem origem em *efeitos* aleatórios, que causam variações imprevisíveis, incontrolláveis e impossíveis de medir. Esses efeitos são a causa das variações em observações repetidas do mensurando. O erro aleatório não pode ser compensado, mas pode, na média, ser reduzido pelo aumento no número de observações. Apesar de frequentemente citado, o desvio padrão da média não é o erro aleatório da média. Representa, sim, uma medida da incerteza da média devido aos efeitos aleatórios. O erro sistemático, em geral, não pode ser eliminado, mas pode eventualmente ser reduzido ou, caso seja identificado, deve ser corrigido.

Estatísticas

Quando se trabalham com vários resultados em condições de repetitividade de uma medição, usam-se algumas estatísticas para resumir e consolidar as informações obtidas. Vamos discutir esse assunto por meio de um exemplo: ao tentar determinar o tempo de queda de um corpo, um aluno mediu uma única vez o evento.

Tendo a incerteza do aparelho utilizado, poderíamos ter uma idéia do acerto do aluno. Mas a incerteza cobre apenas o erro do aparelho e não a do aluno ou mesmo do procedimento experimental. O problema que se coloca é: Como determinar a incerteza de uma medida?

COMO DETERMINAR A INCERTEZA DE UMA MEDIDA?

Uma abordagem alternativa para este problema seria medir várias vezes o mesmo tempo e calcular a *média*. A variabilidade de cada medida é dada pelo *desvio padrão* e a variabilidade da média (caso se obtenham várias médias) será dada pelo *desvio padrão da média*⁵.

O problema é que, para o valor mais provável a partir de médias, determinar desvios-padrão e desvio-padrão de médias exige que se façam INFINITAS medidas e definitivamente não temos tempo para isso! Vamos, portanto ESTIMAR o valor mais provável, o desvio padrão e o desvio padrão da média para um conjunto pequeno de medidas. O desenvolvimento teórico e a justificativa para esse procedimento podem ser encontrados nos textos básicos de estatística, como por exemplo, Helene e Vanin (1981).

A média, o desvio padrão e o desvio padrão da média, para um conjunto finito com n dados podem ser estimados aplicando as equações a seguir.

Média de uma amostra com n valores:

$$m = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (\text{II.1})$$

Desvio padrão de uma amostra:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - m)^2} \quad (\text{II.2})$$

⁵ É comum encontrar a afirmação de que se fazem muitas medidas de uma mesma grandeza para melhorar um resultado. Isto nem sempre é verdade. A incerteza de um processo de medida é uma característica do processo expresso pelo desvio padrão, que independe do número de medidas (para n grande, tipicamente $n > 10$). É verdade que ao realizar muitas medidas pode-se obter um valor médio mais próximo do valor mais provável, uma vez que o desvio padrão da média (que expressa a incerteza da média) varia com $1/\sqrt{n}$. Entretanto, raramente se usa essa abordagem em medidas diretas (não estocásticas). Na prática, quando se deseja uma medida com incerteza menor, procura-se simplesmente um procedimento ou um instrumento melhor (um micrômetro no lugar de um paquímetro, por exemplo). A verdadeira razão de se repetir uma medida várias vezes é para estimar seu desvio padrão.

Desvio padrão da média com n valores:

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum (x_i - m)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{II.3})$$

Uma maneira gráfica de analisar estatisticamente esses dados é através de um histograma ou gráfico de barras. Neste tipo de gráfico, para uma visualização mais direta, a abscissa é dividida em intervalos iguais, que se chamam canais.

Há 3 grandezas que podem ser graficadas em histogramas: a *freqüência absoluta*, f_a , a *freqüência relativa*, f_r , e a *densidade de probabilidade*, dp . A freqüência absoluta é o gráfico onde a ordenada representa a quantidade absoluta de termos dentro de um canal. Freqüência relativa tem na ordenada a fração da quantidade de termos dentro de um canal. No gráfico de densidade de probabilidade $dp = f_r/\Delta x$, grafica-se na ordenada o resultado da divisão de f_r

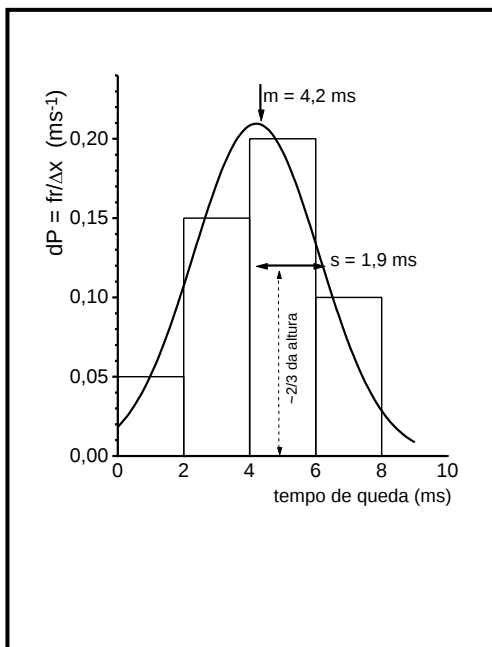


Fig. II.3. Histograma dos tempos de queda de um corpo.

pelo tamanho da cela, Δx . Neste caso a área do gráfico é a probabilidade de ocorrer o valor contido na cela ou intervalo (daí o nome *densidade de probabilidade*). Este último tem a vantagem de independe do tamanho da cela,

valendo até mesmo para histogramas com canais de tamanho variável, pois a área total é sempre unitária! Veja o exemplo a seguir:

Tabela II.1: Tempos de queda de um corpo, em ms.

4.93	0.77	7.01
2.21	6.00	5.17
4.12	5.40	2.56
3.83		

Tabela II.2: Análise estatística dos tempos.

Cela	Intervalo	f_a	$f_r = f_a/n$	$dp = f_r/\Delta x$
1	0,00 — 2,00	1	0,10	0,05
2	2,00 — 4,00	3	0,30	0,15
3	4,00 — 6,00	4	0,40	0,20
4	6,00 — 8,00	2	0,20	0,10

Note que $n = 10$ é a quantidade de dados e o intervalo é representado por um símbolo que, no caso, exclui o valor máximo da cela.

O histograma dos dados na Tabela II.1 está na Figura II.3 acima. Note que a escala do eixo y está em unidades de densidade de probabilidade, que tem unidades de ms^{-1} . Para valores aleatórios distribuídos de acordo com a lei Normal com média μ e desvio padrão σ , o histograma de dP pode ser modelado por uma curva contínua, também denominada Gaussiana, dada por:

$$dP = \left(\frac{f_r}{\Delta x} \right) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-0,5*(x-m)^2}{s^2}\right) \quad (\text{II.4})$$

onde m é a estimativa da média e s é a estimativa do desvio padrão. Neste histograma, ajustamos uma curva e estimamos sua tendência central, m , ou seja, a média, e sua largura, s , o desvio padrão.

O desvio padrão pode ser estimado graficamente, calculando o valor de x para o qual $|x-m| = s$. Neste caso, a equação (II.4) vale:

$$dP(|x-m|=s) = Y_o \exp\left(\frac{-0,5*(s)^2}{s^2}\right) \quad (\text{II.5})$$

onde Y_o é a altura do máximo da curva. Daí resulta que o desvio padrão pode ser estimado graficamente como a metade da largura total de uma gaussiana medida aproximadamente a 2/3 da altura, pois

$$dP_s = Y_o \exp(-0.5) = 0.61 Y_o \approx \frac{2}{3} Y_o \quad (\text{III.6})$$

Note também que a área do histograma da Figura II.1. é unitária, assim como a área da gaussiana.

III - PROPAGAÇÃO DE ERROS E INCERTEZAS

Introdução

Um *processo de medida* tem sempre por objetivo determinar o *valor médio verdadeiro*, y_{mv} , de uma *grandeza*, cujo *valor verdadeiro* é y_v . Acontece que, em geral, o valor verdadeiro nos é desconhecido, e para se obter o valor médio verdadeiro são necessárias infinitas medidas!

Dessa forma, para um conjunto de medidas, $\{y_1, y_2, y_3, \dots y_n\}$, o valor médio verdadeiro é dado por:

$$y_{mv} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (\text{III.1})$$

Como em geral y_{mv} é um valor inacessível, usam-se *estimativas*: a média dada pela equação II.1, a estimativa do desvio padrão (eq. II.2) e do desvio padrão da média (eq. II.3).

Apenas lembrando alguns termos novos que usaremos com frequência:

MENSURANDO: Grandeza a ser determinada num processo de medição.

VALOR VERDADEIRO: Valor consistente com a definição de uma determinada quantidade. Em princípio, apenas obtido num processo de medida perfeito.

INCERTEZA: Parâmetro associado ao resultado de uma medida que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuídos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

ERRO: É a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro maior a exatidão (acurácia).

ERRO SISTEMÁTICO: Erro constante característico do processo ou instrumento.

ERRO PADRÃO: Desvio padrão dos valores médios em relação ao valor verdadeiro.

A grande diferença entre a incerteza e o erro (seja ele qual for) é que o erro pode, em princípio, ser ‘corrigido’, enquanto a incerteza é um intervalo de confiança das medidas. Logo, caso sua experiência tenha um erro, existe uma falha no procedimento que pode e deve ser corrigido.

Exemplo 1. Medida da tensão de uma pilha:

Neste exemplo, pretendemos determinar o valor mais provável e a respectiva incerteza da tensão de uma pilha. Usaremos um voltímetro cuja incerteza nominal (fornecida pelo fabricante) é de $1\sigma = 0,25\%$ do valor indicado. A incerteza do processo de medida deve, portanto ser combinada com a incerteza do fabricante, para gerar o resultado procurado. Algumas fórmulas utilizadas serão explicadas adiante. Retorne ao exemplo assim que terminar a leitura deste capítulo. Os resultados obtidos nas medições estão na Tabela III.1.a.

Tabela III.1.a. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U (volt)	incerteza nominal (V)
1	1,572	0,004
2	1,568	0,004
3	1,586	0,004
4	1,573	0,004
5	1,578	0,004
6	1,581	0,004

Antes, um comentário: a tabela III.1.a acima tem três colunas. A última contém a incerteza nominal das medidas que, como vemos, não varia ao longo das medidas. A tabela poderia ter apenas 2 colunas e a incerteza das medidas ser incorporada no título da coluna 2. A nova tabela ficaria como no exemplo abaixo, tabela III.1b.

Tabela III.1b. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U ± 0,004 (V)
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Vamos aos cálculos. Note que, em cálculos intermediários, usamos um dígito significativo a mais, para apenas no final expressarmos o valor da medição conforme as normas discutidas no capítulo anterior.

Valor médio:
$$\bar{U} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 U_i = 1,5763 \text{ V}$$

Desvio padrão das medidas:
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6-1} \sum_{i=1}^6 (V_i - 1,5763)^2} = 0,0066 \text{ V}$$

Desvio padrão do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,0066}{\sqrt{6}} = 0,0027 \text{ V}$$

Incerteza nominal do voltímetro (0,25% da medida)

$$L_r = \left(\frac{0,25}{100} \right) 1,5763 = 0,0039 \text{ V}$$

Verifique que o desvio padrão das medidas (na realidade do processo de medição) é maior que a incerteza nominal do voltímetro. Isso era esperado, pois, na composição da incerteza do processo de medidas, a incerteza do voltímetro é apenas um dos componentes. Uma única medida, por exemplo a primeira medida na Tabela 2.1b, pode ser expressa como:

$$U_1 = (1,572 \pm 0,007)\text{V}$$

A incerteza de nossa medida difere da incerteza nominal citada na tabela 2.1. Tivemos que fazer uma série de medidas para determinar o NOSSO desvio padrão.

Uma vez que realizamos uma série de 6 medidas, podemos expressar nosso resultado de forma mais precisa, usando o valor médio das seis medidas e seu desvio padrão (o desvio padrão da média). Portanto nosso resultado ficaria assim:

$$\bar{U} = (1,5763 \pm 0,0027)\text{V}$$

Este resultado está ótimo para desenvolver nossos estudos e verificar alguma dependência da tensão da pilha com outras grandezas. Mas o nosso voltímetro pode ter um erro de calibração. Explicando: Na fábrica são produzidos milhares de voltímetros. Em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar os valores medidos por diferentes voltímetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor... Como então comparar medidas feitas com voltímetros diferentes? Temos que retornar ao manual do aparelho e procurar a incerteza de calibração do mesmo, ou seja, o desvio padrão de calibração dos voltímetros. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza do instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse. (*Quem compraria um aparelho muito preciso e caro mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho vagabundo?*). Podemos supor, então, que o desvio padrão de calibração do voltímetro é da mesma ordem que sua incerteza nominal. Dessa forma, é possível que instrumentos diferentes indiquem valores diferentes para uma mesma medida, nesse nosso caso, com um desvio padrão de 0,004V. Caso tenhamos em nosso laboratório mais que um voltímetro do mesmo modelo, temos que incorporar esse “desvio padrão de calibração” em nosso

resultado. Isso pode ser feito por meio de uma soma quadrática, denominada erro padrão, em que se compõe quadraticamente o desvio padrão da média com o desvio padrão de calibração do instrumento:

Erro padrão:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + L_r^2} = 0,0048V$$

Finalizando, o valor mais provável da tensão da pilha pode ser representado por:

$\bar{U}_p = (1,576 \pm 0,005)V$

Afinal, qual o valor que devemos usar? Depende. Para comparar séries de medidas no mesmo instrumento, podemos usar a média $\bar{U}$ e o desvio padrão da média. Para comparar medidas entre si, basta o desvio padrão. Para comparar medidas em instrumentos diferentes, precisamos do erro padrão.

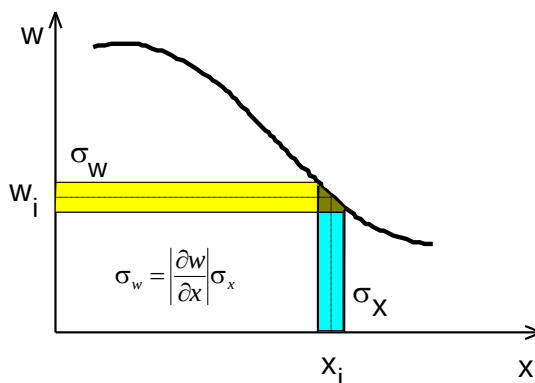
PROPAGACÃO DE INCERTEZAS

Muitas vezes usaremos o valor do mensurando numa equação para determinar outra grandeza qualquer. O que fazer com a incerteza associada? Para o mensurando temos a incerteza do processo de medida, enquanto, que para grandezas determinadas através de fórmulas, temos a incerteza propagada.

Cálculo da propagação de incertezas

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função $w = w(x, y, z)$ onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e independentes entre si, quanto vale σ_w ? A independência entre $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ é necessária para a validade das fórmulas a seguir, mas não será discutida por enquanto.

Para simplificar, suponha w apenas função de x . No gráfico abaixo está representando $w(x)$.



A incerteza de w , neste gráfico, pode ser obtida pela simples projeção da incerteza de x . Para pequenos intervalos no eixo x , temos em primeira ordem:

$$\sigma_w = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \sigma_x \quad (\text{III.2})$$

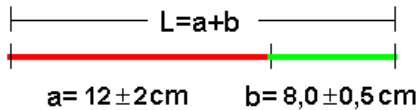
Para mais de uma variável, sendo estas independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots \quad (\text{III.3})$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

A) Adição de valores experimentais

Considere a soma de dois segmentos:



A incerteza no segmento soma pode ser calculada aplicando a equação (III.3):

$$\begin{aligned}
 \sigma_L^2 &= \left(\frac{\partial L}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 \\
 &= 1 \cdot \sigma_a^2 + 1 \cdot \sigma_b^2
 \end{aligned}$$

que resulta:

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4,25$$

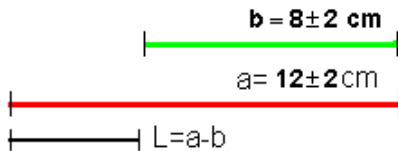
$$\sigma_L = 2,06 \text{ cm}$$

Logo

$$\mathbf{L = (20,0 \pm 2,1) \text{ cm}}$$

B) Subtração de valores experimentais

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, a incerteza associada à subtração de duas grandezas experimentais é dada por:



Novamente usando a equação (2.3):

$$\begin{aligned}\sigma_L^2 &= \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \\ &= 1 \cdot \sigma_a^2 + 1 \cdot \sigma_b^2\end{aligned}$$

resulta: $\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

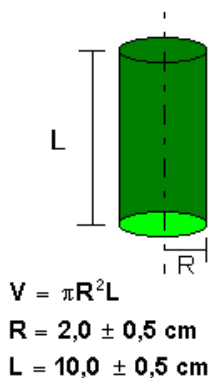
$$\sigma_L = 2,8 \text{ cm}$$

Logo $L = (4,0 \pm 2,8) \text{ cm}$

Note que, na **soma**, tanto a grandeza como a incerteza aumentaram, mas, na **diferença** de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

C) Multiplicação de grandezas experimentais: volume de um cilindro

Vamos agora determinar o volume do cilindro na figura abaixo em que se mediram o raio e a altura.



Propagaremos as incertezas em todos os termos do produto: π , R e L.

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 \\ &= (R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2) \sigma_L^2\end{aligned}$$

dividindo por V^2

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_V^2}{V^2} &= \frac{(R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2) \sigma_L^2}{(\pi R^2 L)^2} \\ \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2\end{aligned}$$

Calculando cada um dos termos acima usando os valores fornecidos na figura:

$$\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right) = 0 \quad (\text{i})$$

$$2\left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = \frac{1}{2,0} \quad (\text{ii})$$

e

$$\left(\frac{\sigma_L}{L} \right) = \frac{0,5}{10,0} \quad (\text{iii})$$

Somando i, ii e iii em quadratura:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,05^2} = 0,5025$$

MUITO IMPORTANTE: Na equação acima, de propagação de incertezas na multiplicação e divisão, obtivemos a incerteza relativa σ_V/V . NÃO ESQUEÇA DE MULTIPLICÁ-LA PELO RESULTADO (V) PARA OBTER A INCERTEZA ABSOLUTA. Multiplicando σ_V por V e ajustando o número de significativos...

$$\sigma_V = 0,5025 \times V = 0,5025 \times 125,7 = 63$$

O resultado do volume do cilindro vale:

$$V = (126 \pm 63) \text{ cm}^3$$

ou ainda

$$V = (13 \pm 6) \times 10 \text{ cm}^3$$

Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações pode ser resumido como segue:

Na soma ou subtração, a incerteza absoluta do resultado é a soma em quadratura das incertezas absolutas.

Na multiplicação ou divisão, a incerteza relativa do resultado é dada pela soma em quadratura das incertezas relativas dos operandos (não esqueça de converter a incerteza relativa em absoluta).

NOTA: por *soma em quadratura* entende-se a raiz quadrada da soma dos quadrados...

No Quadro 2.1, a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas. Uma importante regra prática pode ser obtida se notarmos que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 5%. Logo:

Qualquer termo *menor que 1/3 do maior termo* na soma em quadratura pouco contribui no resultado final e em geral, pode ser desprezado (criteriosamente!).

Exemplificando: Volte para o exemplo A, a soma de dois segmentos: Lá calculamos o resultado de :

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4,25$$

observe que $0,5^2 \ll 2^2$, ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria 4,00, que arredondado para um significativo resultaria $\sigma_L = 2 \text{ cm}$, não muito diferente do resultado anterior, 2,1 cm.

Algebricamente: sejam x_1 e x_2 os termos de uma soma em quadratura com $x_2 = k x_1$ A soma em quadratura resulta:

$$S = \sqrt{x_1^2(1 + k^2)} \quad (\text{III.4})$$

Seja agora

$$S' = \sqrt{x_2^2} \quad (\text{III.5})$$

em que se desprezou x_1 uma vez que $k > 1$. Note que $S > S'$, uma vez que $x_2 > x_1$. Queremos saber, o menor valor de k de forma que S' e S não difiram em mais que 5%. Queremos que

$$S - S' < 0.05 * S \quad \text{ou} \quad \frac{S'}{S} > 0.95 \quad (\text{III.6})$$

Com alguma manipulação algébrica se obtém

$$k > 3.0 \quad (\text{III.7})$$

Isto pode simplificar muito as contas, pois, numa soma em quadratura podemos simplesmente desprezar termos menores que 1/3 do maior. Isto permite, na maioria das vezes, um cálculo rápido, sem o uso de calculadora. Atente que são os termos da soma em quadratura que devem ser comparados, não as incertezas.

Representação de incertezas em um gráfico. Barras de erro.

Já aprendemos a expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medida. Num gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

Exemplo: Representar dados da Tabela III.2. em um gráfico.

Tabela III.2. Espaços e velocidades de um corpo

n	$s \pm 0,05$ (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84±0,55

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para σ_w	
2	6,90	$2,76 \pm 0,82$
3	11,10	$3,99 \pm 1,20$
4	20,60	$9,88 \pm 2,96$

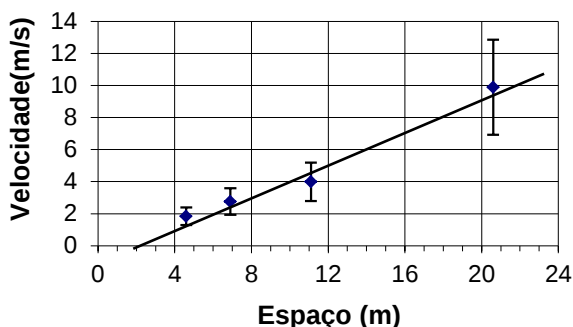


Figura III.1 Velocidades e posições de um corpo.

Note que a incerteza do espaço **não** foi colocada no gráfico, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada observando algumas regras simples:

- Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos.
- A origem (0,0) pode ou não ser um ponto experimental. Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental, caso contrário trace a melhor reta ignorando a origem.
- A reta deve estar contida na maioria das barras de incertezas.

$w = x \pm y$ soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$w = axy$ multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = a(y/x)$ divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = x^m$ potência simples	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left m\frac{\sigma_x}{x}\right $
$w = ax$ multiplicação por constante	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax + b$	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax^p y^q$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$

$w = a \sin(bx)$ função qualquer <u>aplicar a</u> <u>definição</u>	$\sigma_w = ab \cos(bx) \sigma_x \quad b \sigma_x \text{ em radianos}$
--	--

RESUMO DE FÓRMULAS PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

IV - LINEARIZAÇÃO DE CURVAS

Introdução

Numa experiência costumamos comparar os valores das medições com algum modelo físico, provavelmente expresso na forma de uma equação algébrica. Todavia, muitos fenômenos não são lineares, isto é, o comportamento da grandeza observada não pode ser descrito por uma reta. Nestes casos, modelar o comportamento do sistema ou ajustar uma função qualquer aos pontos experimentais requer o uso de métodos numéricos avançados nem sempre disponíveis de forma imediata. Num primeiro momento, pode-se optar pela linearização da função em jogo. A linearização de uma função nada mais é que a transformação de uma função curvilínea (não linear) numa reta, ou seja, a conversão dos dados experimentais, por meio de uma mudança de variáveis, para uma relação linear e determinar-lhe os coeficientes. Invertendo o procedimento de linearização, pode-se então determinar os parâmetros da função não linear procurada.

Exemplo: Para determinar a aceleração da gravidade usamos os dados de posição de um corpo em queda livre, cuja dependência com o tempo não é linear. Inicialmente preparamos uma tabela com os tempos e espaços e construímos o gráfico a seguir:

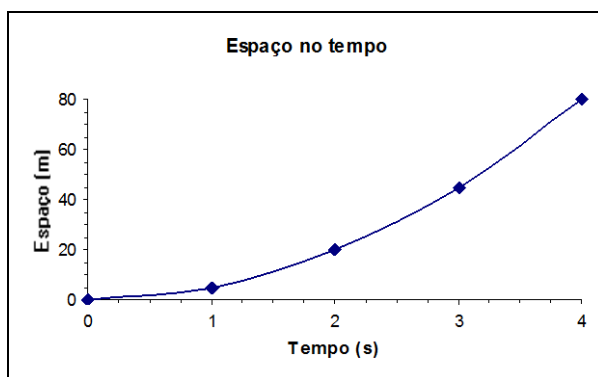


Figura IV.1. Espaços em função do tempo para um corpo em queda livre.

Neste tipo de gráfico, onde $s = s_0 + v_0.t + (a/2)t^2$, não é imediato determinar a aceleração do corpo.

Mesmo supondo $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$ (com o eixo y no sentido da aceleração) a expressão se converte em:

$$s = at^2/2 \quad (\text{IV.1})$$

que ainda é uma função não linear em t. Se, ao invés de graficar “s x t” como na figura 3.2, graficarmos, “s x t²/2” teremos uma reta:

$$s = ax \quad (\text{IV.2})$$

Onde a é o coeficiente angular da reta e $x=t^2/2$, conforme pode ser visto na figura IV.2. Logo:

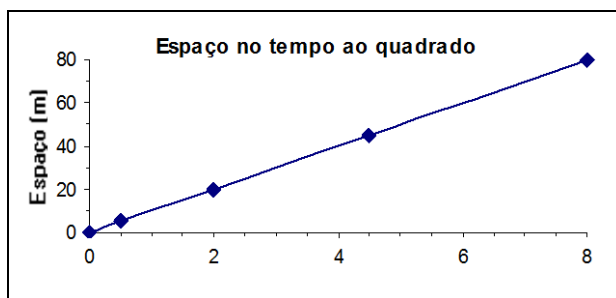


Figura IV.2. $s(t^2/2)$ para um corpo em queda livre.

Pode ocorrer que as grandezas medidas sejam afetadas por um desvio constante. No exemplo acima, poderia ter ocorrido que o tempo e/ou espaço inicial fossem diferentes de zero. Esses desvios (inicialmente lineares), em geral, introduzem desvios não lineares nas novas variáveis “linearizadas” e podem invalidar suas conclusões. Dada sua natureza, esses desvios costumam afetar mais os valores

“pequenos” que os “grandes” e podem ser identificados na forma de desvio sistemático dos pontos experimentais da curva (linear) graficada.

Existem diversos outros métodos de linearização: Ainda se usa muito graficar o logaritmo das grandezas, o que reduz potências em coeficientes angulares e coeficientes multiplicativos em lineares. Os papéis dilog e mono-log, são uma forma prática de executar transformações log sem necessidade de cálculos. Outro método, que na prática reduz o grau da função, é graficar a derivada da função. Não há uma regra geral para linearização de funções. Prática e criatividade são alguns dos requisitos.

Funções tipo $y=ae^{bx}$

Funções exponenciais podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos, que resulta:

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) \quad (\text{IV.3})$$

$$\ln(y) = \ln(a) + bx \quad (\text{IV.4})$$

Definindo $Y = \ln(y)$ e $\alpha = \ln(a)$, temos:

$$Y = \alpha + bx \quad (\text{IV.5})$$

Que é uma reta com coeficiente linear α e coeficiente angular b .

O papel gráfico logarítmico

Antes do uso generalizado de calculadoras, não era simples determinar o logaritmo de um número. Podia-se usar (e ainda se usa) o papel mono-logaritmo, cuja escala vertical, Y , é desenhada de tal forma que a distância linear até a

origem (eixo x) é o logaritmo decimal do número indicado na escala. Dessa forma o papel "grafica automaticamente" o log do número indicado.

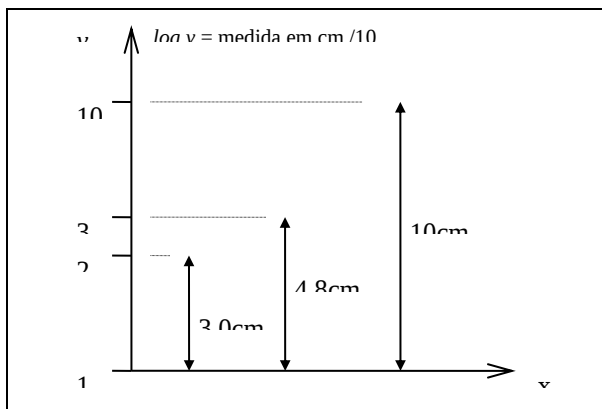


Figura IV.3. Escala mono-log. Neste caso, a escala, também denominada ciclo, é de 10cm para cada ordem de grandeza (fator 10). Outras escalas e vários ciclos são possíveis. (um exemplo: dado que $\log(3) = 0.477$, temos que $10 \cdot \log(3) = 4.8\text{cm}$.)

O papel dilogarítmico (dilog) repete o eixo log também para o eixo das abscissas (eixo x) e é útil para linearizar potências simples, tais como que será discutido a seguir.

Funções tipo $y=ax^b$

Potências simples tipo ax^b , também podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos:

$$\log(y) = \log(a) + b \log(x) \quad (\text{IV.6})$$

novamente, uma reta com coeficiente angular b e coeficiente linear $\log(a)$.

V - INTERPOLAÇÃO DE VALORES EM TABELAS

Ao consultar uma tabela, dessas publicadas em livros especializados, é muito difícil encontrar exatamente o valor procurado. Se por exemplo estivermos procurando o índice de refração de um determinado material em função da temperatura, em geral ocorre que a temperatura desejada está entre dois valores tabelados. A solução é interpolar a partir dos valores tabelados. Existem vários métodos de interpolação de dados em tabelas: Pode-se usar polinômios, funções logarítmicas, exponenciais, etc. Esses métodos podem ser encontrados em livros básicos de métodos numéricos.

Ocorre que muitas dessas tabelas são compiladas de forma que uma simples interpolação linear seja suficientemente precisa, ou seja, o erro da interpolação linear é menor que a incerteza dos valores tabelados. Veja o exemplo a baixo:

Tabela V.1. Pressão de vapor da água líquida.

Temperatura (°C)	Pressão (Torr)
60	149,4
80	355,1
100	760
120	1489

Para determinar a pressão de vapor a 90°C pode-se interpolar linearmente a tabela entre os valores de 80 e 100°C. A interpolação linear pode ser entendida como o ajuste de uma reta a DOIS pontos da tabela e a determinação de um valor intermediário não tabelado. A figura V.1 exemplifica o procedimento graficamente.

Sejam os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) dois pontos quaisquer consecutivos na tabela. Ajustando-lhes uma reta, pode-se escrever, para um ponto (x_i, y_i) intermediário.

$$\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} \right) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \quad (\text{V.1})$$

Isolando y_i temos:

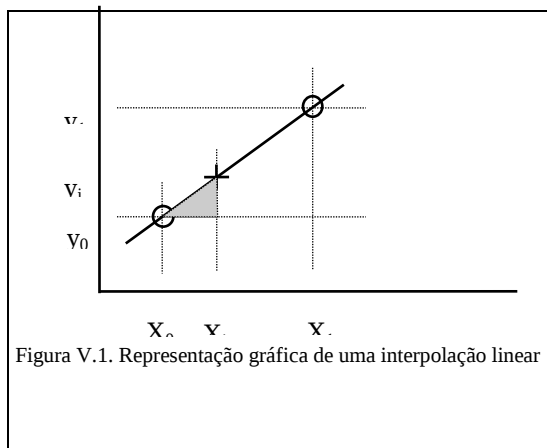
$$y_i = y_0 + (x_i - x_0) \cdot \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \quad (\text{V.2})$$

que aplicada ao exemplo resulta:

$$y_{90} = 355 + (90 - 80) \cdot \left(\frac{760 - 355}{100 - 80} \right) \quad (\text{V.3})$$

que fornece o valor procurado:

$$P_{90} = 558 \text{ Torr.}$$



VI – O Método dos Mínimos Quadrados

Frequentemente, as leis físicas permitem prever o valor de uma grandeza y a partir de uma variável independente x . Um caso particular, mas bastante comum, é aquele em que y depende de x através de funções $f(x)$ e $g(x)$ na forma linear

$$y = a_0 f(x) + b_0 g(x) \quad (\text{VI.1})$$

onde a_0 e b_0 são constantes (isto é, independentes de x), cujos valores são relacionados ao sistema específico em estudo.

A equação horária do movimento de um corpo lançado para cima em um plano inclinado por um ângulo θ em relação à horizontal, a partir da origem, é

$$y = -\frac{g \sin \theta}{2} t^2 + v_0 t$$

quando as forças de atrito puderem ser ignoradas. Neste caso, $a_0 = -\frac{g \sin \theta}{2}$, $b_0 = v_0$, $f(t) = t^2$ e $g(t) = t$.

Uma maneira de estimar a_0 e b_0 é variar o valor de x e medir os correspondentes valores de y . Se medimos apenas 2 pares, ou seja, (x_1, y_1, σ_1) e (x_2, y_2, σ_2) , onde σ_1 e σ_2 são os desvios-padrões de y_1 e y_2 , respectivamente, é possível resolver o sistema de duas equações a duas incógnitas que se obtém; a solução será um par de valores $\hat{a}$ e $\hat{b}$ que não são os parâmetros da equação (VI.1), mas sim suas estimativas, cujas incertezas decorrentes das incertezas nos valores y_1 e y_2 devem ser calculadas pelas fórmulas de propagação adequadas. Essa maneira, entretanto, é insuficiente quando as incertezas de medida são significativas e não podem ser diminuídas. Além disso, esse procedimento não permite de maneira nenhuma testar se a relação (VI.1) é adequada para a descrição do fenômeno.

A prática em Física consiste em observar a grandeza y para N valores de x diferentes, ou seja, determinar um conjunto de dados

$$\{(x_i, y_i, \sigma_i), i = 1..N\}$$

em que o índice i simplesmente identifica cada dado do conjunto de N pontos experimentais e incluímos os desvios-padrões dos dados, σ_i . O interesse em repetir a medição de y um número maior de vezes decorre da diminuição dos desvios-padrões de $\hat{a}$ e $\hat{b}$, por conta da redução da flutuação estatística quando são calculados a partir de mais medições, do mesmo jeito que o desvio-padrão da média diminui com o número de dados, $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, como já aprendemos na

primeira experiência – na verdade, a média e o desvio-padrão da média constituem a estimativa de mínimos quadrados da medição direta de uma grandeza aleatória, caso em que a fórmula (VI.1) fica $y = a_0$. A fim de testar se a relação (VI.1) é válida, procura-se escolher valores de x distribuídos por toda a região de interesse da variável independente.

No exemplo do corpo que é lançado da base da rampa para cima com velocidade v_0 , deve-se observar a posição do corpo desde o início até o final do movimento e não apenas concentrar as medições nos primeiros ou nos últimos instantes do movimento.

Para explicar o método que vamos usar, relacionamos o dado experimental com a função (VI.1):

$$y_i = a_0 f(x_i) + b_0 g(x_i) + \epsilon_i \quad (\text{VI.2})$$

onde ϵ_i é o erro da medida experimental. O método que vamos apresentar baseia-se na impossibilidade de determinar esse erro experimental – se fosse possível conhecê-lo, subtrairíamos o erro de medida e nunca precisaríamos repetir uma medição, porque o resultado final, depois da subtração, seria exato. Embora não se possa conhecer o erro, supõe-se que se possa conhecer seu *valor médio*, bem como sua *média quadrática*, que são as duas hipóteses necessárias para aplicar o método dos mínimos quadrados:

- i. $\langle \epsilon_i \rangle = 0$, que corresponde à hipótese que os instrumentos não dão leituras erradas sempre para o mesmo lado, ou seja, as medições são não-tendenciosas.
- ii. $\langle \epsilon_i^2 \rangle = \sigma_i^2$, que é a medida de dispersão dos dados experimentais e pode ser estimado como vimos fazendo desde o primeiro experimento.

O método consiste em minimizar a soma dos quadrados dos resíduos ponderados pelos desvios-padrões dos dados, mais exatamente, minimizar a função $Q(a, b)$

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (af(x_i) + bg(x_i))]^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{VI.3})$$

Note que, nessa expressão, a e b são variáveis, o que é estranho, mas inevitável, uma vez que a natureza não nos permite conhecer os seus valores verdadeiros, a_0 e b_0 – temos que admitir a possibilidade de que assumam quaisquer valores. Note também que a ideia intuitiva de minimizar a soma dos erros não funciona, por causa da propriedade (i) acima – o erro médio é zero. Assim, as estimativas dos parâmetros são os valores $\hat{a}$ e $\hat{b}$ que minimizam essa função Q .

Como $Q(a, b)$ é um polinômio do 2º grau em a e b , pode-se desenvolver o polinômio que corresponde a essa parábola bidimensional e encontrar seu mínimo usando técnicas de álgebra linear (veja, por exemplo, o livro de Barone [1]). A maneira que vamos indicar aqui é calcular as derivadas parciais de $Q(a, b)$ em relação a a e b , que devem se anular para um par de valores $\hat{a}$ e $\hat{b}$, que são as estimativas das grandezas físicas a_0 e b_0 , ou seja,

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial a} \right|_{\hat{a}, \hat{b}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial b} \right|_{\hat{a}, \hat{b}} = 0$$

As duas equações do sistema linear acima (a derivada de um polinômio do 2º grau é um polinômio do 1º grau) em função das duas incógnitas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são escritas de preferência em forma de matriz,

$$\begin{pmatrix} \sum \frac{y_i f(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{y_i g(x_i)}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{(f(x_i))^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f(x_i)g(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f(x_i)g(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{(g(x_i))^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.4})$$

onde todas as somatórias se estendem desde $i = 1$ até $i = N$. Essa fórmula matricial pode ser escrita em forma compacta como

$$\vec{D} = \mathbf{M}\vec{A} \quad (\text{VI.5})$$

A solução do sistema linear pode ser obtida por qualquer método. Aqui, definimos a matriz $\mathbf{V}$ que é igual à inversa da matriz $\mathbf{M}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}^{-1} \quad (\text{VI.6})$$

de modo que simbolizamos a solução de (VI.4) por

$$\vec{A} = \mathbf{V}\vec{D} \quad (\text{VI.7})$$

Os desvios-padrões das estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são calculados a partir dos elementos da matriz $\mathbf{V}$ [3-5], que, por isso, é chamada matriz das variâncias:

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{v_{11}} \text{ e } \sigma_{\hat{b}} = \sqrt{v_{22}} \quad (\text{VI.8})$$

O método dos mínimos quadrados é devido a Gauss e Legendre, no final do século XVIII ou início do XIX, que o aplicaram na redução de dados de observações astronômicas; a prioridade de descoberta do método é uma questão interessante, veja, por exemplo, Stiegler [2], que sugere que Gauss descobriu o método antes de Legendre, que, porém, o apresentou em uma publicação que

despertou o interesse dos astrônomos da época, o que Gauss teria tentado vários anos antes, mas não conseguiu.

A qualidade do ajuste pode ser avaliada pelo valor da função Q da equação (VI.3) calculada com as estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ dos parâmetros, $Q(\hat{a}, \hat{b})$, cuja distribuição de probabilidade pode ser calculada quando os dados têm distribuição normal. Se conhecêssemos os valores exatos a_0 e b_0 , poderíamos escrever

$$Q(a_0, b_0) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (a_0 f(x_i) + b_0 g(x_i))]^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2}$$

onde usamos a relação (VI.2) para identificar os erros ϵ_i . Calculando o valor médio dos dois membros da equação, obtemos

$$\langle Q(a_0, b_0) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\langle \epsilon_i^2 \rangle}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = N \quad (\text{VI.9})$$

Essa relação não é muito útil, uma vez que não conhecemos a_0 nem b_0 . No entanto, se usamos as estimativas conhecidas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ no lugar de a_0 e b_0 , obtemos

$$Q(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (\hat{a}f(x_i) + \hat{b}g(x_i))]^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon_i'^2}{\sigma_i^2} \quad \text{VI.10}$$

onde definimos o resíduo do ajuste no ponto x_i , ϵ_i' , como

$$\epsilon_i' = y_i - (\hat{a}f(x_i) + \hat{b}g(x_i)) \quad (\text{VI.11})$$

É possível calcular o valor médio da expressão (VI.10) [5], obtendo-se uma expressão bastante parecida com a equação (VI.9):

$$\langle Q(\hat{a}, \hat{b}) \rangle = N - 2 \quad (\text{VI.12})$$

Como Q é uma função definida positiva ou nula, o fato de seu valor médio ser nulo para $N = 2$ significa que ele vale zero sempre. Isso porque, nesse caso de $N = 2$, as estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são a solução do sistema linear, de modo que os resíduos ϵ_1' e ϵ_2' para os únicos dois dados são nulos e, portanto, sua soma quadrática é nula.

Quando fazemos *um* ajuste, porém, temos *um* único valor $Q(\hat{a}, \hat{b})$, de modo que, se $N > 2$, ele pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \infty]$. Quando os dados têm uma distribuição gaussiana, a função de probabilidade dos diferentes valores pode ser calculada e demonstra-se que $Q(\hat{a}, \hat{b})$ tem a função de probabilidade da variável χ_{N-2}^2 (diz-se qui-quadrado com $N-2$ graus de liberdade), de forma que

se pode realizar um teste de hipótese rigoroso, dentro do quadro teórico da teoria estatística. Aqui, vamos nos limitar a uma interpretação qualitativa dessa grandeza.

Valores de $Q(\hat{a}, \hat{b})$ muito menores que $N-2$ são devidos a desvios-padrões superestimados. Já valores muito maiores que $N-2$ sugerem que o modelo seja inadequado, quando devemos buscar outra função para relacionar y com x no lugar da (VI.1), ou, então, os desvios-padrões estão muito subestimados. Se desenvolvermos as expressões algébricas da equação (VI.8), que determinam os desvios padrões de $\hat{a}$ e $\hat{b}$, veremos que, quando se subestimam (superestimam) os desvios padrões dos dados, os desvios dos resultados também estarão subestimados (superestimados).

Na equação (VI.12), o número 2 do membro direito, $N-2$, está associado aos 2 parâmetros a_0 e b_0 da relação entre y e x . Caso a relação que substitua (VI.1) tenha m parâmetros, esse número 2 será substituído por m . Por exemplo, se forem três os parâmetros: a_0 , b_0 e c_0 , então a relação (VI.10) fica

$$\langle Q(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \rangle = N - m = N - 3 \quad (\text{VI.13})$$

Uma introdução ao método dos mínimos quadrados do ponto de vista do tratamento estatístico dos dados em física experimental pode ser encontrada no livro de Helene e Vanin [3] ou em Vuolo [4] e uma apresentação mais profunda em Helene [5].

Referências

- [1] *Álgebra Linear*. Mário Barone Jr., 3ª edição, São Paulo, IME-USP (2002).
- [2] *Gauss and the Invention of Least Squares*. Stephen M. Stigler. Annals of Statistics, **9** (1981) 465- 474 - doi:10.1214/aos/1176345451
- [3] *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*. O. Helene e V.R. Vanin. Ed. Edgard Blucher, SP, 2ª edição (1991)
- [4] *Fundamentos da teoria de erros*. José Henrique Vuolo. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP, 2ª edição (1992)
- [5] *Método Dos Mínimos Quadrados Com Formalismo Matricial*. Otaviano Helene. Ed. Livraria da Física (2006).

VII. O Método dos Mínimos Quadrados com incerteza na variável independente

De acordo com o método dos mínimos quadrados, as estimativas dos parâmetros a e b da função VI.1, $af(x_i) + bg(x_i)$, correspondem aos valores que minimizam a função Q da fórmula VI.3, repetida abaixo

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (af(x_i) + bg(x_i))]^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{VI.3})$$

em que σ_i^2 é a variância de y_i . Assim, esse método não está preparado para lidar com as situações em que há erro na variável independente, x_i . No entanto, quando a dispersão dos valores x_i ⁶ escolhidos na medida for grande em relação aos seus desvios-padrão, σ_{x_i} , transferir a incerteza de x_i para y_i é uma excelente aproximação, que permite estender o MMQ para esses casos.

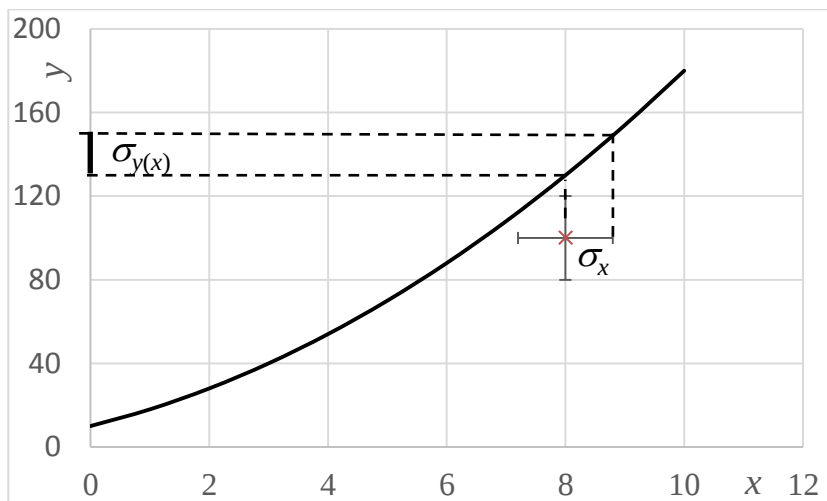


Figura VII.1. Quando o valor experimental (x,y) é medido com erro em ambas as coordenadas, desenham-se barras de incerteza na vertical e na horizontal para representar os desvios-padrões em y e x , respectivamente. As linhas tracejadas sugerem como transformar a incerteza em x em uma incerteza equivalente na

⁶ A dispersão dos x_i é uma medida do quanto esses valores estão espalhados no eixo x e pode ser definida por $\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$, onde $\bar{x}$ é o ponto médio dos x_i .

variável y , quando a relação entre y e x , descrita pela curva contínua, for conhecida.

A figura VII.1 mostra a ideia dessa transformação. O único ponto marcado tem barras de incerteza em x e em y e a curva representa a função $y(x)$. O desenho sugere que existe uma incerteza em y , $\sigma_{y(x)}$, que é equivalente a σ_x .

O processo de cálculo do desvio-padrão equivalente, $\sigma_{y(x)}$, é semelhante ao de propagação de incerteza da seção de propagação de incertezas, fórmula III.2, que, neste caso, fica

$$\sigma_{y(x)} \cong \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_i} \sigma_x \quad (\text{VII. 1})$$

em que tomamos o módulo da derivada porque os desvios-padrões são grandezas definidas positivas.

Juntando essa parte da incerteza com a do valor y_i medido, σ_{y_i} , a variância total do ponto (x_i, y_i) é

$$\sigma_i^2 \cong \sigma_{y_i}^2 + \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_i} \right)^2 \sigma_x^2 \quad (\text{VII. 2})$$

que é o valor a ser inserido na fórmula VI.3 e no cálculo dos elementos de matriz no método dos mínimos quadrados.

Esse cálculo, porém, requer o conhecimento da relação entre as variáveis, que não é conhecida, uma vez que inicialmente não temos os parâmetros da função. Isso é resolvido tornando o processo de ajuste iterativo: fazemos uma primeira estimativa dos parâmetros, de modo a poder estimar $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_i}$ e com ele as variâncias totais dos dados e ajustar os parâmetros; caso os valores σ_i^2 obtidos sejam diferentes das estimativas de forma que os valores calculados com a relação VII.2 mudem em relação aos valores anteriores, refaz-se o ajuste dos parâmetros com os novos σ_i^2 , até que os parâmetros calculados igualem as estimativas de entrada.

Normalmente, basta obter uma primeira estimativa pelo MMQ sem levar em conta a incerteza em y , inseri-la em VII.2, e recalculer os parâmetros com essas variâncias aumentadas. Os parâmetros desse segundo cálculo costumam mudar pouco em relação aos da primeira estimativa, a não ser que as incertezas em x sejam mais importantes que aquelas em y . O que muda muito são as incertezas dos parâmetros, essas sim, dependentes diretamente das variâncias dos dados experimentais, que mudam em ordem zero, de acordo com a expressão VII.2.

Referências e fontes bibliográficas

- R.P. Feynman., R.B. Leighton and M. Sands, *Lectures on Physics*, Vol 1. 1971.
- A.Hudson, R. Nelson, *University Physics*, 2nd Ed. Saunders College Publ. 1990.
- Diretório Central dos Estudantes. *Normatização de trabalhos acadêmicos & referências bibliográficas*. 2a. Ed. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. - (1998). 52p.
- Fernandes, Normando C. O laboratório de projetos: inúmeras variações sobre o mesmo tema. *Preprint IFUSP/ P-564*. (1986).
- Frota, Maurício Nogueira, Ohayon, Pierre. eds. *Padrões e Unidades de Medida - Referências Metrológicas da França e do Brasil*. INMETRO - Rio de Janeiro: Qualitymark Ed. 1999. 120p.
- Helene, Otaviano A.M. e Vanin, Vito R. *Tratamento estatístico de dados em física experimental*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 1981.
- INMETRO, SBM. *Guia para expressão da incerteza de medição*. ABNT, Rio de Janeiro. (1998). 120p.
- *Referências Bibliográficas de Multimeios e Documentos Eletrônicos*. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Projeto Disque-Biblio, (1998) 19p.
- Saad, Fuad Daher, Yamamura, Paulo; Watanabe, Kazuo . *Introdução à interpretação gráfica de dados, gráficos e equações*. 25p. IFUSP (sem data).
- Vuolo, José Henrique. Fundamentos da teoria de erros. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.
- Yamamura, Paulo e Watanabe, Kazuo *Instrumentos de Medição in Manuais Didáticos de Física*. 18p