SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 2 - Espaço de Estados - Controle e Controlabilidade

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Estudo da Controlabilidade

- Definição: O sistema (A, B) é controlável se existe uma entrada de controle (contínua) $u(t)$ que altera o estado do sistema de uma condição inicial x_0 para uma condição final desejada x_f num intervalo de tempo finito.

- Condição: Matriz de Controlabilidade

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$$

deve ser não singular.

Estudo da Controlabilidade

- Exemplo: $G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

Estudo da Controlabilidade

- Exemplo: $G(s) = \frac{s - z_0}{s^2 + 7s + 12}$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & -z_0 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

Estudo da Controlabilidade

- Exemplo: $G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$

- Forma canônica observável

$$A_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = 0$$

Estudo da Controlabilidade

- Exemplo: $G(s) = \frac{s-z_0}{s^2+7s+12}$

- Forma canônica observável

$$A_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix}$$
$$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = 0$$

Controle no Espaço de Estados

- Cálculo do **controlador**: realimentação do estado
- Cálculo do **observador**
- Combinação do controlador + observador: realimentação da saída

Controle por Realimentação do Estado

- Lei de controle

$$u = -K\mathbf{x} = -[k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- tal que

$$A - BK \;\; \text{seja estável}$$

- Equação característica desejada

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0$$
$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Pólos em: -2 e -3

- Função Matlab: K = place(A,B,p)

- Forma canônica controlável

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equação caraterística

$$s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + (a_2 + k_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_n) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -a_1 + \alpha_1, \;\; k_2 = -a_2 + \alpha_2, \;\cdots\;, \;\; k_n = -a_n + \alpha_n,$$

Controle por Realimentação do Estado

- Transformar o sistema para a forma canônica controlável
- Obter o ganho K_c dados os pólos desejados
- Calcular o ganho $K = K_c T^{-1}$

Controle por Realimentação do Estado

- Fórmula de Ackerman

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha(A)$$

- com

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$$

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_n I$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Função Matlab: K = acker(A,B,p)

Perda da Controlabilidade

- Exemplo: Pólos nas raízes de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Perda da Controlabilidade

- Solução

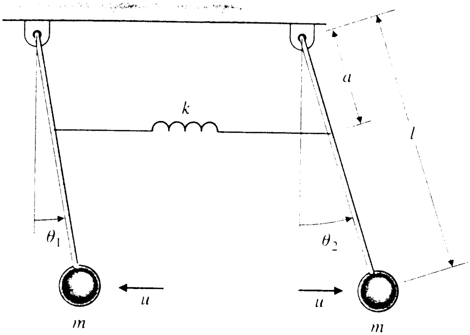
$$K_1 = \frac{z_0(14\zeta\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\zeta\omega_n - 7)}{(z_0+3)(z_0+4)}$$

$$K_2 = \frac{z_0(7 - 2\zeta\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0+3)(z_0+4)}$$

- Não controlável $\Rightarrow$ ganho alto

Controlabilidade

Dois pêndulos, acoplados por uma mola, são controlados por duas forças iguais e opostas, que são aplicadas aos pêndulos como mostrado na figura.



As equações de movimento linearizadas são:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu$$
$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu$$

a) Mostre que o sistema não é controlável. É possível associar um significado físico para os modos controláveis e não controláveis?

b) Existe uma forma de fazer o sistema ser controlável?

c) Defina valores para os parâmetros e projete um controlador por alocação de polos. Simule.