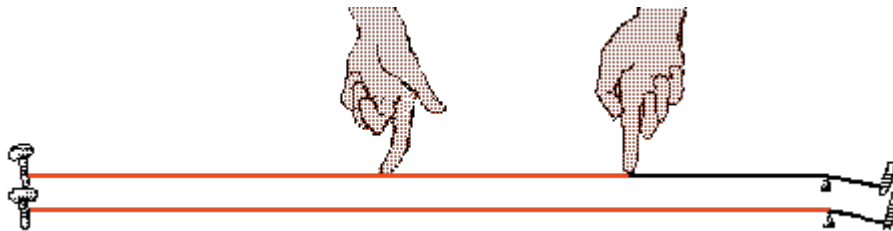
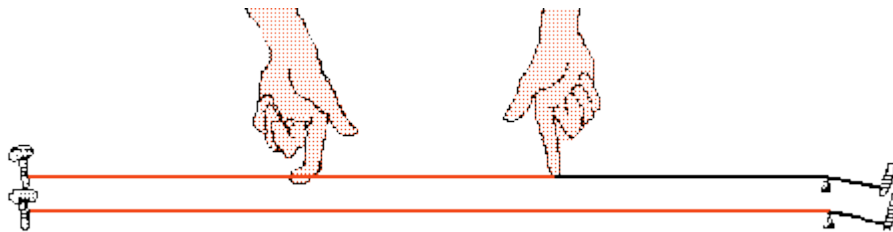
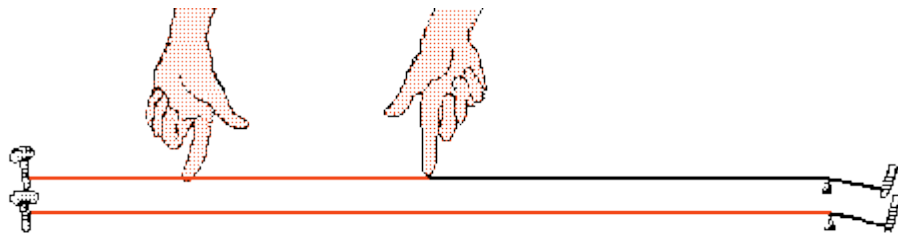


SISTEMAS DE AFINAÇÃO

Pitágoras e a escala musical
Prof. Dr. Paulo de Tarso Salles
CMU-ECA/USP, 2016

SUBDIVISÕES DA CORDA, DE ACORDO COM PITÁGORAS



Ilustrações obtidas em:
<http://www.aboutscotland.co.uk/harmony/prop.html>

PROPORÇÕES DA ESCALA PITAGÓRICA

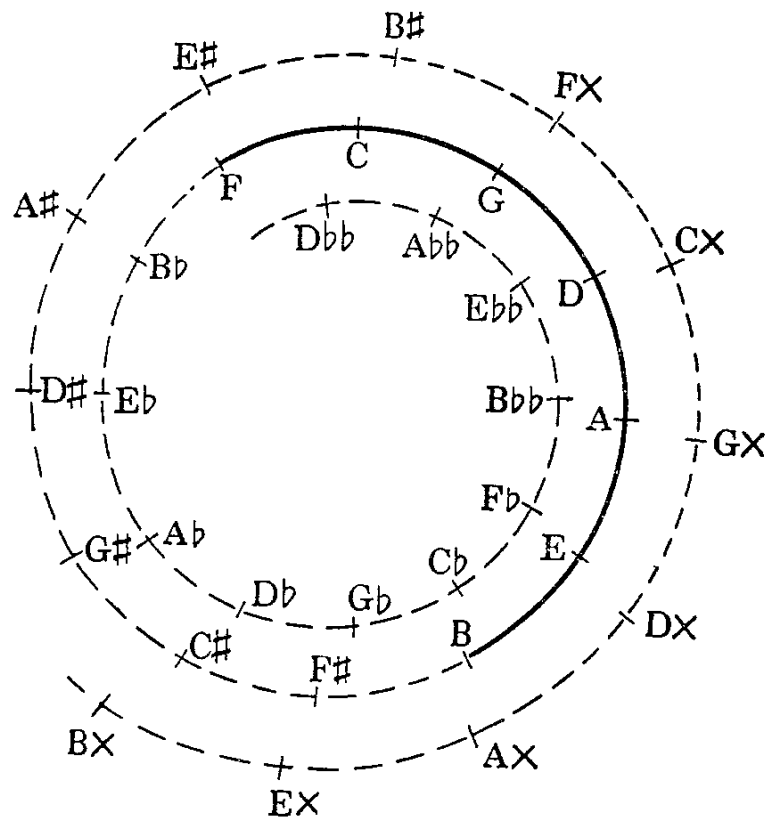
A escala pitagórica iniciando-se em C_4 e suas relações em cents

Nota	C ₄	D ₄	E ₄	F ₄	G ₄	A ₄	B ₄	C ₅
Razão de frequência em relação a C ₄	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Número de cents acima de C ₄	0	204	408	498	702	906	1110	1200
Intervalos em cents entre notas adjacentes	204	204	90	204	204	204	90	

Extraído de MENEZES, 2004, p. 245.

Obs.: Pitágoras se referia ao comprimento da corda, não a sua frequência

A ESPIRAL DE QUINTAS



Extraído de JEANS, 1968, p. 166.

CICLO DAS QUINTAS X OITAVA

The diagram illustrates the relationship between the cycle of fifths and the octave. It features a grand staff with a treble and bass clef. The bass clef line shows a sequence of notes: C2, G1, D2, A1, E2, B1, F2, C3. The treble clef line shows a sequence of notes: G4, D5, A5, E6, B6, F7, C8. The notes are connected by brackets and numbered 1 through 7, representing the steps of the cycle. Above the treble clef, the mathematical expressions $(3/2)^{12} = 129,75$ and $2^7 = 128$ are shown, indicating the frequency ratios for the cycle of fifths and the octave, respectively. A dashed line labeled 15^{ma} connects the final note of the cycle (C8) to the starting note (C2), representing the 15th harmonic. Below the staff, a bracket labeled "ciclo das quintas" spans the entire sequence of notes.

$(3/2)^{12} = 129,75$ $2^7 = 128$ 15^{ma}

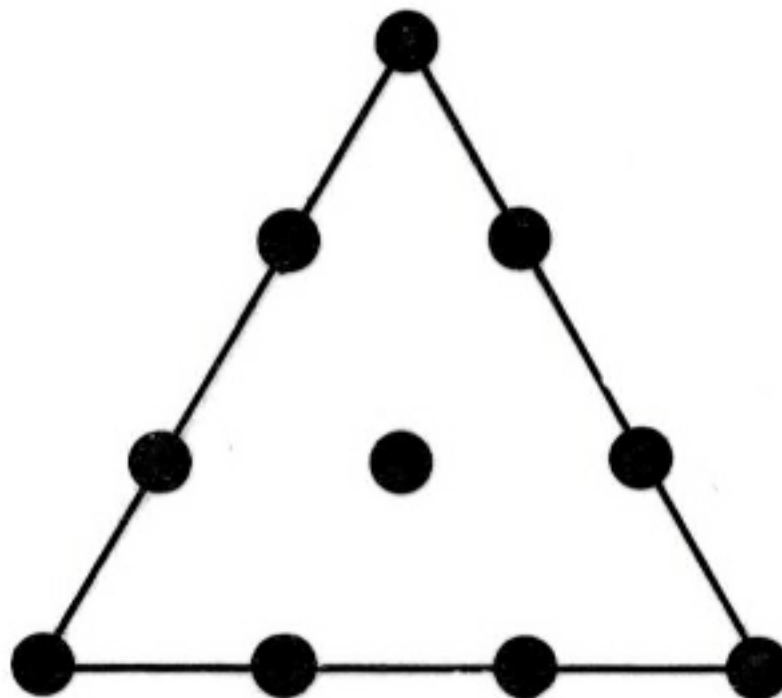
1 2 3 4 5 6 7

ciclo das quintas

COMA PITAGÓRICA

- ◉ Resultado da diferença entre semitons cromáticos e diatônicos na escala pitagórica
- ◉ Essa diferença é na razão de: $531441/524288$
- ◉ Em decorrência dessa diferença, tem-se a espiral de quintas vista anteriormente, gerando uma “incongruência das notas supostamente enarmônicas” (MENEZES, 2004, p. 243)

A TETRAKTYS: CONSONÂNCIAS PERFEITAS (JUSTAS)



$$1+2+3+4=10$$

MACHAUT: *KYRIE DA MISSA DE NOTRE DAME* (CERCA DE 1365)

A musical score for Machaut's Kyrie, consisting of four staves. The first three staves are in treble clef and the fourth is in bass clef. The time signature is 3/2. The lyrics 'Ky-ri-e' are written below the notes. The melody is composed of half notes and whole notes. The first staff has a sharp sign on the fourth line of the second measure. The second staff has a sharp sign on the fourth line of the fourth measure. The third staff has a sharp sign on the fourth line of the fourth measure. The fourth staff has a sharp sign on the fourth line of the fourth measure.

Ky-ri-e Ky-ri-e Ky-ri-e Ky-ri-e

ESCALAS MESOTÔNICA E JUSTA: CORREÇÃO DAS TERÇAS PITAGÓRICAS

MESOTÔNICA

- ◉ Cálculo das médias aritmética, geométrica e harmônica
- ◉ Arquitas de Tarento (430-360 a.C.) foi um dos precursores no uso desses cálculos

JUSTA, ou “gama de Zarlino”

- ◉ Gioseffo Zarlino (1517-1590)
- ◉ *Senario*: conjunto dos primeiros seis números inteiros
- ◉ $3^a M = 4/5$
- ◉ $3^a m = 5/6$
- ◉ $6^a M = 3/5$
- ◉ Apoiou-se no conceito de médias harmônica e aritmética

COMA SINTÔNICA

- ◉ É a diferença entre a medida das 3^{as} M e m da escala pitagórica frente à escala Justa
- ◉ Sua razão é de $81/80$
- ◉ Deixa explícito o choque entre uma concepção teórica (a escala pitagórica) e a percepção do fenômeno sonoro real, ainda não conhecido àquela época, que é a SÉRIE HARMÔNICA
- ◉ Arquitas e Aristoxeno (IV a.C) e Zarlino (XVI d.C), entre outros, intuíram esse problema e propuseram novos cálculos baseados nas médias aritmética e harmônica

GAMA DE ZARLINO

dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2

(ABDONOUR, 2002, pp. 39-53)

TEMPERAMENTO IGUAL

Frequency ratios within the octave

$$c = 1$$

$$c\# = 1.05946$$

$$d = (1.05946)^2 = 1.1225$$

$$d\# = (1.05946)^3 = 1.1892$$

$$e = (1.05946)^4 = 1.2599$$

$$f = (1.05946)^5 = 1.3348$$

$$f\# = (1.05946)^6 = 1.4142$$

$$g = (1.05946)^7 = 1.4983$$

$$g\# = (1.05946)^8 = 1.5874$$

$$a = (1.05946)^9 = 1.6818$$

$$a\# = (1.05946)^{10} = 1.7818$$

$$b = (1.05946)^{11} = 1.8877$$

$$c' = (1.05946)^{12} = 2.0000$$

LEIS DE MERSENNE

1. Quando uma corda e sua tensão permanecem inalteradas, mas o *comprimento* varia, o período da vibração é proporcional ao comprimento (lei de Pitágoras)
2. Quando uma corda e seu comprimento permanecem inalterados, mas a *tensão* varia, a frequência da vibração é proporcional à raiz quadrada da tensão
3. Para cordas diferentes, de mesmo comprimento e tensão, o período de vibração é proporcional à raiz quadrada do *peso* da corda.

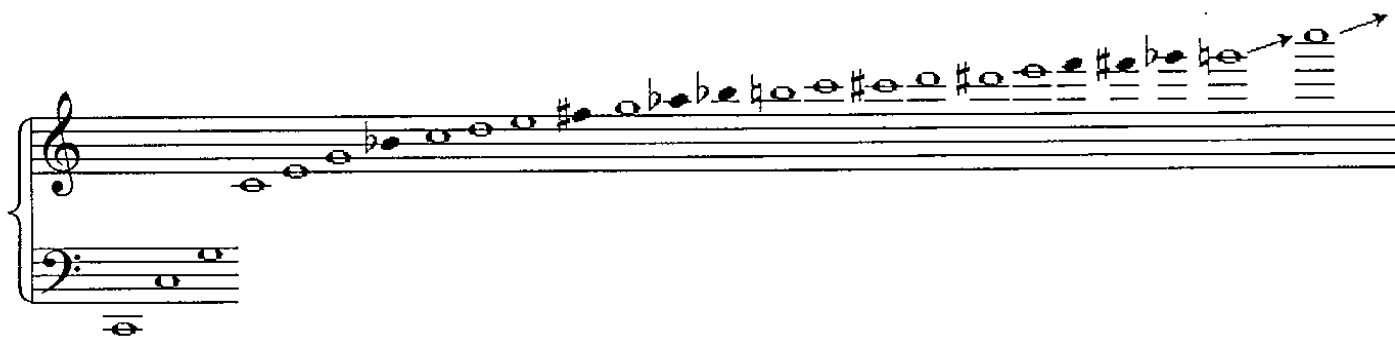
Fonte: Jeans, 1968:64-5
Marin Mersenne (1588-1648)

A SÉRIE HARMÔNICA (1)

- ◉ Os experimentos de Pitágoras NÃO tem nada a ver com a série harmônica.
- ◉ Paradoxo de Mersenne: “como poderia uma corda [...] produzir mais que uma altura ao mesmo tempo?” (ABDONOUR, 2002, p. 32).
- ◉ Vários cientistas colaboraram para a definição do modelo de propagação do som: Galileu, Huygens, Mersenne, Benedetti, Wallis, Sauveur, Bernouilli, Fourier (séc. XVII-XVIII).
- ◉ Rameau escreveu seu Tratado de Harmonia (1722) inspirado por essas descobertas, que o levaram a reelaborar sua teoria harmônica em vários tratados subsequentes.

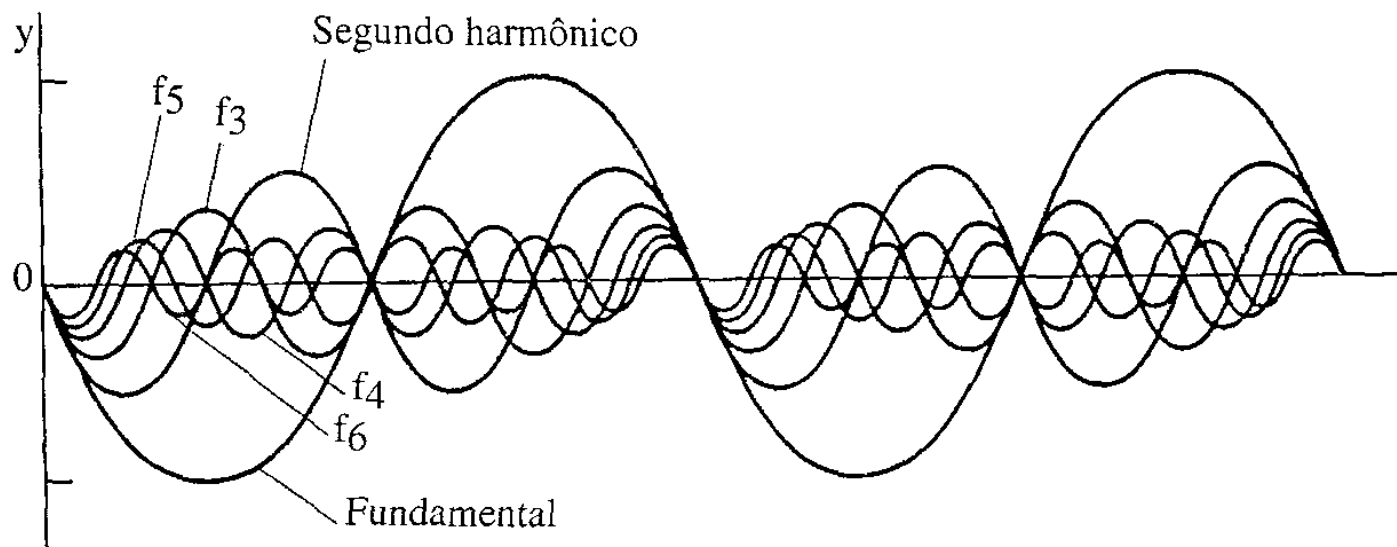
SÉRIE HARMÔNICA (2)

Parciais ou *harmônicos* da *série harmônica* de $C_2 = 65,4$ Hz (notas pretas = ligeiramente diferentes do sistema temperado a que se refere a notação tradicional) (CD 15)



Extraído de MENEZES, 2004, p. 38

REPRESENTAÇÃO DAS ONDAS DOS SEIS PRIMEIROS PARCIAIS



Extraído de MENEZES, 2004, p. 39

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ◉ ABDONOUR, O. J. *Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras, 2002.
- ◉ HELMHOLTZ, H. *On the sensations of tone*. New York: Dover, 1954.
- ◉ JEANS, J. *Science and Music*. New York: Dover, 1968.
- ◉ MASSIN, J. e MASSIN, B. *História da Música Ocidental*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- ◉ MENEZES, F. *A acústica musical em palavras e sons*. São Paulo: Ateliê Editorial, 2004.
- ◉ TOMÁS, L. *Ouvir o lógos: música e filosofia*. São Paulo: Editora da UNESP, 2002.