COMPLEMENTOS DE MECÂNICA CLÁSSICA

4ª LISTA DE EXERCÍCIOS – 2014

1) Mostre que a menor distância entre dois pontos em um plano é uma linha reta. Mostre que a menor distância entre dois pontos no espaço tridimensional, também é uma linha reta.

2) Mostre que a geodésica em uma superfície esférica é um grande círculo, isto é, um círculo cujo centro está no centro da esfera.

3) Mostre que a geodésica na superfície de um cilindro circular reto é um segmento de hélice.

4) Considere a luz passando de um meio de índice de refração n_1 para outro de índice de refração n_2. Utilize o princípio de Fermat para minimizar o tempo de percurso da luz e deduza a lei da refração (Lei de Snell): n_1 sen θ_1= n_2 sen θ_2.

5) Seja dado um sistema mecânico com um grau de liberdade cuja Lagrangeana é $L = L(q, \dot{q}, t)$.

a) Para esse sistema, enuncie de forma clara o princípio da mínima ação.
b) Mostre que, admitindo-se a validade das equações de Lagrange, concluímos que o princípio da mínima ação também é válido.

6) Utilize o formalismo Lagrangeano para obter as equações do movimento, para analisar a existência e a natureza dos vínculos e das grandezas que se conservam, para as seguintes situações:
a) Partícula livre em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas.
b) Partícula de massa m em campo gravitacional.
c) Oscilador harmônico unidimensional
d) Pêndulo simples.
e) Duas partículas de massas m_1 e m_2, interagindo com forças centrais.

7) Um pendulo consiste de uma massa m suspensa do seu ponto de apoio por uma mola de comprimento desprezível e constante k. Escreva as equações de Lagrange desse movimento.

8) Uma partícula de massa m está presa a uma mola de comprimento l_0 e constante elástica k, de tal forma que ela somente pode se deslocar ao longo da direção vertical. Outra partícula de massa m está acoplada à primeira através de uma haste fina de comprimento l e massa desprezível. O movimento desse pêndulo está restrito a um plano vertical que contém a reta correspondente à trajetória da primeira partícula. Escreva as equações de Lagrange desse sistema. Considere a origem das coordenadas na posição de equilíbrio da mola.

9) Duas massas, m_1 e m_2 estão conectadas por uma corda ideal de comprimento l que passa através de um buraco que existe numa mesa horizontal. A massa m_1 se move sem atrito sobre a mesa e a massa m_2 se desloca numa linha vertical.
a) Qual é a velocidade inicial que m_1 deve ter para que m_2 permaneça parada a uma distância d abaixo da superfície da mesa.
b) Se m_2 for ligeiramente deslocada da posição vertical, ela efetuará pequenas oscilações. Utilize as equações de Lagrange par determinar o período de pequenas oscilações.

10) A massa m de um pêndulo está presa por um fio ideal de comprimento l a um ponto de sustentação. Esse ponto se move para frente e para trás ao longo de um eixo horizontal, de acordo com a equação $x = a \cos \omega t$. Suponha que o pêndulo só oscile no plano vertical que contém o eixo x. Considere que a posição do pêndulo seja descrita por um ângulo θ que o fio faz com uma linha vertical.

a) Escreva a Lagrangeana e obtenha as equações de Lagrange.

b) Mostre que, para valores pequenos de θ, a equação de movimento se reduz à equação de movimento de um oscilador harmônico forçado e determine os movimentos para o estado estacionário correspondentes. De que forma a amplitude de oscilações do estado estacionário depende de m, l, a e ω?

11) Um pêndulo simples de comprimento l e massa m está ligado a um suporte que se move lateralmente com aceleração constante a. Determine:

(a) as equações do movimento e (b) o período de pequenas oscilações.

Considere agora que o suporte se move verticalmente para cima com aceleração constante a. Determine:

(a)as equações do movimento e (b)o período de pequenas oscilações.

12) Utilize o formalismo Hamiltoniano para determinar as equações de movimento de uma partícula de massa m que se movimenta na superfície de um cilindro definido por $x^2+y^2=R^2$. A partícula está submetida a uma força dirigida para a origem e proporcional à distância da partícula à origem onde $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\,\mathbf{r}$ e $r^2 = x^2+y^2+z^2$.

13) Uma partícula de massa m move-se livremente, em um campo de forças conservativo representado por um potencial V. Determine a função Hamiltoniana e mostre que as equações canônicas do movimento se reduzem às equações de Newton. Utilize coordenadas cartesianas.

14) Uma partícula de massa m, sob a ação da gravidade, escorrega no interior de um parabolóide de revolução liso, com o eixo na vertical. Utilizando as coordenadas r, distância da partícula ao eixo vertical, e φ, ângulo azimutal, como coordenadas generalizadas, determine:

a) A Lagrangeana do sistema.

b) Os momentos generalizados e a Hamiltoniana do sistema.

c) A equação de movimento para a coordenada r em função do tempo.

d) Se $d\varphi / dt = 0$ mostre que a partícula executa pequenas oscilações em torno do ponto mais baixo do parabolóide e determine a frequência dessas oscilações.

15) Utilize o formalismo Hamiltoniano para obter as equações de movimento do pêndulo esférico de massa m e comprimento l.