

Princípios da Administração de Empresas

PRO2303



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MINAS E DE PETRÓLEO
Prof. Regina Meyer Branski

ENGENHARIA ECONÔMICA

Blank e Tarquin

Taxas Nominais e Efetivas de Juros

Programa

1. Fundamentos da Engenharia Econômica
 - 1. Tempo, Juros e o Valor do Dinheiro**
 - 2. Combinação de Fatores**
 - 3. Taxas Nominais e Taxas Efetivas de Juros**
2. Ferramentas para Avaliar Alternativas
 1. Análise do Valor Presente
 2. Análise do Valor Anual
 3. Análise da Taxa de Retorno
 4. Análise Custo-Benefício
3. Tomada de Decisões
 1. Decisões sobre Substituição e Retenção
 2. Escolha de Projetos Independentes sob Limitação Orçamentária
 3. Análise do Ponto de Equilíbrio
4. Complementando o Estudo
 1. Efeitos da Inflação
 2. Estimativa dos Custos e Alocação dos Custos Indiretos
 3. Análise de Sensibilidade

Objetivos

4

- Taxas Nominais e Efetivas
- Taxa Anual Efetiva de Juros
- Taxa Efetiva de Juros
- Comparar Período de Pagamento (PP) e Período de Capitalização (PC)
- Quantias Únicas: $PP \geq PC$
- Séries: $PP \geq PC$
- Quantias Únicas e em Série: $PP < PC$
- Capitalização Contínua
- Taxas Variáveis

Taxas Nominais e Efetivas

5

- Juros Compostos
 - ▣ Juros sobre juros
 - ▣ Para um dado período
- Tempo padrão para computar juros: 1 ano

Tempo padrão

6

- 1 ano:
 - 365 dias
 - 52 semanas
 - 12 meses
 - Trimestre: 3 meses – 4 trimestre/ano
- Juros podem ser computados mais de uma vez ao ano

Frequências de Capitalização

7

- Juros podem ser calculados (capitalizados):
 - Anualmente – 1 vez ao ano (no final do período)
 - Cada 6 meses – 2 vezes ao ano (semestral)
 - Cada trimestre – 4 vezes ao ano (trimestral)
 - Cada mes – 12 vezes ao ano (mensal)
 - Cada dia – 365 vezes ao ano (diariamente)
 - ...
 - Contínuo – números infinitos de período de capitalização em um ano

Taxas de Juros

8

- Podem ser calculadas de diversas formas
- Exemplos:
 - ▣ Juros de “5% por 6 meses”
 - ▣ Juros de “12%” (12% por qual período?)
 - ▣ Juros de “1% ao mês”
 - ▣ Juros de “12.5% por ano, capitalizados mensalmente”

Duas Formas de Calcular Juros

9

- Taxa de Juros Nominal
- Taxa de Juros Efetiva

Taxa de Juros Nominal

10

- 1.5% ao mês por 24 meses
 - ▣ **Mesmo que: $(1.5\%)(24) = 36\%$ por 24 meses**
- 1.5% ao mês por 12 meses
 - ▣ **Mesmo que $(1.5\%)(12 \text{ meses}) = 18\%/ano$**
- 1.5% ao mês por 6 meses
 - ▣ **Mesmo que: $(1.5\%)(6 \text{ meses}) = 9\%/6 \text{ meses}$ ou período semestral**
- 1% na semana por 1 ano
 - ▣ **Mesmo que: $(1\%)(52 \text{ semanas}) = 52\%$ por ano**

Formato: $r\%$ por período de tempo

Calculando a Taxa de Juros Nominal

11

$$r = (\text{taxa de juros por período})(\text{número de períodos})$$

Taxa Efetiva de Juros

12

- Taxa real que se aplica durante um período de tempo específico.
- De forma geral é expressa em base anual como taxa efetiva anual (mas pode usar outra base de tempo)

Taxa Efetiva de Juros Anual

13

- “15 % ao ano, capitalizados mensalmente”
 - ▣ 15% é a Taxa Nominal
 - ▣ “capitalizados mensalmente” → frequência de capitalização no ano
 - ▣ No exemplo: 12 períodos de capitalização no ano.

Taxa Efetiva de Juros Anual

Taxa Nominal de Juros

14

- **Taxa Efetiva de Juros Anual**
 - Informa a frequência de capitalização no ano da Taxa de Juros Nominal
- Notação:
 - “ i_a ”
- Taxa de Juros Efetiva Anual i_a é uma extensão da Taxa Nominal r

Diferenças

15

- Taxa de Juros Nominal
 - ▣ Formato: “ $r^0\%$ por período de tempo t ”
 - ▣ Ex: 5% ao mês, por 6 meses”
- Taxa de Juros Efetiva
 - ▣ Formato: “ $r^0\%$ por período de tempo, capitalizado ‘ m ’ vezes ao ano.
 - ▣ Ex. 18% ao ano, capitalizados mensalmente

Qual usar “r” or “i”?

16

- Alguns problemas podem indicar somente a Taxa de Juros Nominal
- Lembre-se: **usar sempre a Taxa de Juros Efetiva**

Período de Tempo associado aos Juros

17

- Período de Pagamento
 - ▣ Período de tempo no qual a taxa de juros é expressa. Ex. 1% ao mês
- Período de Capitalização
 - ▣ Período de tempo pelo qual os juros são cobrados ou ganhos. Ex. capitalizados mensalmente
- Frequencia de capitalização m
 - ▣ Número de vezes em que ocorre a capitalização. Ex. 9% ao ano, capitalizado trimestralmente. Então, $m=4$

Taxa Efetiva por PC

18

- Taxa de Juros Efetiva por período de capitalização (PC):

$$i = \frac{r\% \text{ por período de tempo } t}{m \text{ período de capitalização por } t} = \frac{r}{m}$$

Exemplo: $r = 9\%$ ao ano, capitalizados mensalmente

$m = 12$ (12 meses em um ano)

i por mês = $0,09/12 = 0,0075$ ou $0,75\%$ ao mês

Exemplo

19

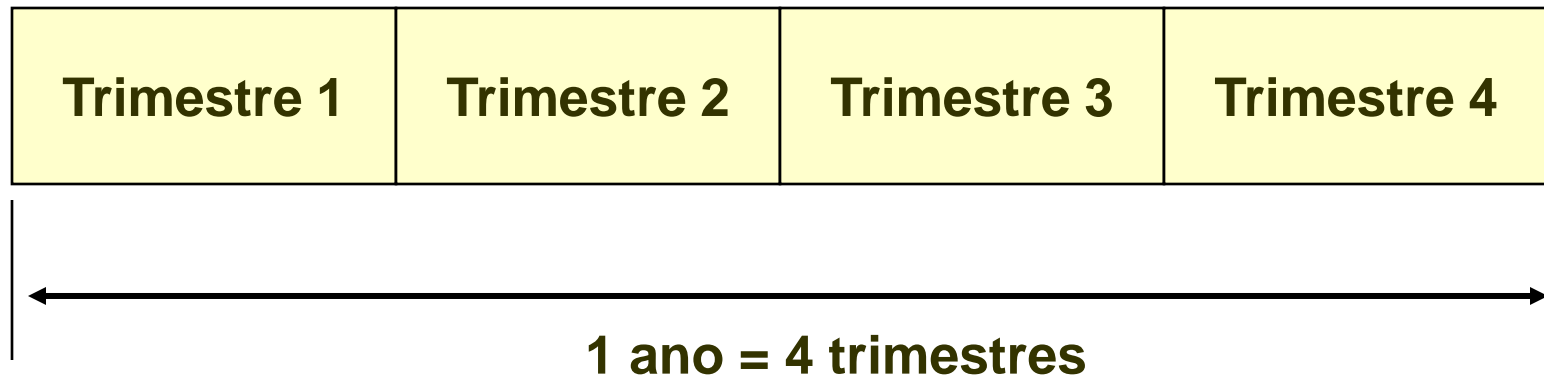
As diferentes taxas de empréstimo bancário para três projetos de compra de equipamentos de geração de energia elétrica são apresentadas abaixo. Determine a taxa efetiva com base no período de capitalização para cada cotação

- a) 9% ao ano, capitalizados trimestralmente
- b) 9% ao ano, capitalizados mensalmente
- c) 4,5% por 6 meses, capitalizados semanalmente

Exemplo

20

- 9% ao ano, capitalizados trimestralmente



PC = trimestre (3 meses)

m = 4

Exemplo

21

- 9% ao ano, capitalizados trimestralmente

Trim. 1	Trim. 2	Trim. 3	Trim. 4
---------	---------	---------	---------

Qual a Taxa Efetiva de Juros para o trimestre?

- $i_{\text{Trim.}} = 0.09/4 = 0.0225 = 2.25\%/trimestre$
- 9% é a taxa nominal;
- The 2.25% taxa efetiva trimestral

Exemplo

22

- 9% ao ano capitalizados trimestralmente

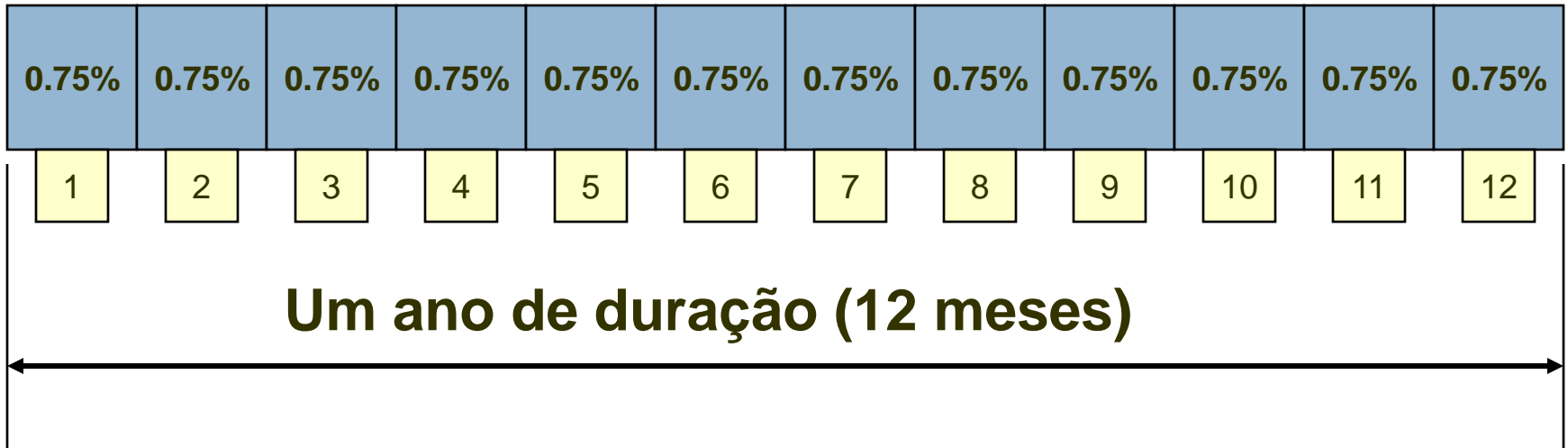
Trim1: 2.25%	Trim2: 2.25%	Trim3: 2.25%	Trim4: 2.25%
---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

Taxa Efetiva Trimestral é 2.25% por trimestre

Exemplo

23

- Taxa Nominal $r = 9\%$
- Capitalização Mensal: $m = 12$.
- Taxa Efetiva i
 - ▣ $i = 0.09/12 = 0.0075 = 0.75\%$ *por mês*



4.5% ao 6 meses, capitalizados semanalmente

24

- Taxa Nominal: 4.5%.
- Período de tempo: 6 meses.
- Capitalização Semanal:
 - ▣ Assume 52 semanas por ano
 - ▣ 6 meses = $52/2 = \underline{26 \text{ semanas por 6 meses}}$
- Taxa de Juros Efetiva:
 - ▣ $(0.045/26) = 0.00173 = \underline{0.173\% \text{ por semana}}$

“8% ao ano, capitalizados trimestralmente”

25

- Taxa Nominal é 8%
- Frequencia de capitalização
 - ▣ Capitalizados trimestralmente
 - ▣ Taxa Efetiva Trimestral é $0.8/4 = 0.02 = \underline{2\% \text{ por trimestre}}$

Agora necessário calcular a Taxa Efetiva de Juros Anual!

Notação

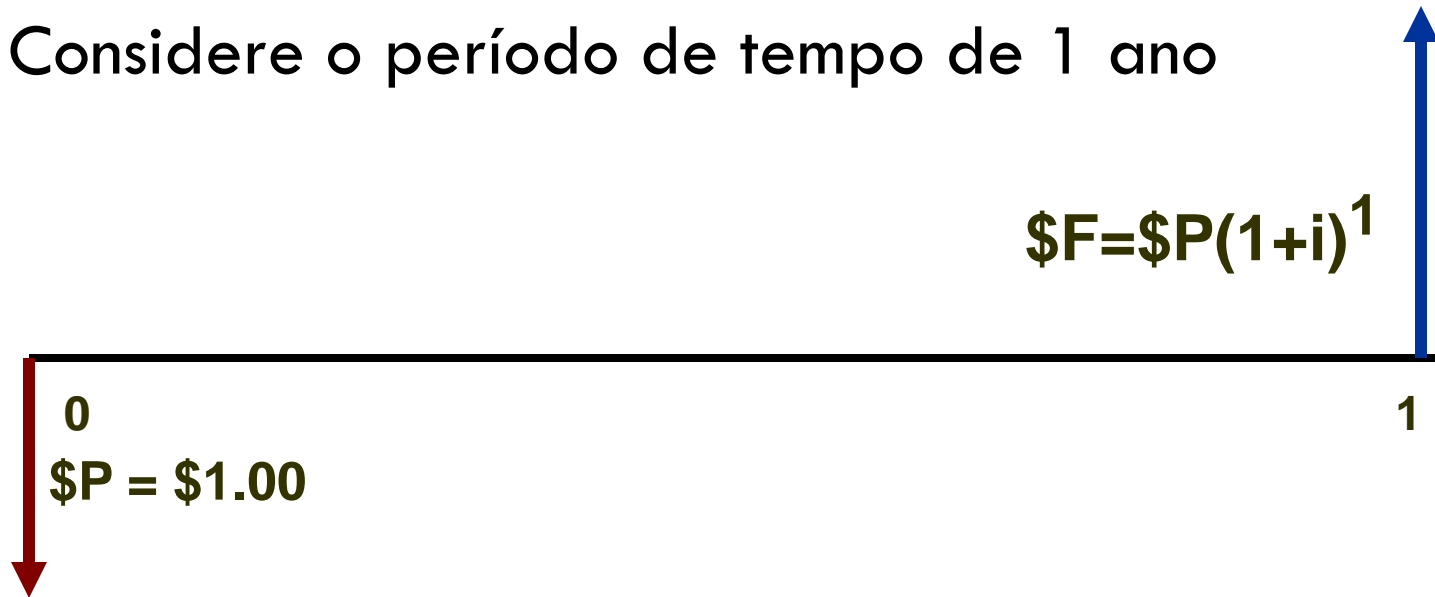
26

- r = taxa de juros nominal por ano
- m = número de períodos de capitalização dentro de um ano
- i = taxa efetiva de juros por período de capitalização (r/m)
- i_a or i_e = taxa anual efetiva de juros, dado o valor de m

Derivação da Taxa Efetiva Anual de Juros

27

- Considere o período de tempo de 1 ano



Investir \$1 do principal no tempo $t = 0$ a taxa de juros de i por ano

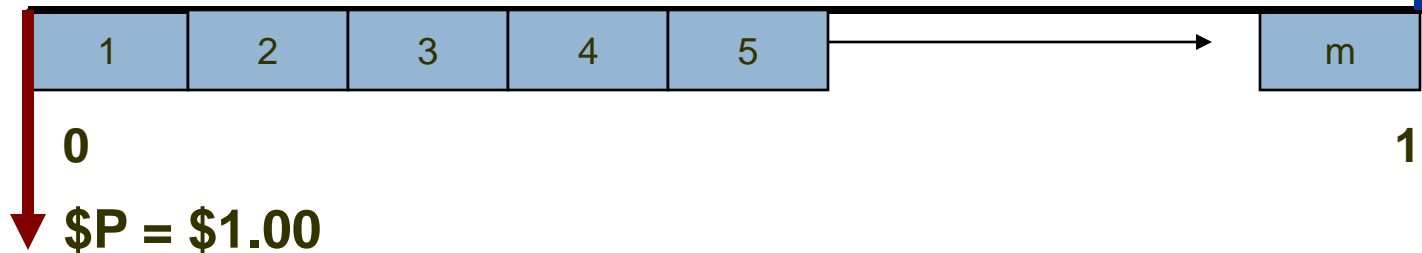
Um ano depois, $F = P(1+i)^1$

Derivação da Taxa Efetiva Anual de Juros

28

Juros podem ser capitalizados mais de um vez em um ano

$$\$F = \$P(1+i)^m$$



Reescrevendo

29

- $F = P + P(i_a)$
- A taxa i por Período de Capitalização deve ser capitalizada através de m períodos para obter F_1
- Reescreva como:
 - $F = P + P(i_a) = P(1 + i_a)$
 - $F = P(1 + i)^m$

Duas expressões para F

30

Existem duas expressões para F

1. $F = P(1 + i_a)$

2. $F = P(1 + i)^m$

3. Igualar as duas expressões

4. ~~$P(1 + i_a) = P(1 + i)^m$~~

Solucionar i_a em termos de “i”.

Expressão para i_a

31

- Solução para i_a

$$1 + i_a = (1+i)^m \quad (1)$$

$$i_a = (1 + i)^m - 1 \quad (2)$$

Se i_a e m conhecidos pode calcular a taxa efetiva de juros por período de capitalização

Também possível calcular a taxa nominal, “ r ”

Taxa Anual Efetiva de Juros

32

$$\text{Taxa Anual Efetiva de Juros } i_a = (1 + r/m)^m - 1 \quad (3)$$

$$\text{Ou, Taxa Efetiva de Juros } i = (1 + i_a)^{1/m} - 1$$

$$\text{E taxa nominal: } r = (i\% \text{ por PC})(\text{número de PC por ano}) = (i)(m) \quad (4)$$

Taxa Anual Efetiva de Juros dada a Taxa Nominal

33

- Juros é 8% ao ano, capitalizado trimestralmente
- Qual é a taxa anual efetiva de juros?

$$i_a = (1 + 0.08/4)^4 - 1$$

$$i_a = (1.02)^4 - 1 = 0.0824 = \underline{\underline{8.24\%/ano}}$$

Exercício

34

José recebeu um novo cartão de crédito de um banco nacional com uma taxa declarada de juros de 18% ao ano, capitalizada mensalmente. Considerando um saldo de \$ 1.000 no início do ano, encontre a taxa anual efetiva e o valor total devido ao banco depois de 1 ano, desde que nenhum pagamento tenha sido efetuado durante este ano.

Exercício

35

18%/ano, capitalizados mensalmente

□ Qual é taxa anual efetiva de juros?

$$r = 0.18/12 = 0.015 = 1.5\% \text{ por mês}$$

1.5% por mês é a taxa mensal efetiva

Taxa anual efetiva é:

$$(1 + 0.18/12)^{12} - 1 = 0.1956 = \underline{19.56\%/\text{ano}}$$

Exercício

36

- “18%, c.m. (capitalizados mensalmente)
 - ▣ **Taxa Nominal é 18%**
 - ▣ **Taxa Mensal Efetiva de Juros é 1.5%/mês**
 - ▣ **Taxa Anual Efetiva de Juros é 19.56%/ano**
- Uma taxa nominal cria duas efetivas!
 - ▣ Taxa Periódica e Taxa Anual Efetiva

i_a para 18%

37

- $m = 1$
 - ▣ $i_a = (1 + 0.18/1)^1 - 1 = \underline{0.18}$ (18%)
- $m = 2$ (capitalização semestral)
 - ▣ $i_a = (1 + 0.18/2)^2 - 1 = \underline{18.810\%}$
- $m = 4$ (capitalização trimestral)
 - ▣ $i_a = (1 + 0.18/4)^4 - 1 = \underline{19.252\%}$
- $m = 12$ (capitalização mensal)
 - ▣ $i_a = (1 + 0.18/12)^{12} - 1 = \underline{19.562\%}$
- $m = 52$ (capitalização semanal)
 - ▣ $i_a = (1 + 0.18/52)^{52} - 1 = \underline{19.684\%}$

Continuando para 18%.....

38

- $m = 365$ (capitalização diária)
 - ▣ $i_a = (1 + 0.18/365)^{365} - 1 = \underline{19.714\%}$
- $m = 365(24)$ (capitalização por hora)
 - ▣ $i_a = (1 + 0.18/8760)^{8760} - 1 = \underline{19.72\%}$
- Posso continuar dividindo o ano em períodos de tempo cada vez menores
- Nota: quando “m” se torna cada vez maior é chamado capitalização contínua

Período de Pagamento (PP)

39

- PC é período de capitalização
- E PP?
 - ▣ PP é o período de pagamento
- Por quê “PC” and “PP”?
 - ▣ Frequencia de depósitos nos fundos ou de recebimentos muitas vezes não coincide com a frequencia de capitalização
 - ▣ Empresa deposita dinheiro mensalmente em um conta que paga uma taxa nominal de juros de 14% ao ano capitalizado semestralmente
 - ▣ $PP=1$ mês e $PC=6$ meses

Exercício

40

Uma empresa fornece importantes componentes automobilísticos a fábricas de automóvel do mundo inteiro, e é a maior fornecedora da Ford. Um engenheiro participa de uma comissão na empresa a fim de avaliar ofertas para a compra de equipamentos de medição de coordenadas de última geração para uso nos automóveis. As ofertas de três fornecedores incluem as taxas de juros apresentadas a seguir. A empresa fará os pagamentos somente em base semestral. O engenheiro está confuso com relação às taxas efetivas de juros.

Oferta 1: 9% ao ano, capitalizada trimestralmente

Oferta 2: 3% ao trimestre, capitalizada trimestralmente

Oferta 3: 8,8% ao ano, capitalizada mensalmente

- Determine a taxa efetiva de juros de cada oferta, com base em pagamentos semestrais e construa fluxos de caixa
- Quais são as taxas anuais efetivas de juros?
- Qual oferece a menor taxa anual efetiva de juros?

Regra: A taxa de juros deve coincidir com o período de pagamento

Comparando

41

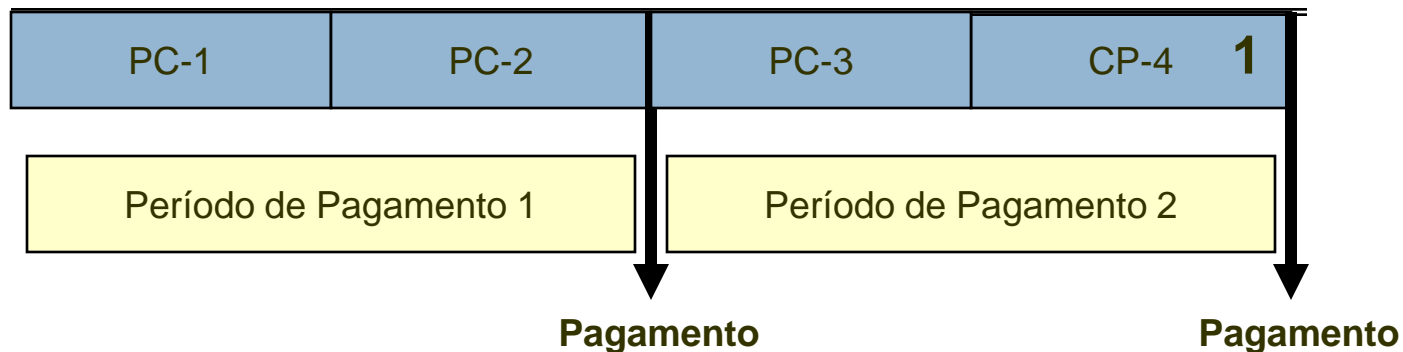
Regra: A taxa de juros deve coincidir com o período de pagamento

- Pagamentos de um empréstimo são feitos a cada 6 meses: $PP = 6$
- Converta a taxa nominal de juros $r\%$ para uma base anual e determine m
- Calcule a taxa semestral efetiva de juros

Comparando três planos: Plano 1

42

- 9% período anual, c.t.
- Pagamentos feitos a cada 6 meses; $PP = 6$



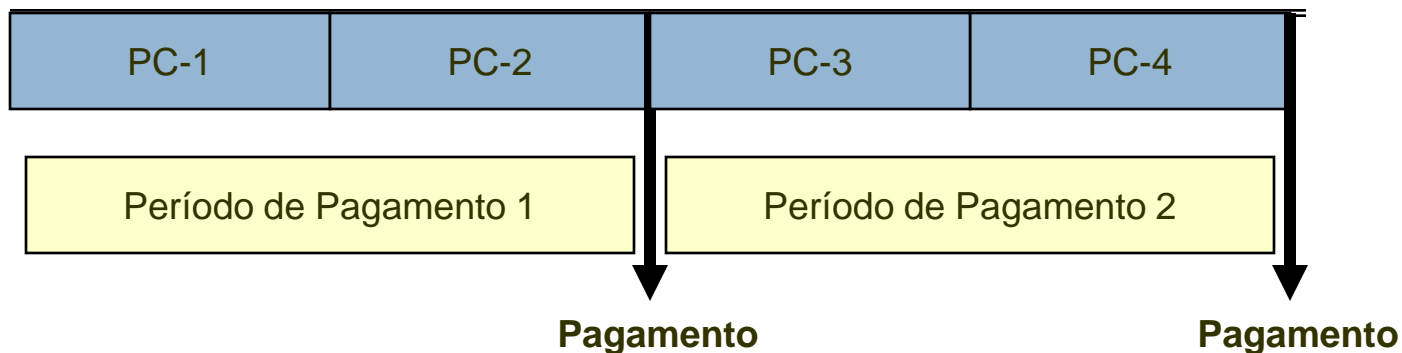
$r = 9\%$, c.t. = $0.09/4 = 4,5\%$ por semestre ou $r = 2,25\%$ por trimestre

$m = 2$ trimestres, durante 6 meses

Comparando três planos: Plano 1

43

- 9% ao ano, c.t. = 2.25%/ao trimestre
- Pagamento feito a cada 6 meses



$$\begin{aligned} \text{Taxa Efetiva de Juros } i\% \text{ para 6 meses} &= (1 + 0,045/2)^2 - 1 = \\ &= (1.0225)^2 - 1 = 0.0455 = 4.55\%/\text{semestre} \end{aligned}$$

Taxa Efetiva de Juros para 1 ano:

$$(1.0225)^4 - 1 = 9.31\%/\text{ano}$$

Comparando três planos: Plano 2

44

- 3% ao trimestre, c.t.
- Calcular:
 - ▣ Taxa Efetiva de Juros para 6 meses
 $(1.03)^2 - 1 = 0.0609 = \underline{6.09\%/6 \text{ meses}}$
 - ▣ Taxa Efetiva de Juros para 1 ano
 $(1.03)^4 - 1 = \underline{12.55\%/ano}$

Comparando três planos: Plano 3

45

□ 8,8% ao ano, c.m.

□ Calcular:

▣ Taxa Efetiva de Juros para 6 meses

1. Taxa Nominal de Juros para 6 meses

$$r = 0.088/2 = 4.4\%/6 \text{ meses}$$

2. Taxa Efetiva de Juros para 6 meses

$$(1 + 0.044/6)^6 - 1 = (1.0073)^6 - 1 = \underline{4.48\%/6 \text{ meses}}$$

3. Taxa Efetiva de Juros para 1 ano

$$(1 + 0.088/12)^{12} - 1 = \underline{9.16\%/ano}$$

Resumindo

46

Plano	6 meses	1 ano
1	4.55%	9.31%
2	6.09%	12.55%
3	4.48%	9.16%

Plano 3 tem a menor taxa de juros

Exercício

47

Uma empresa ponto.com planeja aplicar dinheiro em um novo fundo de capital de risco que tem, atualmente, um retorno de 18% ao ano, capitalizados diariamente. Qual é a taxa efetiva de juros dessa aplicação a) anualmente e b) semestralmente? R. 19,716% e 9,415%

Período de Capitalização e Período de Pagamento

48

- Se $PP = PC$
 - SEM PROBLEMAS!!
- Se PP diferente de PC
 - Exemplo: Poupança: depósitos mensais e juros trimestrais
 - ▣ NECESSÁRIO AJUSTAR!!

Valores Únicos com $PP \geq PC$

49

Método 1

Para Taxa Efetiva de Juros i : $i = r/m$

Para o número total de períodos n : $n = (m)(\text{número de períodos de pagamento})$

Exemplo

50

Suponha que uma empresa de cartões de crédito fixou uma taxa nominal de 15% ao ano, capitalizada mensalmente. Qual será o valor de uma fatura de \$ 1.500 paga depois de 2 anos?

Se $PP \geq PC$

51

- $r = 15\%$ a.a., c.m. (capitalização mensal)
- $P = \$1500$
- Encontre F para $n = 2$ anos
- $i = 15\%$ c.m. $= 0.15/12 = 0.0125 = 1.25\%/mês$
- $n = 2$ anos ou 24 meses

Se $PP \geq PC$

52

□ Método 1: Se $n = \text{meses}$

$$\square F_{24} = \$1,500(F/P, 0.15/12, 24);$$

$$\square i/\text{mês} = 0.15/12 = 0.0125 (1.25\%)$$

$$\square F_{24} = \$1,500(F/P, 1.25\%, 24)$$

$$\square F_{24} = \$1,500(1.0125)^{24} = \$1,500(1.3474);$$

$$\square F_{24} = \underline{\underline{\$2,021.03}}.$$

Se $PP \geq PC$

53

□ Método 2: $n = \text{anos}$

- $F_{24} = 1.500(F/P, i\%, 2)$

- Se $n = 2$ anos, necessário aplicar a Taxa Efetiva de Juros Anual

- $i/\text{mês} = 0.0125$

- $I_a = (1.0125)^{12} - 1 = 0.1608 = 16.08\%$

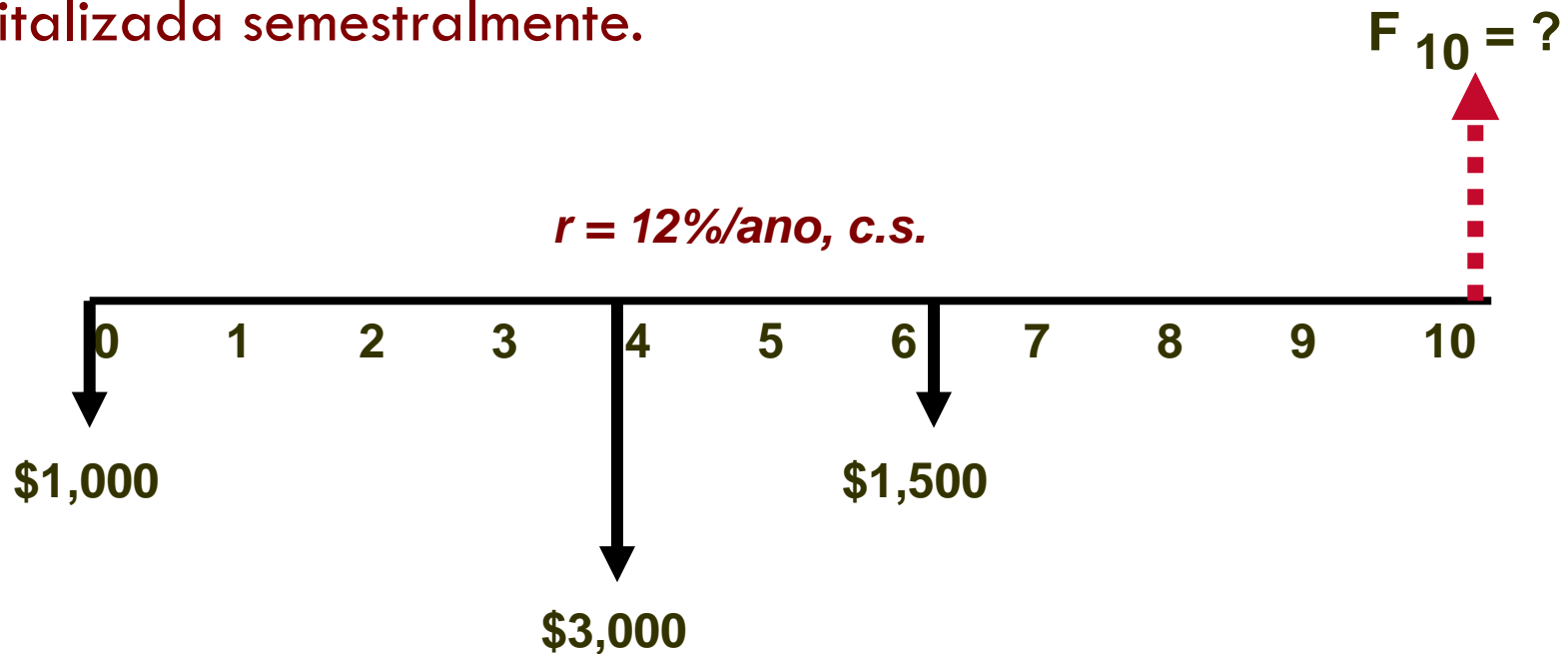
- $F_2 = 1.500(F/P, 16.08\%, 2)$

- $F_2 = 1.500(1.1608)^2 = \underline{\underline{\$2,021.19}}$

Exercício

54

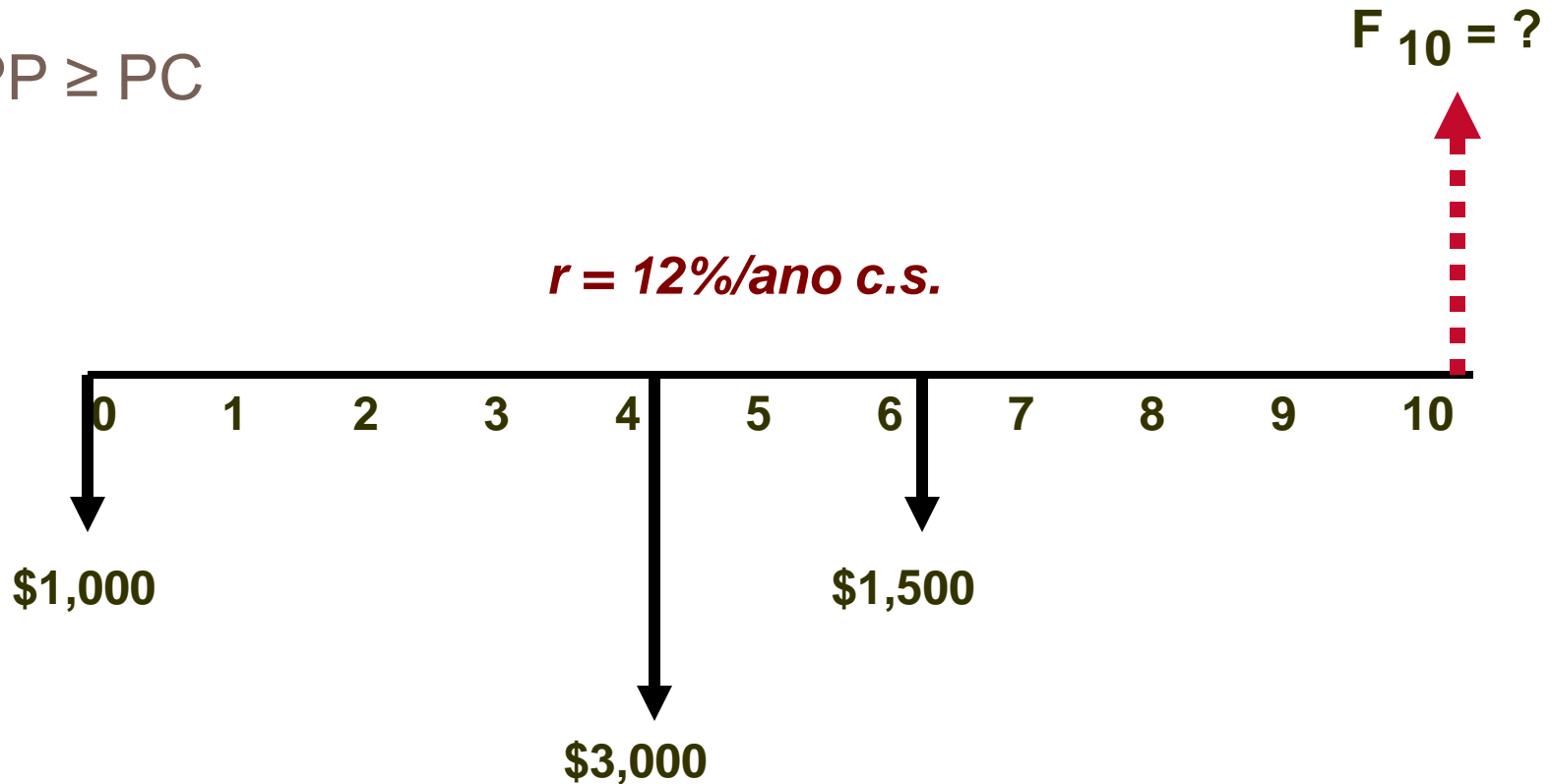
Um engenheiro que trabalha como consultor independente efetuou depósitos em uma conta especial para cobrir despesas de viagem, representados no diagrama abaixo. Encontre o montante existente na conta depois de 10 anos a uma taxa de juros de 12% ao ano, capitalizada semestralmente.



Método 1

55

PP \geq PC



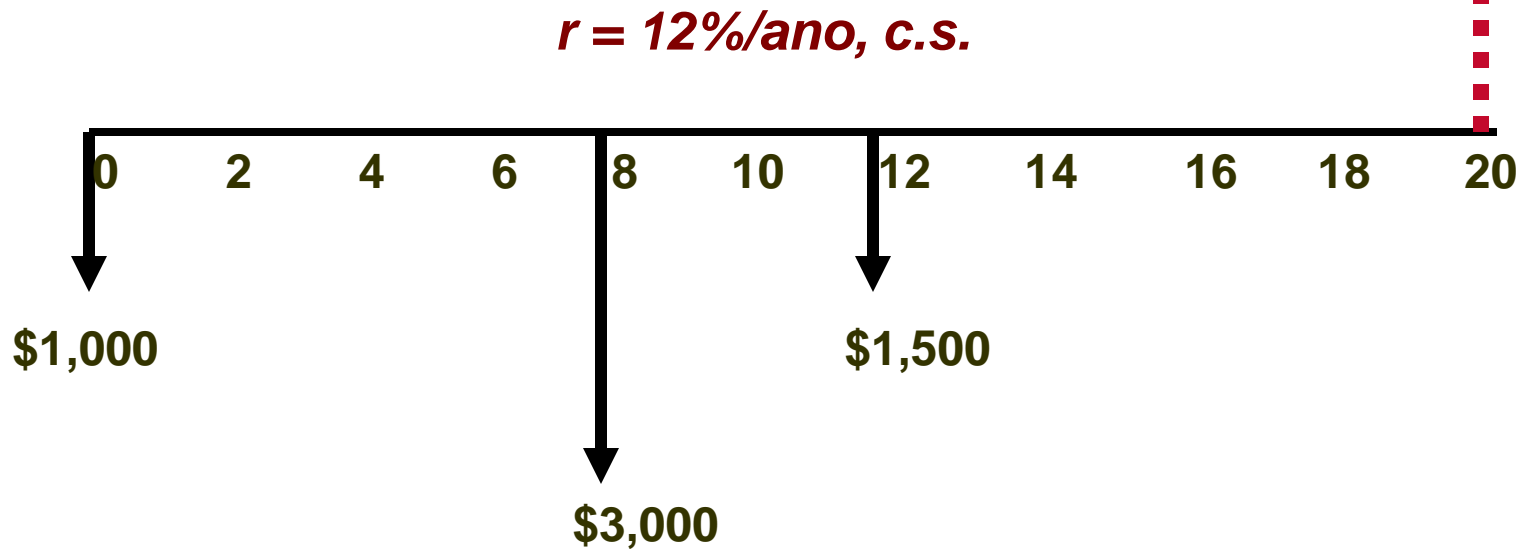
Método 1: utilizar PC semestral para expressar a taxa semestral efetiva de 6% durante o período de 6 meses

Método 1

56

Renumere a linha do tempo

$F_{10} = ?$

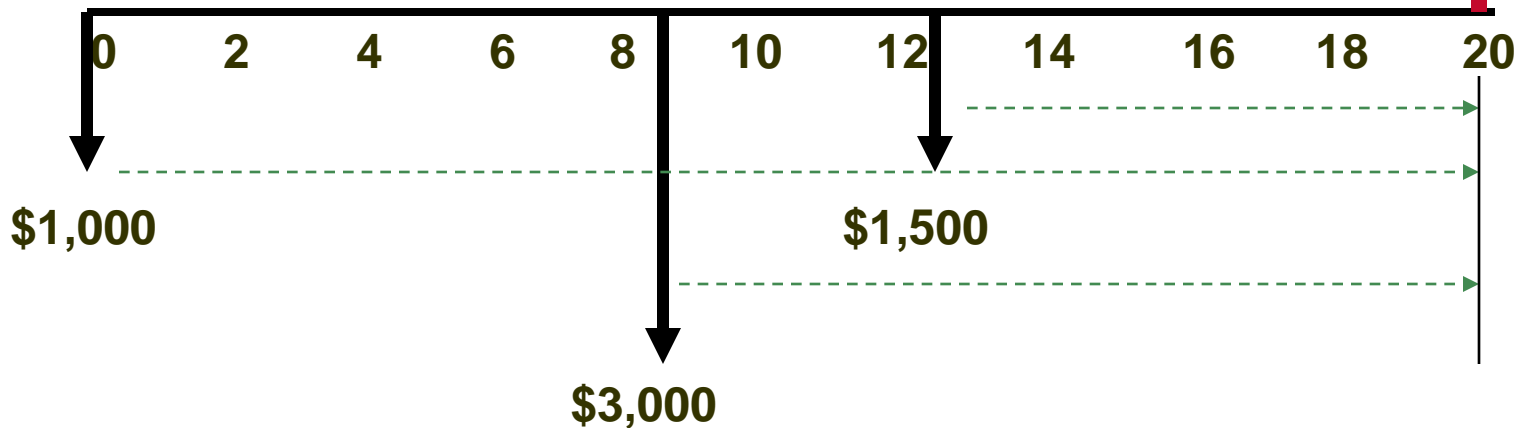


$i/6 \text{ meses} = 12\%/2 = 6\%/6 \text{ meses};$

$n = 6 \text{ meses}$

$F_{20} = ?$

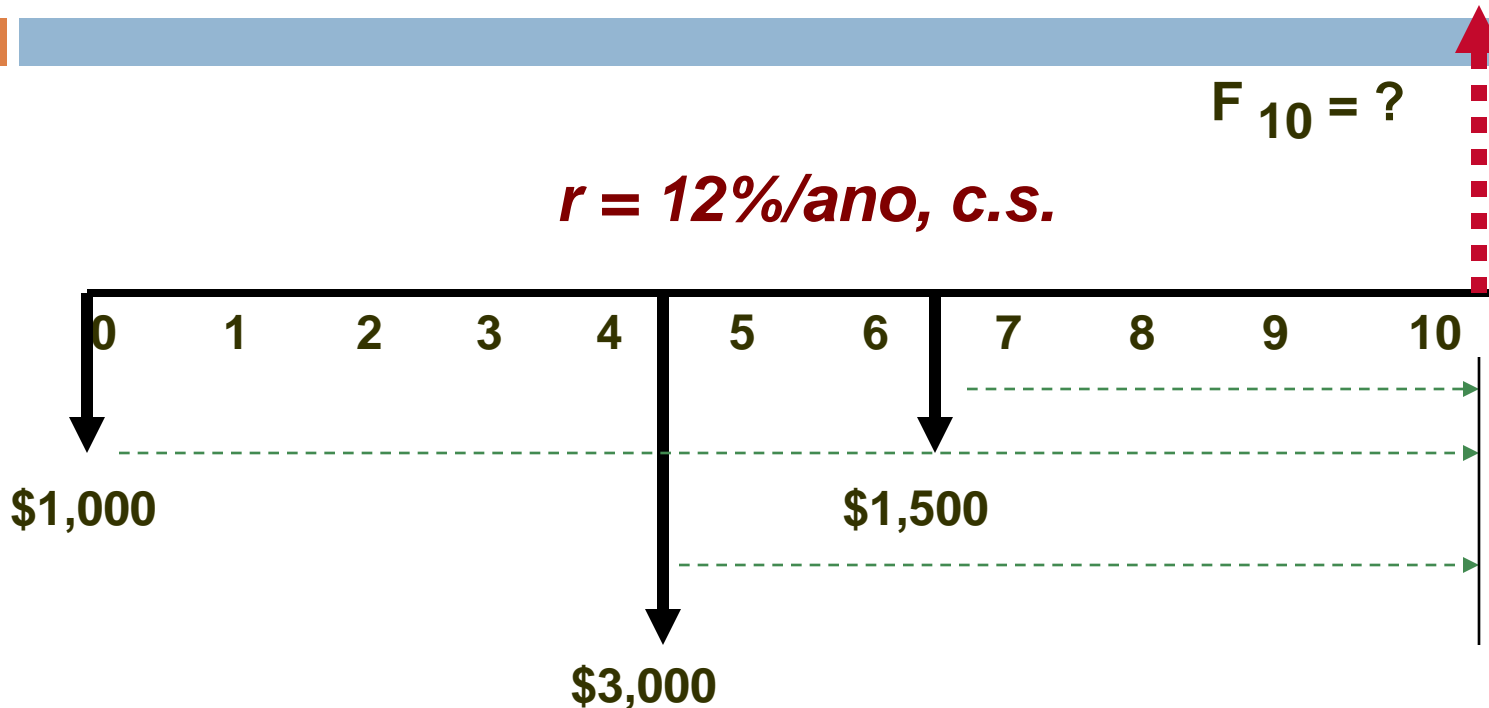
$r = 12\%/ano, c.s.a.$



$$F_{20} = \$1,000(F/P, 6\%, 20) + \$3,000(F/P, 6\%, 12) + \\ \$1,500(F/P, 6\%, 8) = \underline{\underline{\$11,634}}$$

Método 2

58



Se n é contado em anos, juros deve ser taxa anual

$$i_a = (1.06)^2 - 1 = 12.36\%$$

$$F_{20} = \$1,000(F/P, 12,36\%, 10) + \$3,000(F/P, 12,36\%, 6) + \\ \$1,500(F/P, 12,36\%, 4) = \underline{\underline{\$11,634}}$$

Séries com $PP \geq PC$

59

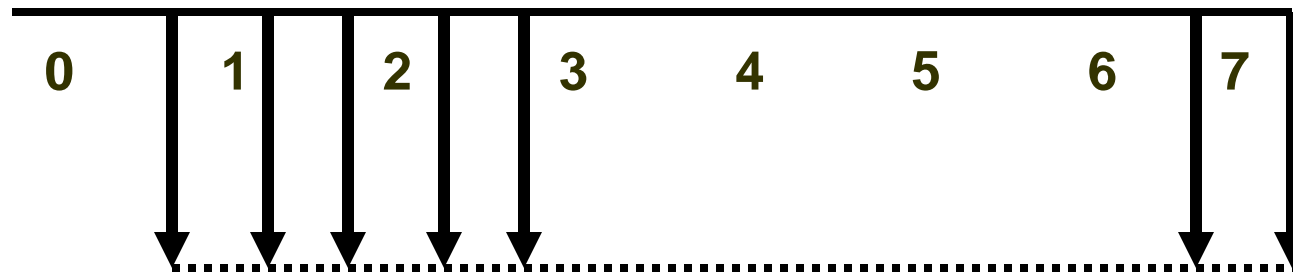
- Quando o fluxo de caixa envolve uma série (A, G ou g), PP é definido pela frequência do fluxo de caixa
- Calcular o i efetivo por período de pagamento
- Aplicar o n correto para o número total de períodos de pagamentos

Séries com $PP \geq PC$

$F_7 = ??$

60

$r = 20\%/ano$, capitalizado trimestralmente



$A = \$500$ cada 6 meses

$PP > PC$ já que $PP = 6$ meses e $PC =$ trimestre

Calcular i efetivo por PP de 6 meses

$i_{6 \text{ meses}}$ ajustar a taxa nominal (r) para o PP

Séries com $PP \geq PC$

61

- Ajustar a Taxa de Juros
 - $r = 20\%$ por ano, c.t.
 - $i/\text{trim.} = 0.20/4 = 0.05 = 5\%/\text{trim.}$
 - 2-trims em um período de 6 meses
- $i_{6\text{-meses}} = (1.05)^2 - 1 = \underline{10.25\%/6 \text{ meses.}}$
 - Agora a taxa de juros corresponde ao período de pagamento
- $F_{\text{ano } 7} = F_{\text{período } 14}$
 - $F = \$500(F/A, 10.25\%, 14) = \$500(28.4891) =$
\$14,244.50

Quantias Únicas e Séries com $PP < PC$

62

- E se $PP < PC$
- Questão é de Capitalização Interperíodo

Quantias Únicas e Séries com $PP < PC$

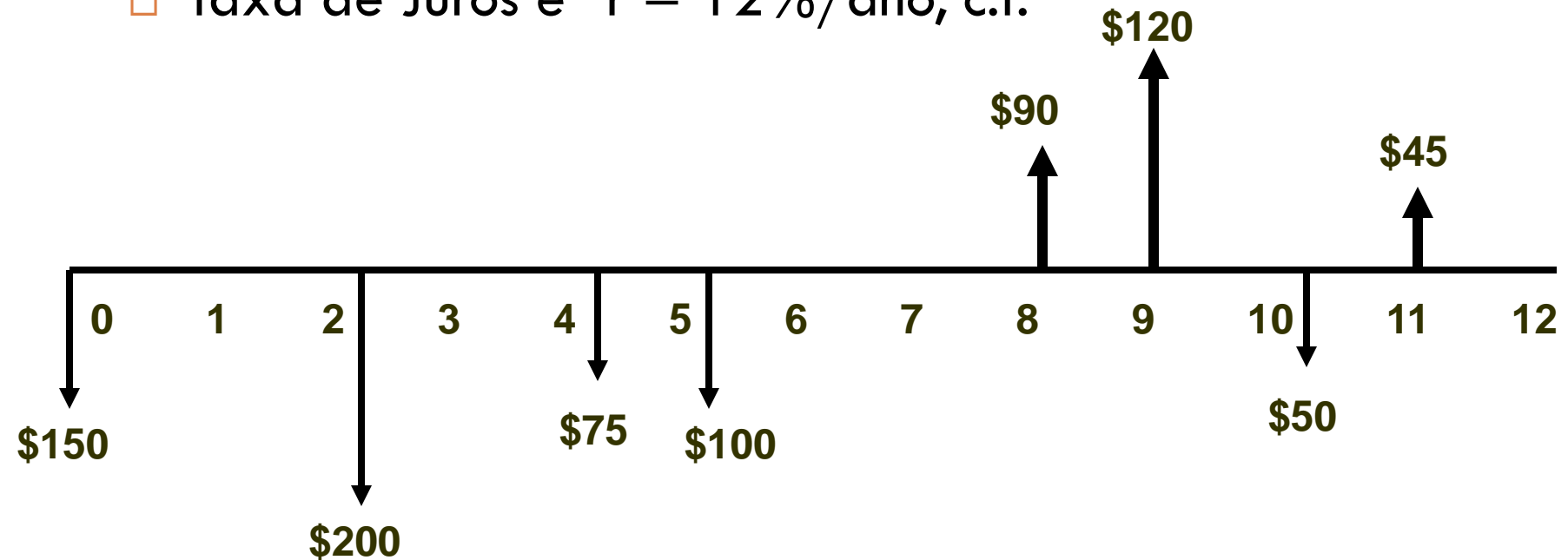
63

Um engenheiro responsável pela coordenação de um projeto na Alcoa Aluminium onde uma empresa contratada está instalando um novo equipamento de refino em uma mina. O engenheiro desenvolveu o fluxo de caixa (em unidades de \$ 1000) onde estão descritos os pagamentos que serão realizados para a empresa. Ele sabe que a taxa de juros é de 12% ao ano, capitalizados trimestralmente e que a Alcoa não se importa com a capitalização interperíodo dos juros. No final do ano o projeto estará no azul ou no vermelho?

Quantias Únicas e Séries com $PP < PC$

64

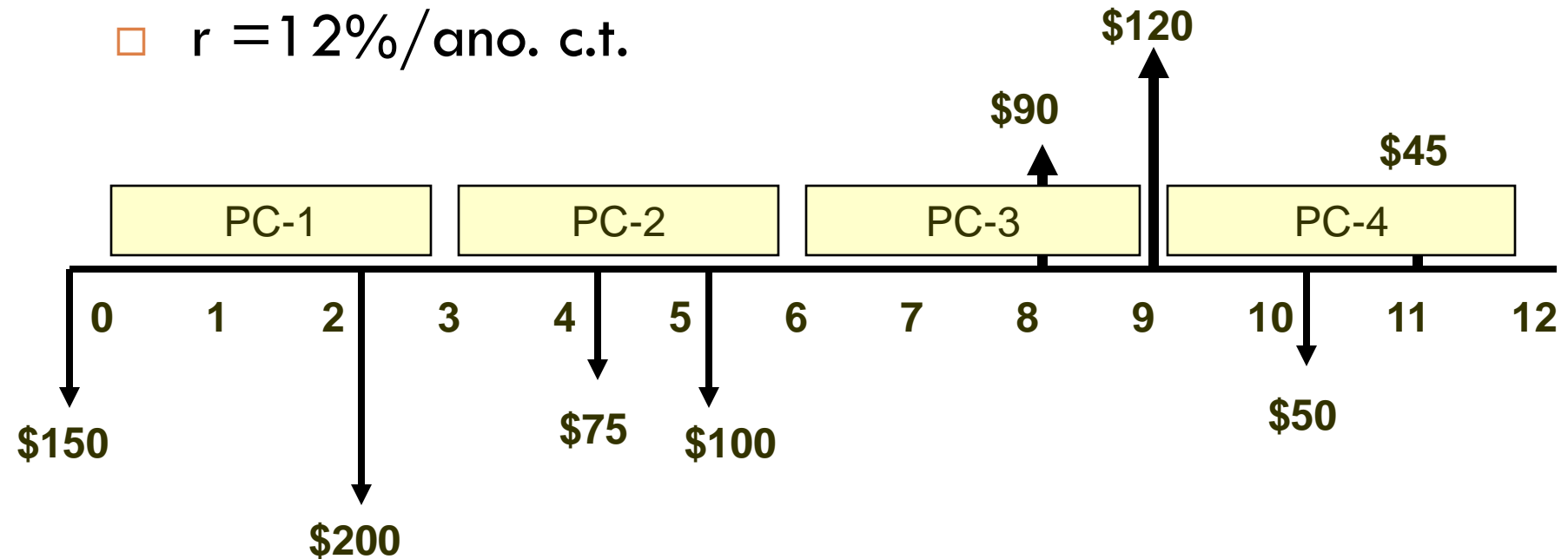
- Considere um fluxo de caixa de 1 ano.
- Pagamentos são feitos no final de um dado mês
- Taxa de Juros é “ $r = 12\%/ano, c.t.$ ”



Quantias Únicas e Séries com $PP < PC$

65

□ $r = 12\%/ano. c.t.$

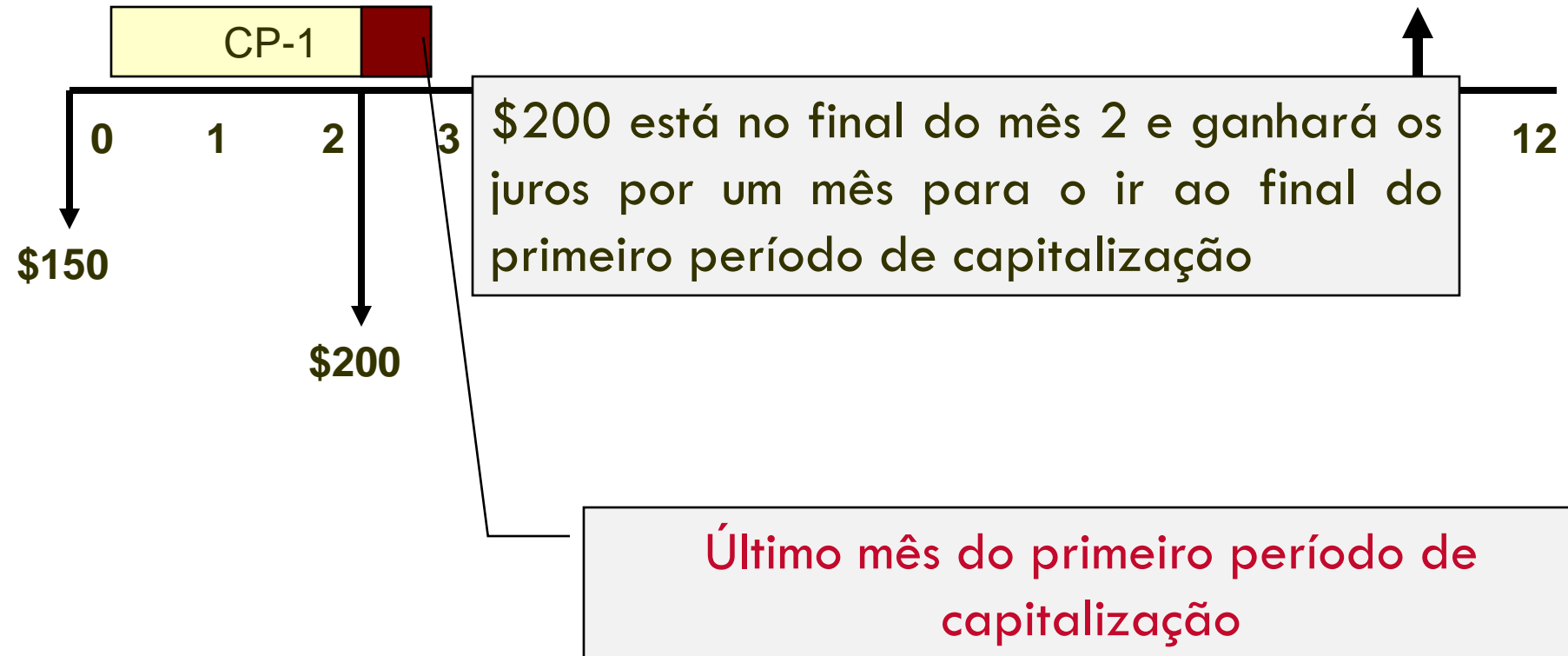


Observe onde caem alguns dos valores de fluxo de caixa em relação aos períodos de capitalização!

Considere o primeiro fluxo de caixa \$200

66

- Qual juros será devido/ganho sobre os \$200 já que os juros são capitalizados no final de cada período?



Interperíodo

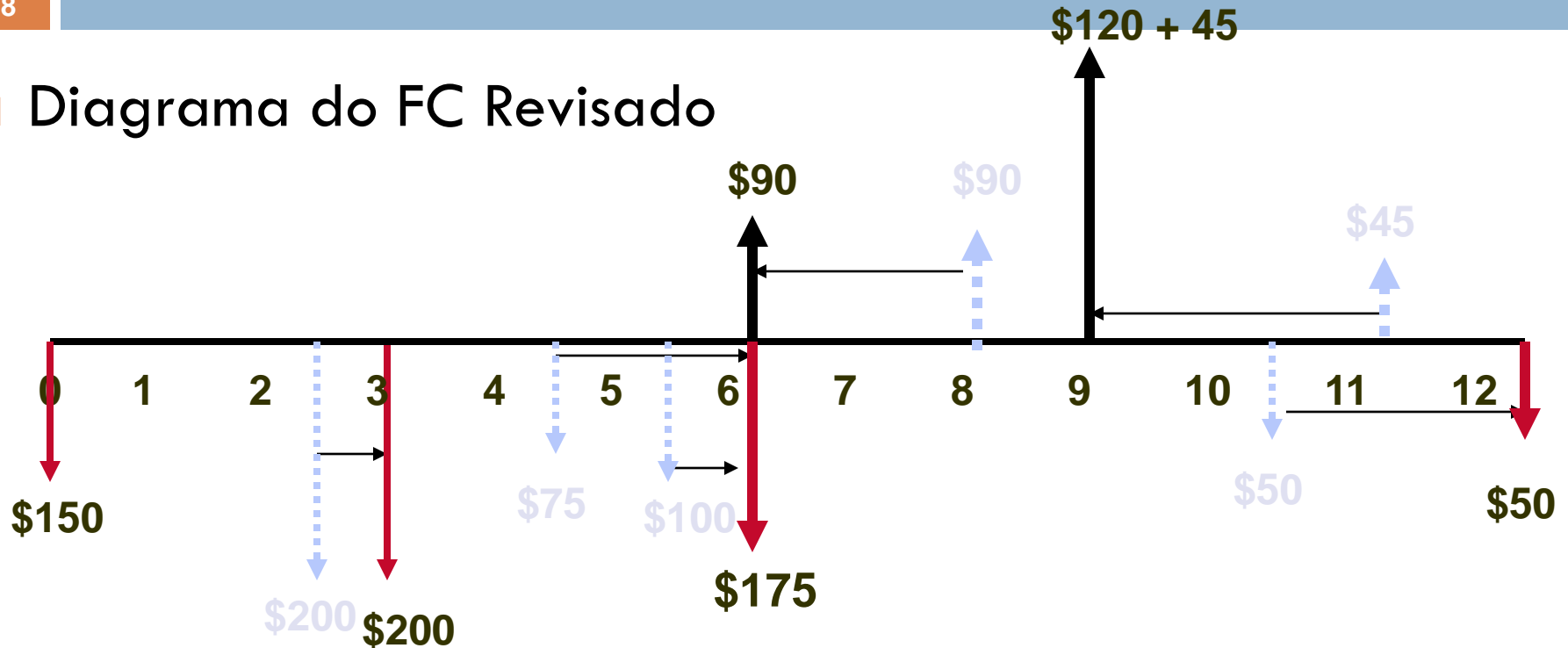
67

- \$200 ocorre 1 mês antes do fim do período de capitalização 1
- Serão ganhos/cobrados juros sobre os \$200 para 1 mês?
- Se não forem ganhos (ou cobrados) juros sobre os \$ 200, então é preciso revisar o diagrama de fluxo de caixa

Sem capitalização Interperíodo

68

□ Diagrama do FC Revisado

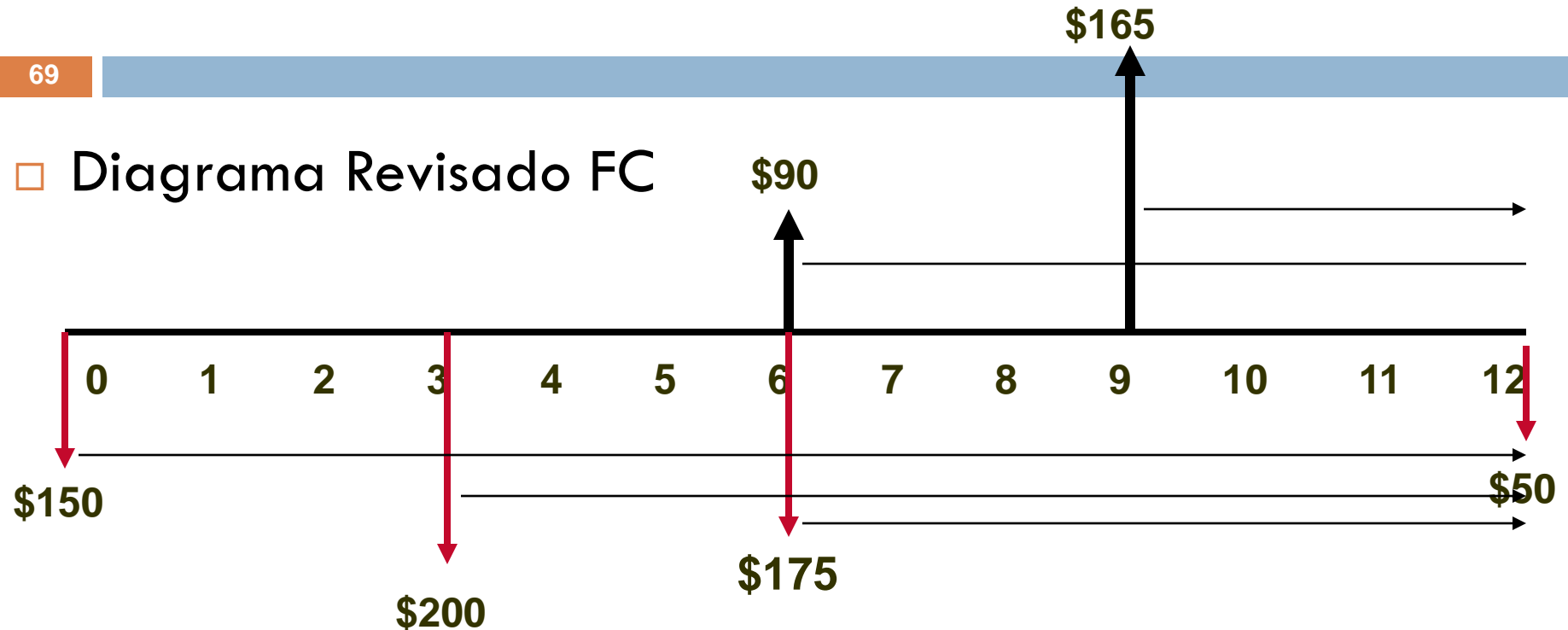


Todos os FC negativos são levados para o final de seus trimestres e todos os FC positivos são levados para o início de seus respectivos trimestres

Sem capitalização Interperíodo

69

□ Diagrama Revisado FC



Determine o valor futuro desta série revisada usando F/P para cada fluxo de caixa.

Sem capitalização interperíodo

70

- Com o FC revisado calcule o valor futuro

“r” = 12%/ano, capitalizado trimestralmente

“i” = $0.12/4 = 0.03 = \underline{3\% \text{ por trimestre}}$

$$F_{12} = [-150(F/P, 3\%, 4) - 200(F/P, 3\%, 3) + (-175+90)(F/P, 3\%, 2) + 165(F/P, 3\%, 1) - 50] = \underline{\$-357.59}$$

Capitalização Contínua

71

- Taxa Efetiva de Juros Anual = $i = (1 + r/m)^m - 1$
- O que acontece se frequência de capitalização m tende a infinito?
 - ▣ Tempo entre as capitalizações tende a “0”.
- Um valor limite de i tenderá para um dado valor de r

Taxa Efetiva de Juros com Capitalização Contínua

72

- Taxa Efetiva de Juros Anual

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Se m tende ao infinito...

Taxa Efetiva de Juros com Capitalização Contínua

73

□ Então:

$$i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{r}} \right]^r - 1 = e^r - 1.$$

Taxa Efetiva de Juros com Capitalização Contínua

74

$$\text{Taxa Efetiva de Juros} = e^r - 1$$

Onde “ r ” é a taxa nominal de juros com capitalização contínua

Para encontrar a Taxa Nominal Equivalente

$$r = \ln(1 + i)$$

Taxa Efetiva de Juros com Capitalização Contínua

75

- Considerando uma taxa de juros de 18% ao ano, capitalizada continuamente, calcule as taxas efetivas de juros mensais e anuais
 - ▣ $r = 18\%$, capitalização contínua = 18%, c.c.

$$r = 18\%/12 = 1,5\%; \quad e^{0.015} - 1 = 1,511\% / \text{mês}$$

$$e^{0.18} - 1 = 1.1972 - 1 = \underline{19.72\% / \text{ano}}$$

Taxa Efetiva de Juros com Capitalização Contínua

76

Um investidor exige um rendimento efetivo de, pelo menos, 15%. Qual a taxa nominal mínima aceitável para que haja capitalização contínua? R. $r\% = 13,976$

Exercício

77

Duas engenheiras investiram \$5000 durante 10 anos a 10% ao ano. Calcule o valor futuro para ambas, considerando que uma delas recebe uma capitalização anual e a outra uma capitalização contínua. R. \$12.969 e \$13.591

Concluindo...

- Para comparar diferentes taxas de juros sempre é necessário calcular a Taxa de Juros Efetiva Anual
- Somente Taxas de Juros Efetivas Anuais podem ser comparadas!
- Taxas Nominais não podem ser comparadas a menos que sejam convertidas para Taxa de Juros Efetiva Anual!

Taxas de Juros que variam ao longo do tempo

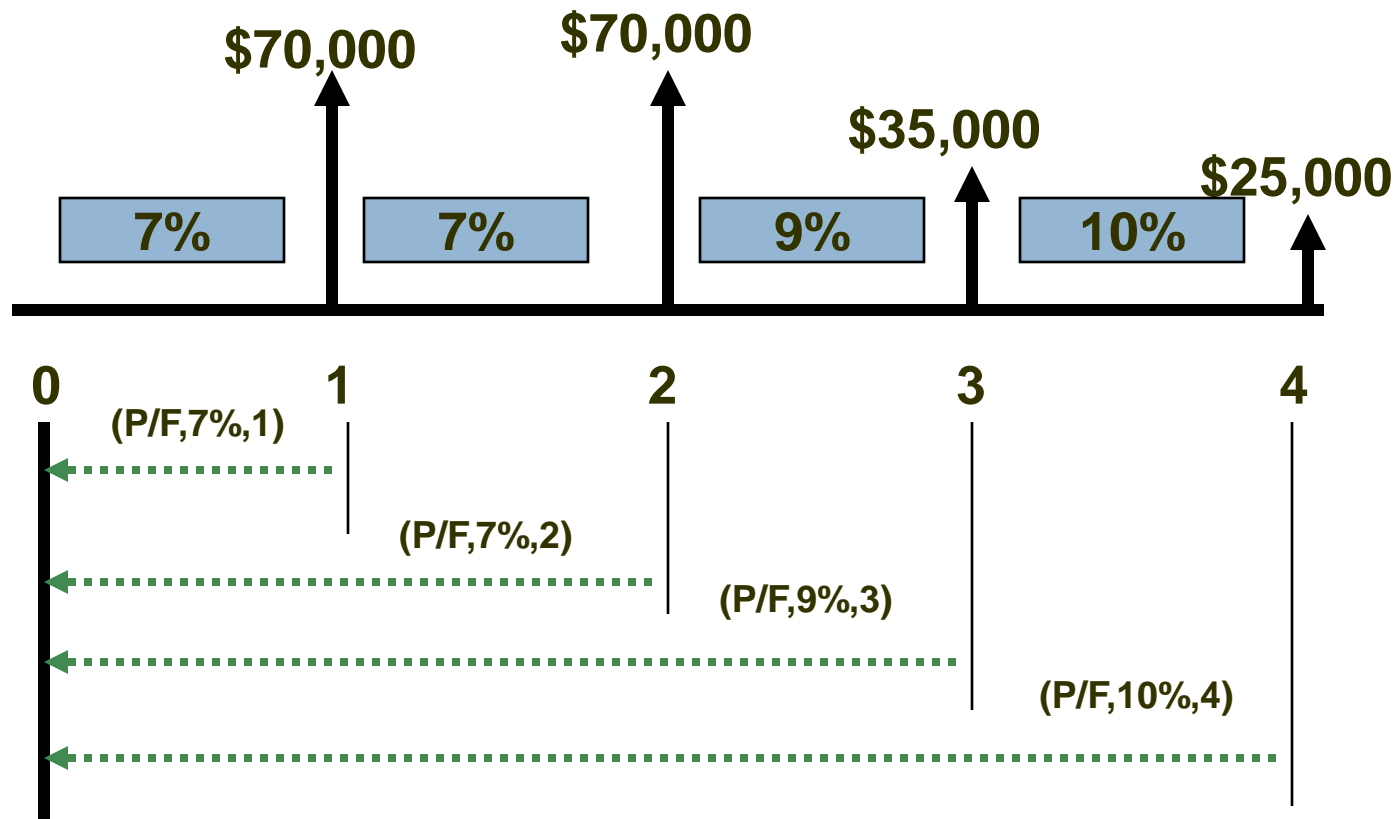
79

- E se as taxas de juros variam ao longo do tempo...
- Como calcular?

Taxas de Juros que variam ao longo do tempo

80

Assumir os VFs...



Taxas de Juros que variam ao longo do tempo

81

- Para Calcular o VP
 - ▣ Trazer cada valor do fluxo de caixa de volta para o ponto apropriado
- $P = F_1(P/F, i_1, 1) + F_2(P/F, i_1)(P/F, i_2) + \dots$
- $+ F_n(P/F, i_1)(P/F, i_2)(P/F, i_3) \dots (P/F, i_n, 1)$

Excel pode ser bem útil!

Exercício

82

A CE Inc. arrenda grandes equipamentos de escavação de túneis. O lucro líquido dos equipamentos durante cada um dos últimos 4 anos decresceu, conforme apresentado a seguir. Também são apresentadas as taxas anuais de rendimento do capital investido. O retorno aumentou. Determine o valor presente P e a série uniforme equivalente A da série de lucros líquidos. Considere a variação anual das taxas de retorno.

Ano	1	2	3	4
Lucro Líquido	\$ 70.000	\$ 70.000	\$ 35.000	\$ 25.000
Taxa Anual	7%	7%	9%	10%

Análise Período a Período

83

$$P_0 =$$

$$1. \$7000(P/F,7\%,1)$$

$$2. \$7000(P/F,7\%,1)(P/F,7\%,1)$$

$$3. \$35000(P/F,9\%,1)(P/F,7\%,1)^2$$

$$4. \$25000(P/F,10\%,1)(P/F,9\%,1)(P/F,7\%,1)^2$$

$$= \underline{\$172,816} \text{ no } t = 0 \dots$$

Taxas de Juros que variam ao longo do tempo

84

□ Fluxo de caixa:

\$10,000



Objetivo: Encontrar P_0 com taxas variáveis

Taxas Variáveis: Valor Futuro Único

85

□ Fluxo de caixa:

\$10,000



Objetivo: Encontrar P_0 com taxas variáveis

$$P_0 = \$10,000(P/F, 8\%, 1)(P/F, 9\%, 1)(P/F, 10\%, 1)(P/F, 11\%, 1)$$

$$= \$10,000(0.9259)(0.9174)(0.9091)(0.9009)$$

$$= \$10,000(0.6957) = \underline{\underline{\$6,957}}$$

Programa

1. Fundamentos da Engenharia Econômica
 - 1. Tempo, Juros e o Valor do Dinheiro**
 - 2. Combinação de Fatores**
 - 3. Taxas Nominais e Taxas Efetivas de Juros**
2. Ferramentas para Avaliar Alternativas
 1. Análise do Valor Presente
 2. Análise do Valor Anual
 3. Análise da Taxa de Retorno
 4. Análise Custo-Benefício
3. Tomada de Decisões
 1. Decisões sobre Substituição e Retenção
 2. Escolha de Projetos Independentes sob Limitação Orçamentária
 3. Análise do Ponto de Equilíbrio
4. Complementando o Estudo
 1. Efeitos da Inflação
 2. Estimativa dos Custos e Alocação dos Custos Indiretos
 3. Análise de Sensibilidade

Objetivos

87

- Taxas Nominais e Efetivas
- Taxa Anual Efetiva de Juros
- Taxa Efetiva de Juros
- Comparar Período de Pagamento (PP) e Período de Capitalização (PC)
- Quantias Únicas: $PP \geq PC$
- Séries: $PP \geq PC$
- Quantias Únicas e em Série: $PP < PC$
- Capitalização Contínua
- Taxas Variáveis