Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 24

Tensor Cisalhamento de Maxwell

Consideremos uma certa região do espaço com uma densidade ρ de cargas que se movem com velocidades arbitrárias $\vec{v}$, de forma que produzem campos elétricos $\vec{E}$ e magnéticos $\vec{B}$. A força de Lorentz sobre cada carga será dada por

$$\vec{f}_q = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Se a densidade de portadores de carga for n, ou seja, $\rho = nq$, a força por unidade de volume atuando sobre as cargas no meio será

$$\vec{f} = n\vec{f}_q = nq\vec{E} + nq\vec{v} \times \vec{B}$$

Mas $nq = \rho$ e $nq\vec{v} = \vec{j}$, a densidade de corrente, conforme já vimos; assim

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

Por enquanto, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são arbitrários; mas, como no problema da energia, temos que impor que sejam consistentes com as equações de Maxwell, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

e

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Substituindo na expressão para $\vec{f}$, temos

$$\vec{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \left[\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \times \vec{B}$$

Vamos ver como podemos escrever cada um desses termos de uma forma mais conveniente. Comecemos pelo último:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

onde usamos simplesmente a regra de diferenciação do produto. Por outro lado, pela lei de Faraday (terceira equação de Maxwell), temos

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E};$$

então

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

Substituindo este resultado na expressão para $\vec{f}$, temos

$$\vec{f} = \epsilon_0\left[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})\right] - \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})\right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B})$$

O produto vetorial dentro do primeiro colchete pode ser escrito de uma forma mais conveniente utilizando a identidade vetorial

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

Fazendo $\vec{A} = \vec{B} = \vec{E}$, temos

$$\nabla\left(\vec{E}^2\right) = 2\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) + 2(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$$

ou

$$\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla\left(\frac{E^2}{2}\right) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$$

Desta forma, a expressão para $\vec{f}$ fica

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}\right] - \nabla\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) - \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\right] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$

Por outro lado a expressão para $\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$ também se aplica para $\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})$,

$$\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla\left(\frac{B^2}{2}\right) - (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}$$

Então a expressão para $\vec{f}$ se torna

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}\right] - \nabla\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$

No segundo colchetes introduzimos o termo $(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}$ pra torná-lo da mesma forma que o primeiro colchetes para $\vec{E}$; como $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, isto não afeta $\vec{f}$.

Finalmente, esta expressão para $\vec{f}$ pode ser escrita de uma forma muito mais conveniente introduzindo a definição do <u>Tensor de Cisalhamento de Maxwell</u>

$$\boxed{T_{ij} = \epsilon_0\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right]}$$

onde

$$\begin{aligned} i &\rightarrow x,y,z \\ j &\rightarrow x,y,z \end{aligned} \qquad\qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

Em forma matricial, este tensor é escrito como

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{bmatrix} \epsilon_0(E_x^2 - \frac{E^2}{2}) + \frac{1}{\mu_0}(B_x^2 - \frac{B^2}{2}) & \epsilon_0 E_xE_y + \frac{B_xB_y}{\mu_0} & \epsilon_0 E_xE_z + \frac{B_xB_z}{\mu_0} \\ \epsilon_0 E_yE_x + \frac{B_yB_x}{\mu_0} & \epsilon_0(E_y^2 - \frac{E^2}{2}) + \frac{1}{\mu_0}(B_y^2 - \frac{B^2}{2}) & \epsilon_0 E_yE_z + \frac{B_yB_z}{\mu_0} \\ \epsilon_0 E_zE_x + \frac{B_zB_x}{\mu_0} & \epsilon_0 E_zE_y + \frac{B_zB_y}{\mu_0} & \epsilon_0(E_z^2 - \frac{E^2}{2}) + \frac{1}{\mu_0}(B_z^2 - \frac{B^2}{2}) \end{bmatrix}$$

Operamos no tensor como operamos com matrizes, ou seja,

$$\left(\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_j = \sum_i A_i T_{ij}; \qquad \left(\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A}\right)_i = \sum_j T_{ij} A_j,$$

ou seja, o produto escalar de um vetor por um tensor é outro vetor.

Calculando então $\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$, obtemos um vetor:

$$\left(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_j = \epsilon_0\left[(\nabla\cdot\vec{E})E_j + (\vec{E}\cdot\nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\cdot\vec{B})B_j + (\vec{B}\cdot\nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right]$$

e a expressão para a densidade de força fica simplesmente

$$\boxed{\vec{f} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}}$$

onde $\vec{S}$ é o vetor de Poynting;

Conservação de Momento

Se considerarmos todas as cargas dentro de um volume V, a força total atuando sobre elas será

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}d\tau = \int_V \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}d\tau - \epsilon_0\mu_0\int_V\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}d\tau$$

O teorema da divergência pode ser utilizado para reduzir a primeira integral a uma integral de fluxo. No entanto, aqui é necessário um pouco de cuidado; como $\overleftrightarrow{T}$ é um tensor, é necessário preservar a ordem do produto escalar do operador divergência (o livro texto é descuidado neste ponto). Assim,

$$\vec{F} = \oint_S d\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T} - \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_V \vec{S}d\tau,$$

onde S é a superfície que encerra o volume V.

A força total atuando sobre o volume é igual a variação de momento (mecânico) de todas as cargas no volume, ou seja,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} = \oint_S d\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T} - \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_V \vec{S}d\tau$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_{mec} + \epsilon_0\mu_0 \int_V \vec{S} d\tau\right] = \oint_S d\vec{A} \cdot \overleftrightarrow{T}$$

O primeiro termo no lado direito da equação é o momento total mecânico das cargas dentro do volume. Portanto, o segundo termo também tem dimensão de momento e só depende dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$). Esse termo é então interpretado como o momento associado ao campo eletromagnético, ou seja, a densidade de momento linear associada ao campo eletromagnético é dada por

$$\vec{p}_{em} = \mu_0\epsilon_0\vec{S}$$

Com essa interpretação, o lado esquerdo da equação fornece então a taxa de variação temporal do momento total, mecânico mais eletromagnético, dentro do volume V. Se esta variação é positiva, então momento tem que estar sendo transmitido para dentro do volume através de sua superfície S. Esta transferência é dada pelo lado esquerdo da equação. Assim, temos a que a densidade de momento eletromagnético, ou seja, momento eletromagnético transferido por unidade de superfície é dado por $-\overleftrightarrow{T}$. O sinal negativo aparece porque $d\vec{A}$ aponta para fora da superfície.