Eletromagnetismo I

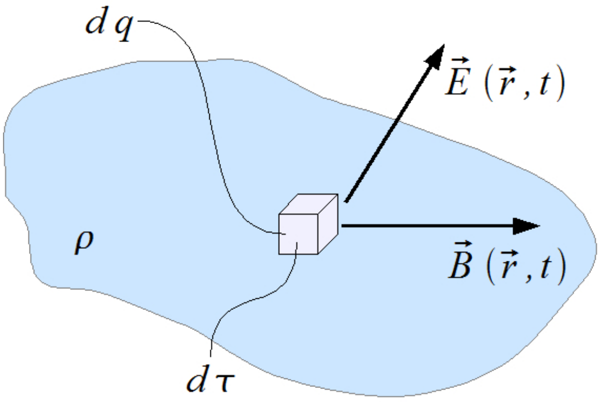
Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 23

Teorema de Conservação de Energia Eletromagnética ou Teorema de Poynting

(Também em Reitz, Milford and Christy, seção 16-3)



Suponhamos que tenhamos um conjunto de cargas e correntes no vácuo, representadas pela densidade volumétrica de carga ρ e densidade superficial de corrente $\vec{j}$. Estas cargas e correntes criam campos elétricos e magnéticos que vão atuar sobre as próprias fontes, de forma que, em geral, tanto ρ como $\vec{j}$ podem variar tanto espacialmente como temporalmente, isto é, $\rho(\vec{r},t)$ e $\vec{j}(\vec{r},t)$. A variação das cargas e correntes exige que trabalho seja feito, ou energia gasta; portanto é importante determinar como varia, de forma auto-consistente, a energia do sistema de cargas, correntes e o campo eletromagnético por elas produzido.

A força atuante sobre cada elemento de carga dq, dentro do volume considerado, é dada por

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Então, a potência instantânea gasta pelo campo eletromagnético para mover este elemento de carga, como velocidade $\vec{v}$, é

$$dP = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = dq\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Mas $dq = \rho d\tau$, onde $d\tau$ é o elemento de volume (usamos τ para não confundir com velocidade), de forma que

$$dP = \vec{E} \cdot (\rho\vec{v})d\tau = \vec{E} \cdot \vec{j}d\tau$$

onde usamos a expressão para a densidade de corrente $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Finamente, a potência total sobre o volume considerando, ou variação temporal da energia total do sistema, é dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{j})d\tau$$

> Pergunta: Porque neste cálculo não foi necessário calcular a força magnética sobre os elementos de corrente?

Até agora, consideramos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ como dados; mas, pelas equações de Maxwell, sabemos que eles estão relacionados com os próprias fontes ρ e $\vec{j}$. Da quarta Equação de Maxwell, temos

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

ou

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})\right] - \epsilon_0\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

onde utilizamos a identidade vetorial $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$ no primeiro termo do lado direito da equação. Pela terceira Equação de Maxell temos que $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, de forma que a relação acima fica

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

ou

$$\vec{E}\cdot\vec{j} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

Substituindo este resultado na expressão para P, obtemos

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\int_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})d\tau$$

O último termo da equação pode ser convertido numa integral de superfície através do Teorema de Gauss; então obtemos

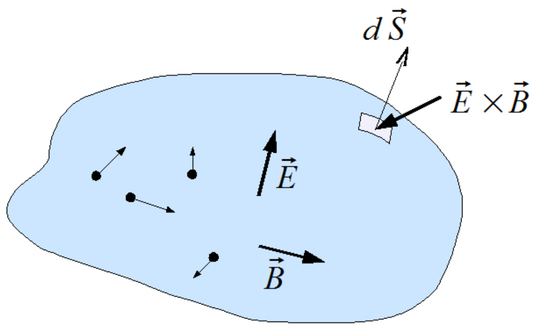
$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau = -\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint_S (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}$$

ou

$$\boxed{\int_V \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau + \frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau = -\frac{1}{\mu_0}\oint_S (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}}$$

Vamos agora interpretar cada termo da equação. O primeiro representa a energia gasta para fazer as cargas se moverem dentro do volume, ou seja, a energia gasta por efeito Joule. Para ver isto, basta lembrar que a colisão entre as cargas pode ser representada por uma resistividade η, de forma que $\vec{E} = \eta\vec{j}$. Assim $\vec{E}\cdot\vec{j} = \eta j^2$, que corresponde a energia gasta por efeito Joule (RI^2) por unidade de volume. Lembrando que $\epsilon_0 E^2/2$ é a densidade de energia armazenada no campo elétrico e $B^2/2\mu_0$ é a densidade de energia armazenada no campo magnético, temos que o segundo termo da equação acima representa a variação temporal da energia armazenada nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dentro do volume. Se a derivada temporal for positiva a energia está aumentando e, se for negativa, a energia está diminuindo.

Como a energia tem que ser conservada, se houver dissipação de energia dentro do volume, por efeito Joule, e a energia armazenada nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estiver aumentando, necessariamente tem que haver um fluxo de energia para dentro do volume. Isto é representado pela integral



$$-\frac{1}{\mu_0}\oint_S (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\oint_S (\vec{E}\times\vec{B})\cdot(-d\vec{S})$$

Portanto o vetor $\vec{E} \times (\vec{B}/\mu_0) = \vec{E} \times \vec{H}$ representa a densidade de fluxo de energia associada ao campo eletromagnético, ou seja, energia transportada pelo campo eletromagnético por unidade de área e por unidade de tempo. Esta grandeza é representada pela grandeza vetorial $\vec{S}$, definida como

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$$

que é denominada Vetor de Poynting.

O teorema de Poynting, portanto, equivale ao teorema da conservação de energia para o campo eletromagnético. Ele também pode ser expresso numa forma local. Para isso, retornaremos às integrais de volume, antes de termos aplicado o teorema de Gauss:

$$\int \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau = -\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) d\tau - \int \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau$$

ou

$$\int_V \left[\vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) d\tau + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\right] d\tau = 0$$

Como o volume V é arbitrário, o integrando tem que se anular, ou seja,

$$\vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

O produto $\vec{E} \cdot \vec{j}$ corresponde à variação temporal da densidade de energia mecânica do sistema, w_{mec}, e a soma das densidades de energia nos campos elétrico e magnético pode ser escrita como w_{em}, ou seja, a densidade de energia do campo eletromagnético. Assim, a expressão da conservação de energia, na forma pontual fica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[w_{mec} + w_{em}\right] + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

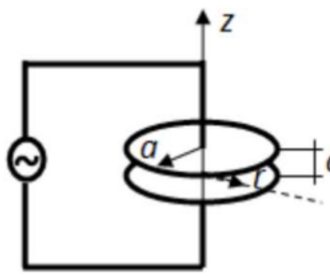
que é a equação da continuidade para a energia do campo eletromagnético.

Nota Importante: Esta expressão que obtemos para a conservação de energia eletromagnética, tanto na forma integral como na forma local, só é válida no vácuo. A expressão da conservação de energia num meio material é mais complicada porque as constantes ϵ e μ na verdade não são constantes! Em geral, elas podem variar com a frequência do campo eletromagnético no meio e esta variação tem que ser considerada na conservação de energia. Após discutirmos a questão de absorção e ressonância de ondas eletromagnéticas em meios materiais retornaremos a esta questão.

Exercício:

Q2. Um capacitor de placas planas paralelas é formado por dois discos circulares de raio a, separados entre si de uma distância $d \ll a$, no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador de corrente alternada de frequência ω, que produz uma carga uniforme na placa do capacitor, dada por $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$. São desprezados efeitos de borda. Supondo baixas frequências, de forma que $\omega a/c \ll 1$ (onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é a velocidade da luz), o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas pode ser considerado uniforme. Considere um sistema de coordenadas cilíndricas, (r,θ,z), com eixo z passando pelo centro das placas, conforme indicado na figura.

(a) Calcule a expressão para o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas.
(b) Calcule o campo magnético $\vec{B}$, em função do raio r, na região entre as placas do capacitor.
(c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$.
(d) Usando a aproximação de baixas frequências, mostre que é satisfeita a conservação de energia, expressa pela condição $\nabla \cdot \vec{S} + \partial u/\partial t = 0$, onde $u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu_0)$ é a densidade de energia contida no campo eletromagnético.



Conservação de Momento

Como já foi visto, de uma forma introdutória, nos cursos de Física Básica, o campo eletromagnético transporta momento. Agora vamos ver, de uma maneira mais formal, como fica a conservação de momento na presença de campos eletromagnéticos. Para isto, vamos precisar antes discutir o Tensor de Cisalhamento de Maxwell e seria interessante, antes de mergulhar na álgebra, entender como surge em Física o conceito de tensor e para que ele é útil.

Força de Fricção, Gradientes de Temperatura e Forças Térmicas

Suponhamos que num meio gasoso ionizado (plasma), como na descarga de uma lâmpada fluorescente, tenhamos uma grande quantidade de elétrons. Ao aplicarmos um campo elétrico no meio os elétrons serão acelerados. No entanto, devido a colisões com os íons do meio, eles acabam perdendo momento de forma que, em regime estacionário, a força de aceleração acaba se equilibrando com a de fricção. Se a frequência de colisão entre elétrons e íons for ν, em regime estacionário a força devido ao campo elétrico tem que se igualar à taxa de momento perdido por colisão, ou seja,

$$eE = m\upsilon\nu$$

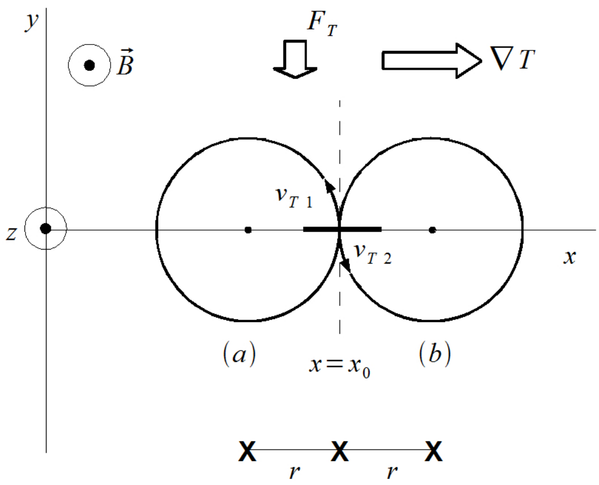
onde υ é a velocidade dos elétrons. Se a densidade de elétrons no meio for n (número de elétrons por unidade de volume), a força por unidade de volume no meio será

$$enE = mn\upsilon\nu$$

Exercício: Deste resultado, demonstre que a resistividade ρ do meio, definida por $j = E/\rho$, é dada por

$$\rho = \frac{ne^2}{m\nu}$$

Suponhamos agora que estes elétrons estejam confinados num campo magnético, na direção z, e que haja um gradiente de temperatura na direção x, ou seja, a temperatura eletrônica cresce na direção x. Na presença do campo magnético, os elétrons executam um movimento circular, com raio de giração dado por



$$r = \frac{\upsilon_e}{\omega_c},$$

onde ω_c é a frequência ciclotrônica, $\omega_c = |e|B/m$. O raio de giração característico pode ser calculado, num sistema em equilíbrio térmico, como a velocidade térmica dos elétrons

$$v_e = v_{Te} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

onde “k” é a constante de Boltzmann e T a temperatura eletrônica. Consideremos agora duas órbitas ciclotrônicas dos dois lados do ponto $x = x_0$, onde vamos estimar a força de colisão dos elétrons com os íons do meio. Os elétrons da direta (órbita b) se chocam com os íons transferindo momento no sentido negativo do eixo y. Já os da esquerda (órbita a) transferem momento no sentido oposto. No entanto, como os elétrons da direita vêm de uma região de maior temperatura, eles possuem maior velocidade térmica que os da esquerda, de forma que as trocas de momento para baixo e para cima não se equilibram. Na média, os íons sentem uma força resultante para baixo dada por

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m(v_b - v_a)\nu,$$

onde ν, outra vez, é a frequência de colisão. Então a força média para baixo, por unidade de volume, é

$$R = nm\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\nu n(v_b - v_a)$$

Mas

$$\Delta v = v_b - v_a = \sqrt{\frac{2kT_b}{m}} - \sqrt{\frac{2kT_a}{m}} \approx \sqrt{\frac{m}{2}}\left[\frac{d}{dx}\sqrt{kT}\right]_{x_0} \cdot \Delta r,$$

onde substituímos a diferença pequena pelo diferencial. Então

$$\Delta v \approx \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{2\sqrt{kT}}\left[\frac{d}{dx}(kT)\right]_{x_0}\Delta r$$

Por outro lado, Δr é da ordem do próprio raio ciclotrônico, ou seja,

$$\Delta r \approx \frac{v_0}{\omega_c}$$

onde v_0 é a velocidade térmica calculado em $x = x_0$. Então, retirando o índice x_0, temos

$$R \approx m\nu n\frac{1}{\sqrt{2mkT}}\frac{\nu}{\omega_c}\left[\frac{d}{dx}(kT)\right]$$

ou

$$R_T = n\frac{\nu}{\omega_c}\left[\frac{d}{dx}(kT)\right]$$

O índice T na força representa que é uma força devido ao gradiente de pressão; na realidade ela é denominada densidade de força térmica. É interessante ver que ela aponta na direção perpendicular ao gradiente de temperatura, ou seja,

$$\vec{R} \perp \nabla T$$

Em situações desse tipo é que aparece o conceito de tensor; a variação de uma grandeza numa dada direção provoca um efeito na direção perpendicular!

Exercício: Mostre que

$$\vec{R} = -n\frac{\nu}{\omega_c}\frac{\vec{B}}{B} \times \nabla(kT)$$