Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 22

Indutância Mútua

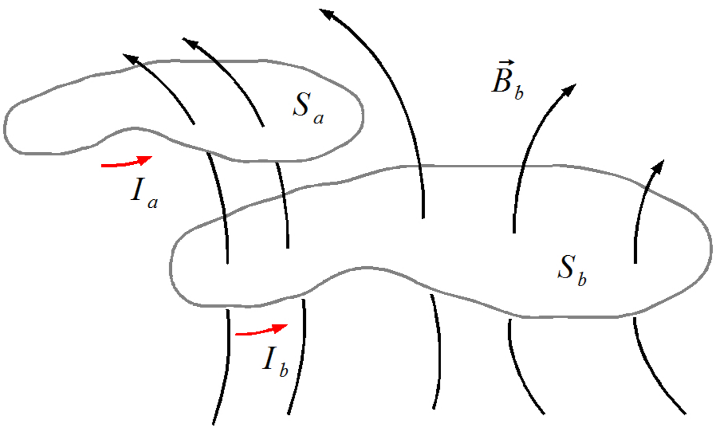
Na aula passada derivamos a expressão para a energia magnética,

$$W_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

e mostramos como a definição de indutância de um circuito pode ser expressa em termos da energia magnética armazenada no indutor

$$L = \frac{1}{I^2} \int \frac{B^2}{\mu_0} d\tau$$

onde I é a corrente que circula no indutor.



Existem várias situações de interesse, das quais circuitos com transformador é a mais conhecida, em que a corrente em um circuito induz uma força eletromotriz em outro. Essa indução é caracterizada pela "Indutância Mútua" (Griffths, seção 7.2.3) definida como

$$M_{ba} = \frac{\phi_{ab}}{I_a}; \qquad M_{ba} = \frac{\phi_a}{I_b}$$

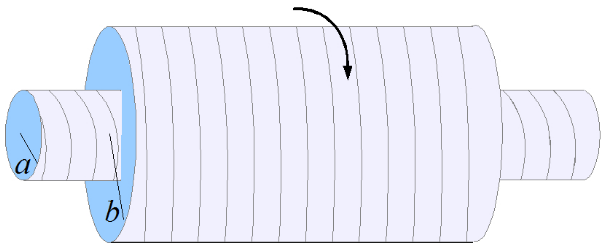
onde ϕ_{ab} é o fluxo através da área do circuito b devido ao campo magnético produzido pela corrente que circula no circuito a.

Da mesma forma, ϕ_{ab} é o fluxo através da área do circuito a devido ao campo magnético produzido pela corrente que circula no circuito b.

A indutância mútua é um parâmetro apenas geométrico, como a indutância própria, e no livro texto é derivada a Fórmula de Neumann para a indutância mútua (isto será visto na série de exercícios), da qual se obtém que

$$M_{ab} = M_{ba} = M$$

Ex: Consideremos dois solenoides longos concêntricos, de raios a e b, $b > a$, como mostrado na figura, tendo o primeiro solenoide n_a espiras por unidade de comprimento e o segundo n_b. Calcular a indutância mútua, por unidade de comprimento, entre os dois solenoides. Calcular também a relação entre a indutância mútua e as indutâncias próprias, por unidade de comprimento, dos dois solenoides.



Como os dois solenoides são considerados longos, podemos utilizar a expressão do campo magnético de um solenoide longo, que já calculamos

$$\vec{B} = \mu_0 n i \hat{e}_z$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento. Como o campo é constante, o fluxo através de qualquer espira é:

$$\phi = \mu_0 n i A$$

onde A é a área atravessada pelo campo.

Calculemos primeiro $M_{ba} = \phi_{ba}/I_a$. Neste caso, como o campo produzido pelo solenoide interno é nulo fora do solenoide, temos

$$\phi_{ba} = \mu_0 n_a I_A \pi a^2 \times (n_b \ell),$$

onde $n_b \ell$ é o número de espiras atravessadas em um comprimento ℓ. Então,

$$M_{ba} = \frac{\mu_0 n_a n_b \pi a^2 I_a}{I_a} \ell \qquad \therefore \boxed{\frac{M_{ba}}{\ell} = \mu_0 n_a n_b \pi a^2}$$

Calculemos agora $M_{ab} = \phi_{ab}/I_b$. O campo produzido pelo solenoide externo é constante para $r < b$. Mas só a área πa^2 do solenoide interno é atravessado por este fluxo, então

$$\phi_{ab} = \mu_0 n_b n_a (\pi a^2) \times (n_a \ell)$$

onde, outra vez, $n_a \ell$ é o número de espiras atravessadas em um comprimento ℓ. Então,

$$M_{ab} = \mu_0 n_b n_a \pi a^2 \ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{M_{ba}}{\ell} = \mu_0 n_a n_b \pi a^2 = \frac{M_{ab}}{\ell}}$$

Por outro lado, as indutâncias próprias são

$$L_a = \frac{\mu_0 n_a I_a \pi a^2 \times (n_a \ell)}{I_a} \qquad \therefore \frac{L_a}{\ell} = \mu_0 n_a^2 \pi a^2$$

e

$$L_b = \frac{\mu_0 n_b I_b \pi b^2 \times (n_b \ell)}{I_b} \qquad \therefore \frac{L_b}{\ell} = \mu_0 n_b^2 \pi b^2$$

Elevando ao quadrado a expressão para M $(= M_{ab} = M_{ba})$, temos

$$M^2 = \mu_0^2 n_a^2 n_b^2 (\pi a^2)(\pi b^2) \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} L_a L_b$$

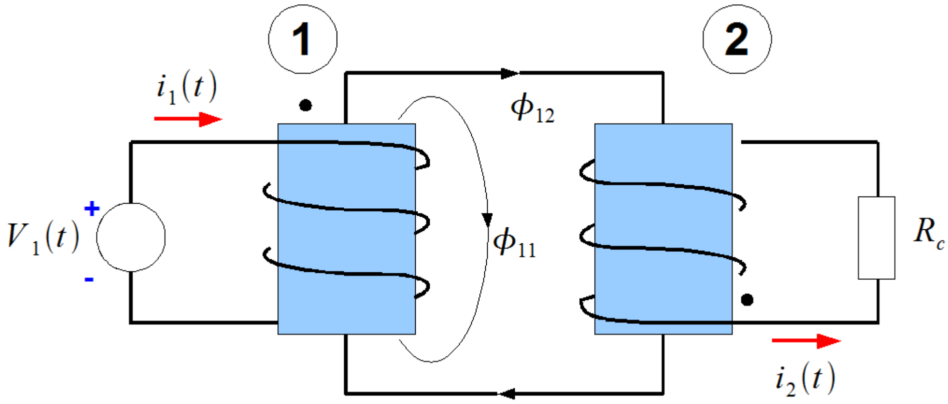
Portanto

$$M = k\sqrt{L_a L_b}; \qquad k = \frac{a}{b} < 1$$

Este resultado é geral, a indutância mútua entre dois circuitos é dada por $M = \sqrt{L_a L_b}$, onde $0 \leq k \leq 1$ é o Coeficiente de Acoplamento.

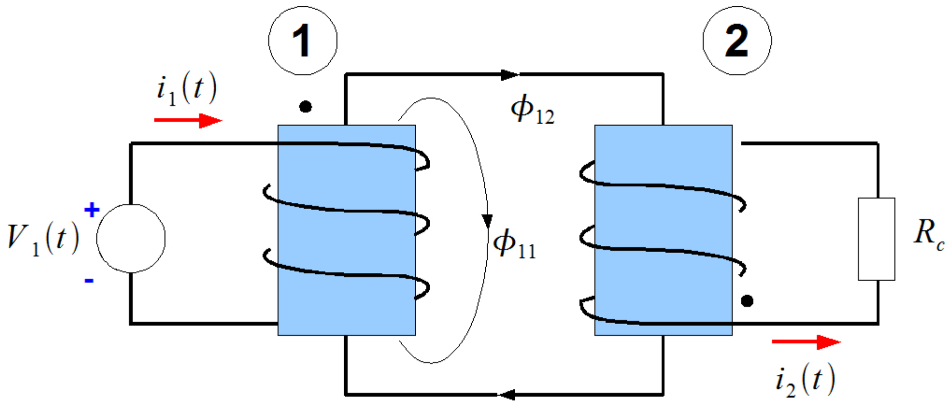
Energia em Circuitos Acoplados

Quando temos dois circuitos acoplados a polaridade induzida no chamado circuito secundário devido à variação da corrente no circuito primário depende do sentido entre os enrolamentos dos dois circuitos. Consideremos primeiro o exemplo esquematizado abaixo

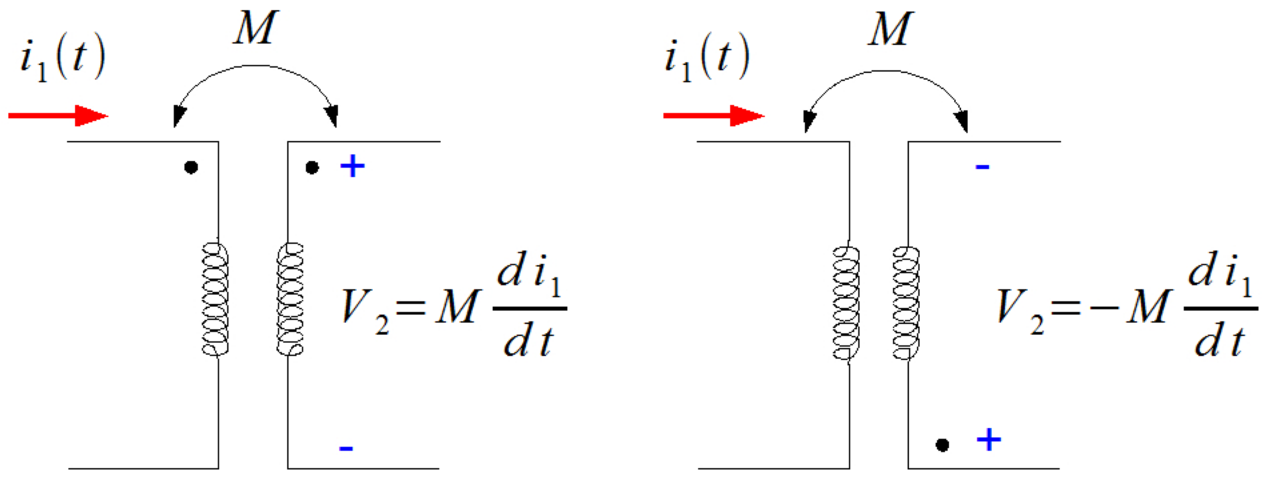


Se a corrente aumenta no circuito ①, o fluxo ϕ_{12} aumenta e a corrente no circuito ② tem que sair do terminal marcado com o ponto, para que o fluxo por ele produzido se oponha ao aumento de fluxo no secundário.

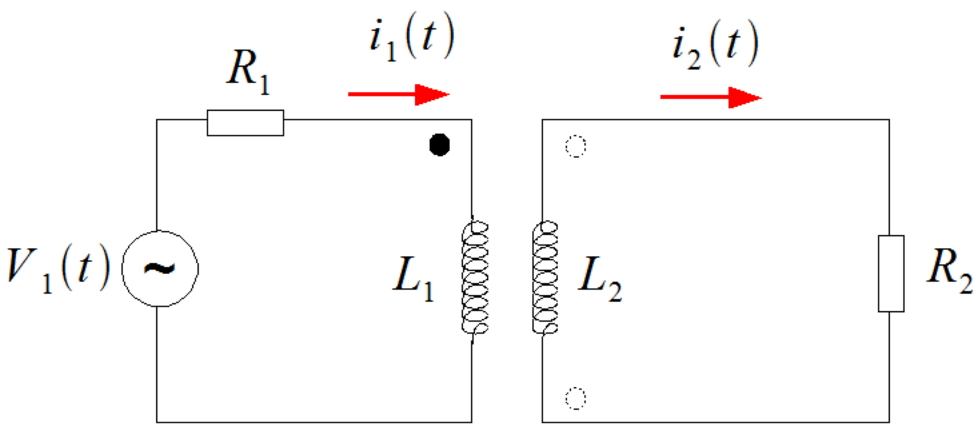
Se enrolamento no circuito secundário for como indicado a seguir, a corrente secundária tem sentido oposto, como também indicado pelo ponto



Como num esquema de circuitos fica difícil especificar o sentido dos enrolamentos, se utiliza a convenção de pontos indicada a seguir. Considerando a corrente no primário entrando pelo terminal marcado pelo ponto, a tensão induzida no secundário é positiva no terminal marcado com o ponto



Então, quando escrevermos as equações de circuito para dois circuitos acoplados, a tensão devido ao acoplamento pode ser positiva ou negativa. Por exemplo, consideremos o circuito simples a seguir



Dependendo da posição do ponto no circuito secundário, a tensão induzida pode ser positiva oi negativa, de modo que as equações de circuito ficam

$$V_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

Multiplicando a primeira equação por i_1, a segunda por i_2, somando as duas, temos

$$V_1 i_1 = \frac{d}{dt}\left(R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2\right) + \frac{d}{dt}\left(L_1 \frac{i_1^2}{2} + L_2 \frac{i_2^2}{2}\right) \pm \frac{d}{dt}(M i_1 i_2)$$

$V_1 i_1$ é a potência total fornecida pela fonte, $R_1 i_1^2$ e $R_2 i_2^2$ os potenciais dissipados por efeito Joule nos resistores R_1 e R_2, respectivamente, $L_1 i_1^2/2$ e $L_2 i_2^2/2$ as energias magnéticas armazenadas nos indutores L_1 e L_2, respectivamente, e $M i_1 i_2$ a energia magnética armazenada no circuito de acoplamento.

Equações de Maxwell na Matéria

Para concluir a matéria no Capítulo 7, vamos discutir as equações de Maxwell no meio material. Em qualquer meio, as equações de Maxwell são dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

onde ρ e $\vec{j}$ tem que ser todas as densidades de carga e as densidades de corrente no meio, respectivamente. No vácuo podem existir apenas as cargas livres e as correntes de condução. Mas em um meio material, há também as cargas de polarização, de forma que

$$\rho = \rho_\ell + \rho_p; \qquad \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P},$$

e as correntes de magnetização, $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$. Além dessa densidade de corrente, se as cargas de polarização estiverem variando com o tempo, surge também uma corrente de polarização, que pode ser calculada através da equação continuidade,

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_p = 0 \qquad \therefore -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{P} + \nabla \cdot \vec{j}_p = - \qquad \therefore \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{j}_p\right) = 0$$

ou seja

$$\boxed{\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

Então a densidade de corrente total é dada por

$$\vec{j} = \vec{j}_{cond} + \vec{j}_{pol} + \vec{j}_m = \vec{j}_{cond} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$$

Substituindo a expressão para a densidade de carga total na primeira equação de Maxwell, temos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_\ell - \frac{1}{\epsilon_0}\nabla \cdot \vec{P} \qquad \therefore \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_\ell,$$

mas $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$, e, como já havíamos visto, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell$.

Por outro lado, substituindo a expressão para a densidade de corrente total na quarta equação de Maxwell, temos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{cond} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ou

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{cond} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)$$

ou

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{cond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Então, em um meio material, as equações de Maxwell ficam

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell; \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{cond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{gathered}}$$