Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2° Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 4

Na aula passada, nos recordamos da definição d função delta de Dirac como o limite de uma Lorenziana:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \right]$$

A função delta tem várias propriedades importantes, algumas das quais serão revistas na primeira série de exercícios

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) = f(a)$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x); \qquad \delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0; \qquad \delta[\phi(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{x = x_i} \right|};$$

x_i são as raízes simples de $\phi(x) = 0$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x); \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1; & \text{x} > 0 \\ 0; & \text{x}<0 \end{cases} \qquad \text{função degrau}$$

A função δ em Três Dimensões

Em eletromagnetismo vamos utilizar bastante a versão 3D da função delta, definida como

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z); \qquad \int \delta^3(\vec{r})d\tau = 1; \qquad \int f(\vec{r})\delta^3(\vec{r}-\vec{a})d\tau = f(\vec{a})$$

onde $d\tau = dxdydz$.

Uma propriedade importante da função delta 3D vem da teoria.

Transformada de Fourier

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{k}$$

Operações vetoriais com a função delta

Vamos finalizar nossa revisão de matemática com alguns resultados importantes sobre a aplicação de operadores vetoriais ao vetor posição

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z; \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

a) $\nabla.\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \qquad \therefore \boxed{\nabla.\vec{r} = 3}$

b)
$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{r} &= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z\right) \\ &= \hat{e}_x \times \hat{e}_x + \hat{e}_y \times \hat{e}_y + \hat{e}_z \times \hat{e}_z = 0 \qquad \therefore \boxed{\nabla \times \vec{r} = 0}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\nabla r &= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{1}{2r}\left[2x\hat{e}_x + 2y\hat{e}_y + 2z\hat{e}_z\right]; \qquad \therefore \boxed{\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}}\end{aligned}$$

d) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[x^2+y^2+z^2\right]^{-1/2}$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)r^{-3}\left[2x\hat{e}_x+2y\hat{e}_y+2z\hat{e}_z\right]\qquad\therefore\ \boxed{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

e) Caso especial para o eletromagnetismo: $\nabla\cdot\left(\vec{r}/r^3\right)$

O problema com este cálculo é que o vetor $\vec{r}/r^3$ diverge quando $r\to 0$. Mas, como veremos, esta divergência é integrável.

Consideremos primeiro o domínio excluindo a origem, ou seja, $r\neq 0$. Neste caso

$$\nabla.\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right).\vec{r}+\frac{1}{r^3}\nabla.\vec{r}=-3\frac{\hat{e}_r}{r^4}.\vec{r}+\frac{3}{r^3}=0!$$

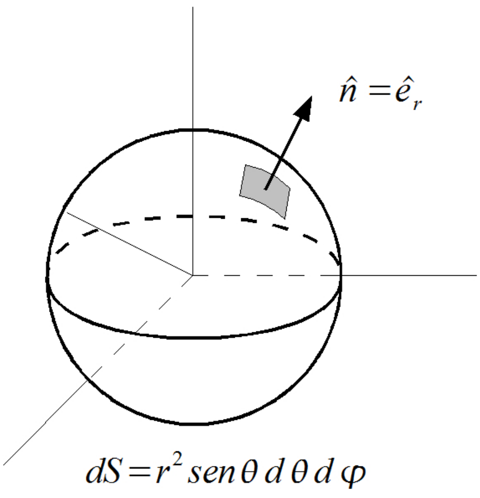
Portanto $\nabla.\left(\vec{r}/r^3\right)=0$ para $r\neq 0$. Para determinar a contribuição do ponto $r\to 0$, vamos integrar $\nabla.\left(\vec{r}/r^3\right)$ em um volume esférico em torno da origem. Pelo Teorema de Gauss, temos

$$\int_V\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)d\tau=\oint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{e}_r\,dS$$

$$=\oint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{e}_r r^2 sen\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}sen\theta\, d\theta=4\pi$$

$$\boxed{\int_V\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)d\tau=4\pi}$$



Portanto, embora $\nabla\cdot\left(\vec{r}/r^3\right)=0$ para $r\neq 0$ e $\vec{r}/r^3\to\infty$ quanto $r\to 0$, sua integral em todo espaço tem um valor finito 4π. Então podemos escrever

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=4\pi\delta(\vec{r})}$$

ou

$$\nabla\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Equações de Maxwell

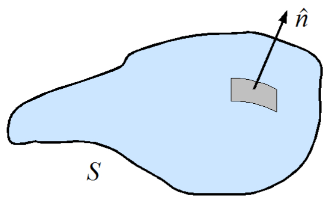
O livro texto inicia a apresentação de Eletromagnetismo pela Eletrostática. No entanto, antes de estudar detalhes deste tópico, é conveniente recordar todas as leis de básicas do eletromagnestismo, vistas no ciclo básico, utilizando o aparato de Cálculo Vetorial que acabamos de rever.

Um teorema básico de Cálculo Vetorial, que é denominado Teorema de Helmholtz é apresentado no apêndice B do livro texto e será objeto de um estudo dirigido na primeira lista de exercícios. Essencialmente o teorema demostra que se as fontes de fluxo, representada pela função escalar $G(\vec{r})$, e de circulação, representada pela função vetorial $\vec{C}(\vec{r})$ forem especificadas, isto é,

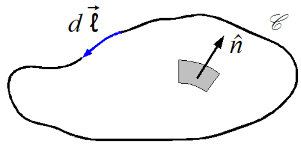
$$\boxed{\nabla\cdot\vec{F}=G(\vec{r});\qquad \nabla\times\vec{F}=\vec{C}(\vec{r})}$$

e se ambas tenderem a zero mais rapidamente que $1/r^2$ quanto $r\to\infty$, então a função vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ está univocamente determinada.

Além do teorema, vamos necessitar do



$$\textbf{Teorema de Gauss}: \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \int_V (\nabla\cdot\vec{F})d\tau$$



$$\textbf{Teorema de Stokes}: \oint_{\mathscr{C}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dS$$

e das identidades vetoriais

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\times(f\vec{A}) = (\nabla f)\times\vec{A} + f(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}; \qquad \nabla\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0; \qquad \nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\vec{r})$$

Leis Básicas do Eletromagnetismo

(H. M. Nussenzveig, Curso de Física, Vol. 3; cap 12)

Lei de Gauss: $$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int\rho d\tau; \qquad \rho = \frac{dq}{dV};$$

Lei de Gauss para $\vec{B}$: $$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS = 0$$

Lei de Faraday: $$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt}; \qquad \phi_B = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS$$

Lei de Ampère-Maxwell: $$\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d\phi_E}{dt}$$

$$I = \int \vec{j}\hat{n}dS; \qquad \phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS$$

Vamos agora ver como essas equações definem as fontes de fluxo e de circulação para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Fontes de Fluxo

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho d\tau \qquad \therefore \int_V (\nabla\cdot\vec{E})d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}d\tau$$

$$\therefore \int_V \left[\nabla\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right] dV = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Portanto a densidade de carga é a fonte de fluxo para o campo elétrico. Da mesma forma, como

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot\hat{n}dS = 0}$$

concluímos que o campo magnético não possui fontes de fluxo.

Nota: Na última passagem da derivação acima, se pode questionar porquê a integral de volume de $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ser nula implica que o integrando seja nulo. Naturalmente, podemos encontrar exemplos que a integral de volume de uma grandeza seja nula, para um dado volume, sem que o integrando seja nulo em todos os pontos do espaço.

No entanto, na derivação que fizemos o volume V é arbitrário, ou seja, a integral tem que ser nula para qualquer volume que se escolha. Isto só é possível se o integrando foi nulo.

Fontes de Circulação

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}dS$$

Ao passar a derivada temporal apara dentro da integral, consideramos somente a derivada parcial, supondo fixa a superfície através da qual o fluxo magnético é calculado. A situação de superfície em movimento será vista mais tarde.

$$\therefore \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot\hat{n}dS = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}dS \qquad \Rightarrow \qquad \int_S \left[\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]\cdot\hat{n}dS = 0$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

a fonte de circulação do campo elétrico
é derivada temporal do campo magnético

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS \qquad \therefore \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_o \int_S \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS$$

$$\therefore \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

as fontes de circulação do campo magnético são as densidades de corrente de condução, $\vec{j}$, e de deslocamento $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$

Equação da Continuidade

Tomando a divergência da última da última equação, temos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$$

onde utilizamos a primeira equação de Maxwell.

Esta equação corresponde à lei dos nós, de Kirchoff, para circuítos elétricos.

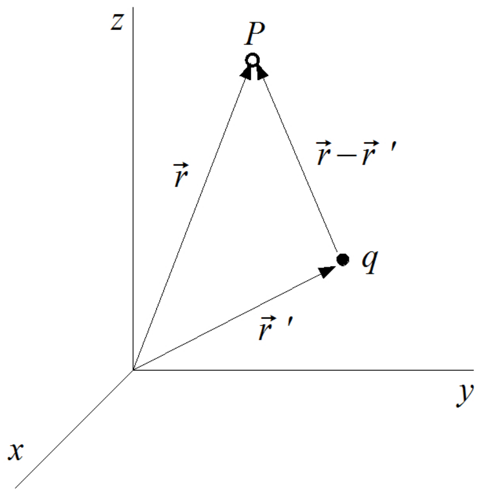
Exercício: Verificar a primeira equação de Maxwell para o campo elétrico de uma carga pontual, a partir da lei de Coulomb.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} \cancel{4\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}; \qquad \rho_q = q\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$



(Note que a função δ em três dimensões tem dimensão de L^{-3}.)

Potenciais Escalar e Vetor

Como $\nabla \times \vec{B} = 0$, podemos sempre representá-lo como o rotacional de outra função vetorial, $\vec{A}(x, y, z)$, ou seja,

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

porque $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$. A grandeza vetorial $\vec{A}$ desempenha um papel fundamental no Eletromagnetismo e é denominada Potencial Vetor.

Por outro lado, utilizando a lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \therefore \nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

Este resultado implica que a função vetorial $\vec{E} + \partial \vec{A}/\partial t$ pode ser obtida do gradiente de uma função escalar $\phi(x, y, z)$, ou seja,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Portanto

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

onde ϕ é denominado o Potencial Escalar. A vantagem de utilizar esta representação é fácil de apreciar. Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ envolvem seis variáveis, três componentes de $\vec{E}$ e três de $\vec{B}$. A representação em termos de potenciais mostra que essas seis variáveis podem ser obtidas de apenas quatro, ϕ e as três componentes de $\vec{A}$!