Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 20

Relação entre o campo elétrico em um referencial em movimento e o campo elétrico no laboratório (onde $\vec{B}$ é medido)

Vimos na aula passada que a força eletromotriz em um circuito se movendo em relação a um campo magnético pode ser calculada como

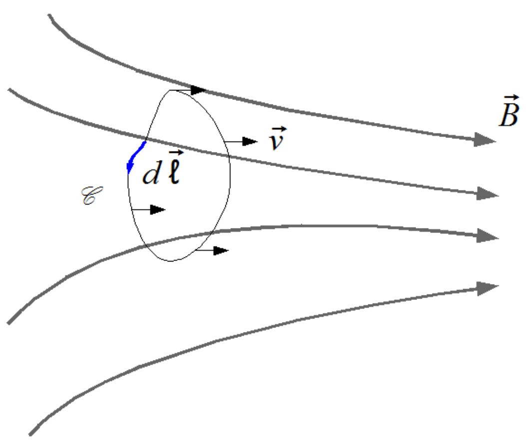
$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}' d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS$$

ou

$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}' d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}dS + \oint_{\mathscr{C}} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}$$

Na primeira equação a derivada total temporal do fluxo tem que ser calculada, ou seja, a derivada devido à variação explícita de $\vec{B}$ com o tempo e a derivada devido ao movimento do circuito com relação à $\vec{B}$. Naturalmente esta segunda derivada só é nula se $\vec{B}$ variar também espacialmente.

Como indica a figura, mesmo se $\vec{B}$ não variar com o tempo, ao se deslocar o circuito entra em região de maior intensidade do campo, aumentando o fluxo através de sua área.



Já, na segunda equação, estas duas fontes de variação de fluxo estão explicitamente separadas. A primeira integral só é não nula se $\vec{B}$ varia explicitamente com o tempo. A segunda integral é devida à variação de fluxo varrida pelo circuito se movendo com velocidade $\vec{v}$.

Nestas expressões o campo elétrico $\vec{E}'$ é medido no referencial do circuito. Se o circuito estiver imóvel no referencial do laboratório (onde $\vec{B}$ é medido), então $\vec{E}' = \vec{E}$; $\vec{v} = 0$, de forma que

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad \Rightarrow \quad \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

donde

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

como já vimos.

Por outro lado, se o circuito estiver se deslocando com velocidade $\vec{v}$, temos

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \oint_{\mathscr{C}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$\therefore \oint_{\mathscr{C}} \left[\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}\right] \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$$

Aplicando novamente o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_S \left[\nabla \times (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B})\right] \cdot \hat{n} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

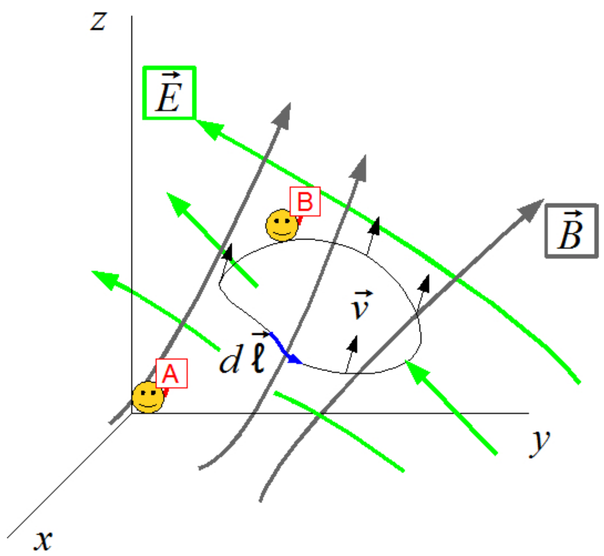
ou

$$\nabla \times (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mas $\partial \vec{B}/\partial t$ é igual ao campo elétrico medido no laboratório; portanto

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}}$$

Esta relação pode ser também obtida comparando a força que dois observadores distintos um (A) no referencial do laboratório e outro (B) no referencial do circuito medem sobre um carga fluindo no circuito. Consideremos a situação mostrada na figura a seguir. Os campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B}(\vec{r},t)$ são medidos no referencial do laboratório. Para o observador (A), neste referencial, a relação entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é dada pela terceira Equação de Maxwell



$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

O observador (B), por outro lado, mede um força $\vec{f}\,'$ em seu referencial, que faz as cargas fluírem pelo circuito. Mas como para ele o circuito está parado, a força, magnética $q\vec{v}\times\vec{B}$ é nula, de forma que só pode ser devida a um campo elétrico,

$$\vec{f}\,'=q\vec{E}\,'$$

Esta mesma força, medida no laboratório, será $\vec{f}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$. Como as forças tem que ser iguais, já que um referencial inercial não pode ser distinguido de outros, temos

$$\vec{E}=\vec{E}\,'+\vec{v}\times\vec{B}$$

Nota:

Existe uma questão sutil sobre a força eletromotriz do movimento. Consideremos uma situação em que $\partial\vec{B}/\partial t=0$, de forma que

$$\varepsilon=\oint_{\mathscr{C}}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}$$

Como a força eletromotriz é o trabalho realizado para transportar um carga em todo o circuíto, a integral corresponde ao trabalho realizado por unidade de carga. Mas sabemos que o campo magnético não realiza trabalho sobre uma carga em órbita no campo; então esta integral não terá que ser sempre nula?

Para responder esta pergunta, recordemos como demonstramos que a energia cinética de uma carga em um campo magnético se conserva. Partimos da equação de movimento

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

e multiplicamos escalarmente por $\vec{B}$:

$$m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$$

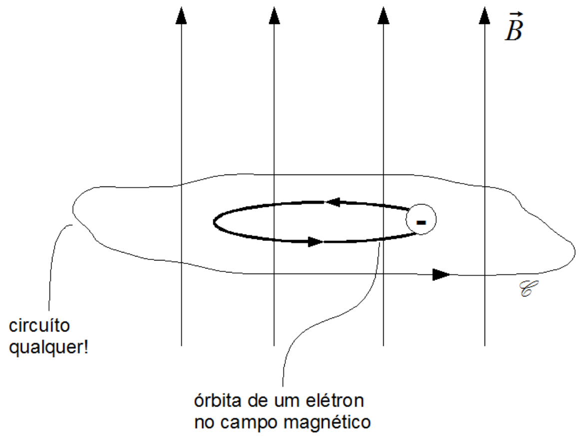
Portanto a entrega cinética se conserva ao longo da órbita da carga.

Mas um circuito qualquer não segue necessariamente a órbita da carga no campo magnético, como indicado na figura! Se seguisse a órbita teríamos

$$d\vec{\ell} = \vec{v}dt$$

de forma que

$$(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell} = 0$$

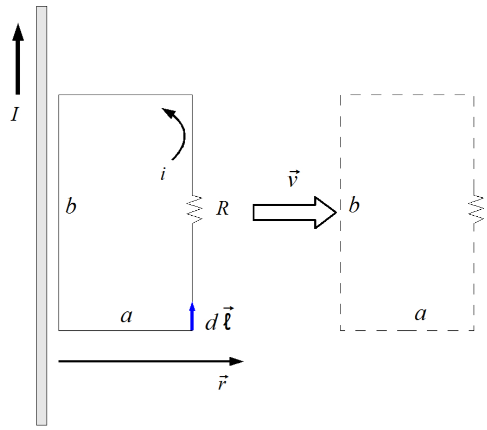


Mas para uma órbita qualquer $d\vec{\ell} \neq \vec{v}dt$ e o trabalho realizado pela força magnética ao longo do circuíto pode ser não nulo.

Vamos agora ver mais alguns exercícios.

Ex.1: Uma espira de lados a e b e resistência R está encostada em um longo fio vertical, conforme mostra a figura. No instante $t = 0$ a corrente no fio é ligada e aumenta linearmente com o tempo, segundo a expressão

$$I = \frac{I_0}{T}t$$



onde I_0 e T são constantes. No mesmo instante a espira começa a se afastar do fio com velocidade constante

$$\vec{v} = v\hat{e}_r$$

Calcule a corrente é induzida na espira em função do tempo.

Solução:

$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \oint_{\mathscr{C}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Campo devido à corrente no fio

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{t}{T}\hat{e}_\theta$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{r}_\theta \qquad \text{(veja, nessa derivada parcial } r = cte\text{!!!)}$$

$$\therefore \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi T}\hat{e}_\theta \cdot (-\hat{e}_\theta b dr)$$

$$\therefore \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = -\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi T} ln\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

A força eletromotriz do movimento será

$$\oint_{\mathscr{C}} (\vec{v} \times \vec{B}).d\vec{\ell} = \oint_{\mathscr{C}} \left[v\hat{e}_r \times \left(\tfrac{\mu_0 I_0 v t}{2\pi r T}\hat{e}_\theta \right) \right] \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \tfrac{\mu_0 I_0 v t}{2\pi r T} b \left[\tfrac{1}{r+a} - \tfrac{1}{r} \right] = -\tfrac{\mu_0 I_0 \cancel{vt}}{2\pi T} \tfrac{a}{\cancel{r}(r+a)}$$

$$= -\tfrac{\mu_0 I_0 b}{2\pi T}\tfrac{a}{a+r}$$

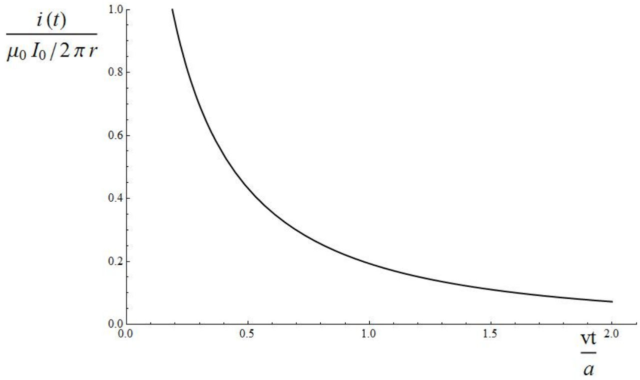
Então a força eletromotriz total sera

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi T}\left[ln\left(\frac{r+a}{r}\right) - \frac{a}{r+a} \right]$$

e

$$i(t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi T R}\left[ln\left(\frac{a+vt}{vt} - \frac{a}{a+vt}\right)\right]$$

Esta corrente diverge em $t = 0$; mas isto é devido somente a termos suposto o fio de dimensão nula. Se considerarmos que, no instante $t = 0$, $r = \delta$, onde δ é o raio do fio, esta divergência desaparece; mas de qualquer forma a corrente será muito alta no início.



Por outro lado, quando $t \to \infty$ temos

$$r \to \infty \quad \Rightarrow \qquad ln\left(\tfrac{r+a}{a}\right) = ln\left(1 + \underbrace{\tfrac{a}{r}}_{\ll 1}\right) \approx \tfrac{a}{r}$$

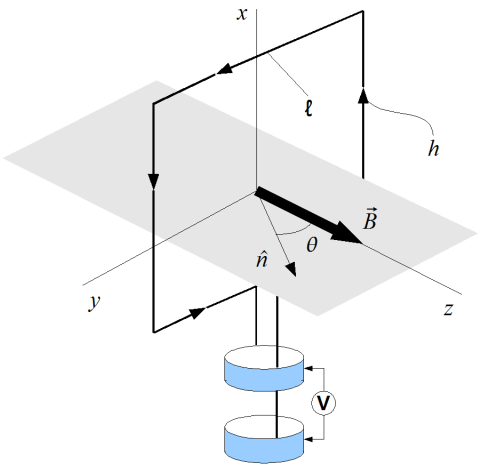
$$\Rightarrow \quad i(t) \to 0$$

$$\frac{a}{a+vt} \approx \frac{a}{r}$$

O gráfico ao lado mostra a variação de $i(t)$.

Desafio: Obter o mesmo resultado a partir de $\varepsilon = -d\phi_m/dt$!

Ex.2: Considere uma espira retangular de corrente imersa num campo magnético uniforme, como mostra a figura



a) Suponha que a espira esteja parada e que o campo varie senoidalmente com o tempo,

$$\vec{B} = B_0 sen(\omega t)\hat{e}_z$$

Qual é a voltagem V medida pelo voltímetro conectado aos dois anéis terminais da espira?

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}; \qquad \phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = B cos\theta h\ell = B_0 h\ell cos\theta sen(\omega t)$$

$$\therefore \varepsilon = -B_0 h\ell\omega cos\theta cos(\omega t)$$

Se a segunda expressão para o cálculo de ε fosse utilizado, o resultado seria o mesmo porque a espira está parada, $\vec{v} = 0$.

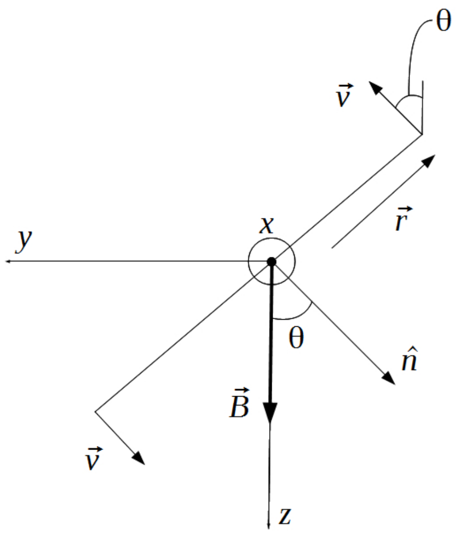
b) Suponha agora que o campo magnético fique constante e que a espira gire com velocidade angular ω no entorno do eixo x. Qual será a voltagem medida pelo voltímetro?

b.1):

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} : \quad \phi_m = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = Bh\ell cos\theta$$

$$\theta = \omega t \quad \therefore \quad \varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -[-Bh\ell\omega sen(\omega t)$$

$$\therefore \quad \varepsilon = Bh\ell\omega sen(\omega t)$$



b.2)

$$\varepsilon = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{v} = r\omega \hat{e}_\theta \qquad \therefore \vec{v} = r\omega(-sen\theta \hat{e}_y + cos\theta \hat{e}_z)$$

$$\therefore (\vec{r} \times \vec{B}) = r\omega(-sen\theta \hat{e}_y + cos\theta \hat{e}_z) \times B\hat{e}_z$$

$$\therefore (\vec{r} \times \vec{B}) = -r\omega B sen\theta \hat{e}_x$$

$$\therefore (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = -r\omega B sen\theta \hat{e}_x \cdot d\vec{\ell} = -r\omega B sen\theta dx$$

$\Rightarrow$ só os lados paralelos ao eixo x contribuem! Neles $r = \frac{\ell}{2}$

$$\therefore \varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 2(-\frac{\ell}{2}\omega B sen\theta h)$$

$$\therefore \varepsilon = -Bh\ell\omega sen(\omega t)$$

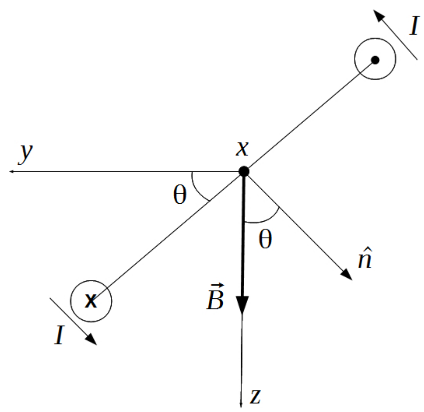
(o sinal (-) é devido ao sentido posto de $d\vec{\ell}$ que consideramos neste segundo cálculo)

c) Se uma resistência de carga R for acoplada nos terminais da espira, substituindo o voltímetro V, qual é o valor do torque que deve ser aplicado para manter a espira girando com velocidade angular constante ω?

Nesta caso irá circular uma corrente pela espira $I = \varepsilon / R$; portanto

$$I = \frac{Bh\ell\omega}{R} sen(\omega t)$$

[o sentido da corrente é de produzir um campo que se oponha à variação de fluxo, como indica a figura].



O torque magnético na espira é dado por [visto em série de exercícios; seção 6.1.2 do livro texto]

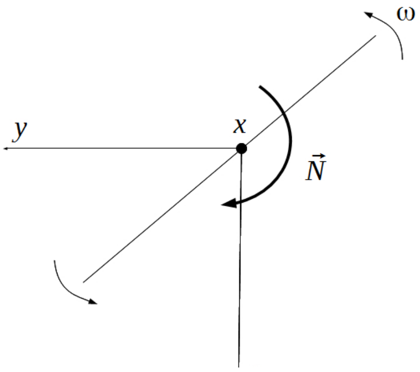
$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}; \qquad \vec{m} = IS\hat{n} = h\ell \frac{B_0 h\ell}{R} \omega sen(\omega t)\hat{n}$$

$$\therefore \vec{N} = \frac{B_0 h^2 \ell^2}{R} \omega sen(\omega t)\hat{n} \times B\hat{e}_z = \frac{B^2 h^2 \ell^2}{R} \omega sen(\omega t).$$

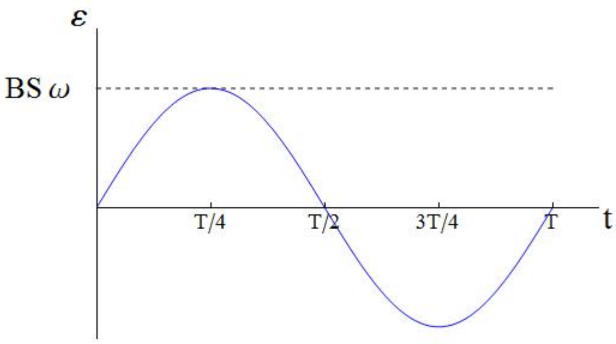
$$[-sen\theta \hat{e}_y + cos\theta \hat{e}_z] \times \hat{e}_z; \theta = \omega t$$

$$\therefore \vec{N} = -\frac{B^2 h^2 \ell^2}{R} \omega^2 sen(\omega t)\hat{e}_x$$

Portanto, ao fazer circular corrente na espira, o torque devido ao campo magnético é no sentido de frear a espira. Para manter ω constante é necessário então aplicar um torque mecânico externo oposto a este

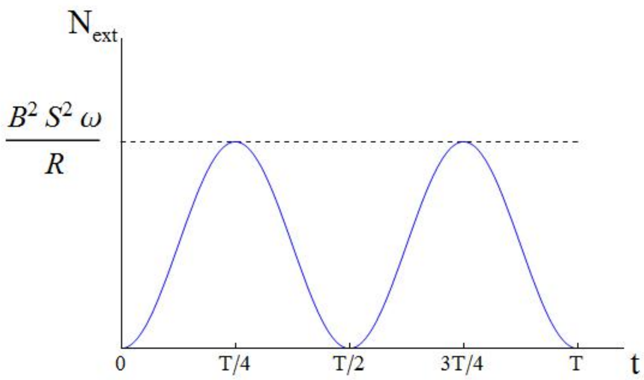


$$\vec{N}_{ext} = \frac{B^2 h^2 \ell^2}{R} \omega sen(\omega t)\hat{e}_x$$



$$S = h\ell$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



A potência dissipada na resistência será

$$P = RI^2 = \cancel{R}\frac{B^2S^2\omega^2}{R^{\cancel{2}}}sen^2(\omega t) = N_{ext}\omega$$

Portanto todo a trabalho feito pelo agente externo é dissipado na resistência de carga.