Eletromagnetismo I

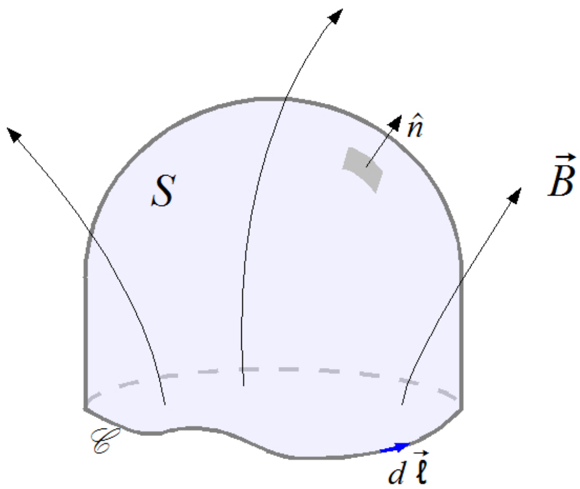
Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 19

A Lei da Indução de Faraday

Na aula passada discutimos a "força eletromotriz" $\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ em um circuito e mostramos que se o circuito se move através de um campo magnético, surge uma força eletromotriz devido à força magnética $\vec{f} + q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre as cargas. Hoje vamos discutir em maior detalhe a questão da força eletromotriz em circuitos em movimento, a partir da Lei de Faraday.



$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Quando queremos escrever esta lei na forma diferencial, utilizamos primeiro o Teorema de Stokes, para escrever

$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Agora, há uma passagem sutil, mas muito importante, para a qual às vezes não damos a devida importância: se o circuito $\mathscr{C}$, e a superfície S estiverem fixas, a variação do fluxo magnético com o tempo só pode ser devido à variação do campo magnético com o tempo, de forma que podemos passar a derivada temporal para dentro da integral,

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad \Rightarrow \quad \int_S \left[\nabla \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS = 0$$

e, como a superfície S é arbitrária

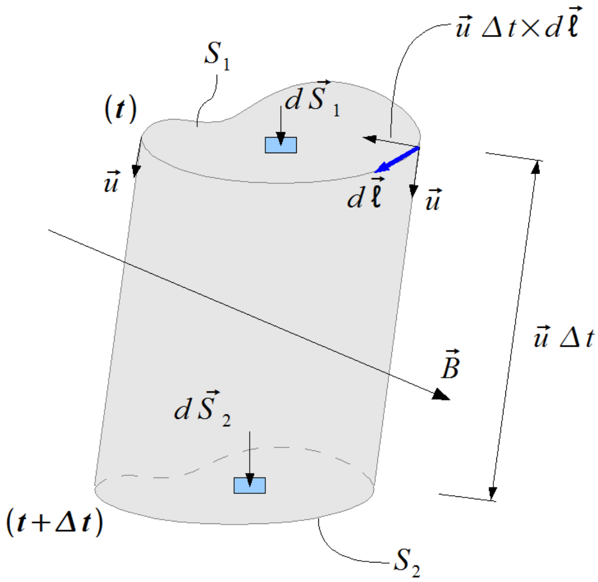
$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

É importante então ter presente que, escrita nessa forma diferencial, a Lei de Faraday relaciona os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ medidos em um mesmo referencial. Da mesma forma, na expressão da Força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

a velocidade $\vec{v}$ é a velocidade da carga medida no mesmo referencial em que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são medidos.

Circuito em Movimento



Suponhamos agora que tenhamos um circuito se movendo em relação ao campo magnético, ou seja, o campo magnético e sua variação temporal são medidos no referencial do laboratório e queremos determinar a força eletromotriz em um circuíto se movendo no laboratório. Isto é indicado na figura; todos os pontos do circuito se deslocam com uma velocidade $\vec{u}$ em relação ao campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$, medido no laboratório. Como expressar a Lei de Faraday neste caso?

Primeiramente, temos que entender o significado da força eletromotriz para um circuíto em movimento, A força eletromotriz é a integral no circuito completo do campo elétrico que coloca as cargas em movimento, no referencial do circuito. Portanto, é melhor escrever

$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}$$

onde $\vec{E}'$ é o campo elétrico medido no referencial do circuito. Assim, se o circuíto estiver se deslocando em um campo magnético, $\vec{E}'$ e $\vec{B}$ não estão sendo medidos em um mesmo referencial. Neste caso, escrevemos a Lei de Faraday como

$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS$$

e neste caso o fluxo magnético através do circuito varia tanto devido a uma variação explícita em $\vec{B}$ com o tempo como devido ao movimento de S com relação $\vec{B}$.

Vamos então calcular a derivada temporal do fluxo usando a sua definição

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{S_1} \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} - \int_{S_1} \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}\right]$$

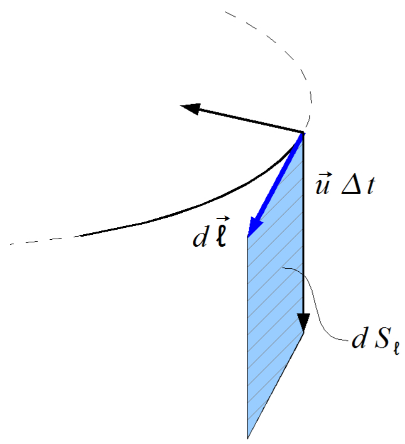
Como S se move no campo $\vec{B}$, para calcular a variação de fluxo devido a S varrer diferentes valores do campo magnético, temos que levar em conta uma importante propriedade deste,

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int(\nabla\cdot\vec{B})d\tau = \oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS = 0$$

Vamos aplicar este teorema ao volume formado por S_1, S_2 e a superfície lateral varrida por S, em seu deslocamento de $t \to t+\Delta t$, lembrando, no entanto, que a Lei de Gauss para $\vec{B}$ se aplica num instante fixo

$$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int_{S_2}\vec{B}(t)\cdot d\vec{S}_2 - \int_{S_1}\vec{B}(t)\cdot d\vec{S}_1 - \oint_{\mathscr{C}}\vec{B}(t)(\vec{u}\Delta T\times d\vec{\ell}) = 0$$

onde $\vec{B}(t)$ significa o campo medido no instante t.



A última integral foi escrita notando que $|\vec{u}\Delta t\times d\vec{\ell}|$ dá o módulo do elemento de superfície na superfície lateral. Por outro lado seu sentido é para dentro da superfície enquanto que, no Teorema de Gauss, a normal à superfície tem que apontar para fora da superfície. Finalmente, para integrar sobre toda a superfície lateral temos que integrar sobre o perímetro de sua base,, obtendo a última integral na expressão acima. Então

$$\int_{S_2} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{\mathscr{C}} \vec{B}(t) \cdot (\vec{u}\Delta t \times d\vec{\ell})$$

Mas, para calcular a variação do fluxo magnético, temos que considerar $\vec{B}$ pode também estar variando explicitamente com o tempo, ou seja,

$$\vec{B}(t+\Delta t) \approx \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}\Delta t + \dots$$

Então a expressão para a derivada temporal do fluxo magnético fica

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_2} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_2 + \Delta t \int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_2 + \dots - \int_{S_1} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right]$$

mas

$$\int_{S_2} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 = \Delta t \oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{\ell}) = \Delta t \oint_{\mathscr{C}} (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{\ell}$$

então

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{\mathscr{C}} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

e

$$\boxed{\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\mathscr{C}} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}}$$

Que é a Lei de Faraday na forma integral para circuitos se movendo em um campo magnético.

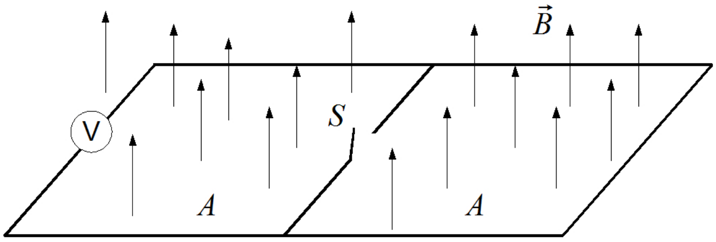
Naturalmente, podemos sempre utilizar a Leide Faraday na sua forma original

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

se calcularmos devidamente todas as variações do fluxo, Mas isto nem sempre é evidente e, nesses casos, a outra formula, aplicada corretamente, evita contradições.

Vamos agora ver alguns exemplos.

Ex.1: Um circuito retangular de duas partes de área A esta imerso em um campo magnético constante $\vec{B}$, perpendicular a seu plano. Inicialmente a chave S está fechada, curto-circuitando o medidor V. Quando a chave for aberta, qual será o valor da força eletromotriz medida por V?



Resposta usual:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad \begin{array}{l} t=0: \quad \phi_m = BA \\ \\ t=\Delta t: \quad \phi_m = 2BA \end{array}$$

$$\therefore \varepsilon = -\frac{2BA - BA}{\Delta t} = -\frac{BA}{\Delta t}$$

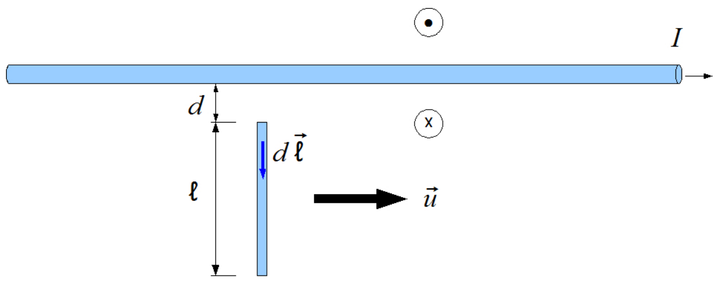
onde Δt é o tempo de abertura da chave.

Mas acontece que esta resposta está errada, porque só se trocou um circuito pelo outro sem que houvesse aumento ou diminuição de fluxo através deles.

Resposta Correta:

$$\varepsilon = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\mathscr{C}} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}; \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \;\; \vec{u} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = 0!$$

Ex.2: Uma barra condutora se desloca paralelamente a um fio infinto, ao qual é perpendicular. A barra tem comprimento ℓ e sua extremidade mais próxima do fio está a uma distância dele sendo a corrente no fio I e a velocidade da barra $\vec{u}$. Calcule



- i) a força eletromotriz desenvolvida nas extremidades da barra.

- ii) a força necessária para mantê-la com velocidade constante

i) A barra se desloca no campo magnético do fio, dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{e}_\theta$$

em torno do fio. Podemos calcular a força eletromotriz induzida utilizando a expressão de variação total do fluxo magnético, ou a expressão explícita que derivamos. Vamos começar pela última

$$\varepsilon = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint_{\mathscr{C}} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}$$

Neste caso:

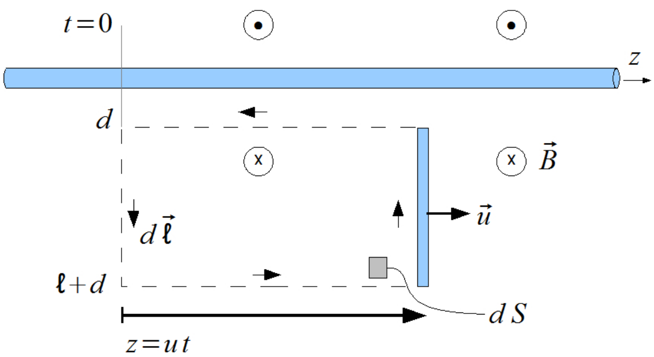
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \quad \vec{B} = \mu_0 I/2\pi r\hat{e}_\theta; \quad \vec{v} = u\hat{e}_z; \quad \text{e} \quad d\vec{\ell} = dr\hat{e}_r$$

$$\therefore \varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_d^{d+\ell} u\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\hat{e}_r)\cdot dr\hat{e}_r$$

$$\therefore \varepsilon = -\frac{\mu_0 I u}{2\pi}\int_d^{d+\ell}\frac{dr}{r} \qquad \therefore \boxed{\varepsilon = -\frac{\mu_0 I u}{2\pi} ln\frac{d+\ell}{d}}$$

O sinal negativo de ε indica a corrente elétrica apontará no sentido oposto que escolhemos para $d\vec{\ell}$.

Vamos agora derivar o mesmo resultado usando a variação de fluxo. Neste caso a barra não forma um circuito fechado. Mas a Lei de Faraday se aplica a qualquer contorno fechado, tenha ele um condutor ou não! Então vamos considerar como o contorno $\mathscr{C}$ o retângulo varrido pela barra desde o ponto $z=0$, de onde ele partiu.



O fluxo magnético é dado por

$$\phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\theta(-\hat{e}_\theta)(ut)dr$$

onde consideramos $d\vec{S} = zdr(-\hat{e}_\theta)$ pela convenção da regra da mão direita, tomando em conta o sentido que adotamos para $d\vec{\ell}$. Então

$$\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I u}{2\pi}\int_d^{d+\ell}\frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I u}{2pi} ln\frac{d+\ell}{d}$$

e

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I u}{2pi} ln\frac{d+\ell}{d}$$

O sinal de ε deu oposto do anterior porque $d\vec{\ell}$ foi agora adotado no sentido posto, sobre a barra.

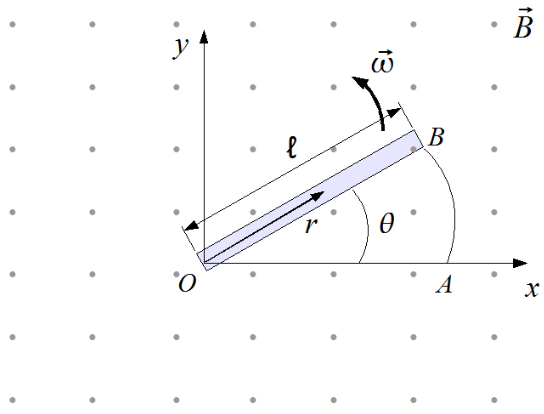
ii) Como a barra não esta ligada a um condutor, não circulará corrente e, portanto,

$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_m = i\vec{\ell}\times\vec{B} = 0$$

A força eletromotriz aparecerá como uma tensão nos terminais da barra.

Ex.3: Uma barra de comprimento ℓ gira em um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{e}_z$ com velocidade angular constante ω. Qual é o valor da força eletromotriz induzida entre suas extremidades?

a) Vamos primeiro calcular ε utilizando a forma que separa explicitamente a força eletromotriz do movimento



$$\varepsilon = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}dS + \oint_{\mathscr{C}}(\vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}, \quad d\vec{\ell} = dr\hat{e}_r$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0; \quad \vec{u} = r\omega\hat{e}_\theta \quad \therefore (\vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell} = \omega B r dr$$

$$\therefore \varepsilon = \omega B\int_0^\ell r dr \quad \therefore \epsilon = \frac{1}{2}B\ell^2\omega$$

b) Para utilizar a forma envolvendo a variação total do fluxo,

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\hat{n}dS.$$

temos que definir uma área. Consideramos a área do setor circular $\widehat{OAB}$, supondo que a barra passe pelo eixo θ em $t = 0$. Para o sentido que escolhemos para $d\vec{\ell}$, utilizando a regra da mão direita temos que $\hat{n} = -\hat{e}_z$. Então

$$\int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = B\int_0^\theta\int_0^\ell \hat{e}_z\cdot(-\hat{e}_\theta)r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}B\ell^2\theta$$

Então:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{1}{2}B\ell^2\frac{d\theta}{dt} \qquad \therefore \varepsilon = \frac{1}{2}B\ell^2\omega$$

o mesmo resultado, naturalmente.