Mecânica Quântica

Spin

Autor: José Renato Alcarás

1. Consideração Inicial

A maior parte desse trabalho encontra-se no livro "Quantum Mechanics", dos autores Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloë, traduzido para o inglês do francês por Susan Reid Hemley, Nicole Ostrowsky e Dan Ostrowsky. Meu trabalho aqui foi o de traduzir e sumarizar as informações do capítulo 4, *Application of the postulates to simple cases: spin ½ and two-level systems* e 9, *Electron spin*. Constantes referências a esses capítulos serão feitas ao longo do texto.

2. Definição de Spin

Até o momento, focamos nossos estudos na quantização de **variáveis orbitais**. Com a posição $\vec{\boldsymbol{r}}$ e o momento $\vec{\boldsymbol{p}}$ de uma partícula, associamos os observáveis $\vec{\mathbb{r}}$ e $\vec{\mathbb{p}}$ que atuam no estado de espaços $\mathcal{E}_{\boldsymbol{r}}$, que é isomórfico ao espaço onde vivem as funções de onda, que denotamos por $\mathcal{F}$. Todas as quantidades físicas eram funções das quantidades fundamentais $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\vec{\boldsymbol{p}}$, e passaremos a tratar os resultados obtidos como resultados no **espaço de estado orbital**.

No entanto, alguns fenômenos físicos não podem ser puramente explicados pelas quantidades que desenvolvemos até o momento: surge então na teoria quântica uma nova grandeza, uma característica **intrínseca** das partículas, chamada **spin**, para explicar tais fenômenos e fazer predições acerca de tantos outros. O **spin** é uma quantidade tal como a massa e a carga de uma partícula, podendo assumir valores numéricos dependendo da partícula em estudo. Suas características assemelham-se às de um momento angular: de fato, o operador spin $\mathbb{S}$ é um operador de momento angular (que segue as características dos momentos angulares gerais $\mathbb{J}$ que trabalhamos em outros textos). Vamos postular agora algo fundamental para que se compreenda **como** os spins vão ser adicionados nos resultados que já possuímos até o momento sobre as partículas.

Postulado 1: O operador spin $\mathbb{S}$ é um momento angular. Isso significa que ele deve satisfazer a relação

$$[\mathbb{S}_i, \mathbb{S}_j] = i\hbar \mathbb{S}_k \epsilon_{ijk}$$

Relação essa que caracteriza a quantidade "momento angular".

Postulado 2: O operador spin atua em um novo espaço, dito "espaço de estado de spin" $\mathcal{E}_{\boldsymbol{s}}$, onde $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}_z$ são os operadores usados na descrição das quantidades de interesse. O espaço de estado de spin é constituído por vetores $|s, m\rangle$ (a rigorosidade de notação me implicaria adicionar um índice m_s para caracterizar a quantidade m com relação a s, no entanto, omitirei tal índice por simplicidade de notação) que sofrem a ação desses operadores da seguinte forma:

$$\mathbb{S}^2|s,m\rangle = s(s+1)\hbar^2|s,m\rangle$$
$$\mathbb{S}_z|s,m\rangle = m\hbar|s,m\rangle$$

De acordo com o que foi visto na teoria geral de momento angular. Sabemos, por analogia $s \leftrightarrow j$ e $m_s \leftrightarrow m$, que s pode assumir valores inteiros ou semi-inteiros e que m assume valores discretos de $-s$ a s.

Uma partícula é caracterizada por um <u>valor</u> <u>único</u> de s. Essa partícula é dita ter um spin s. Portanto, o espaço de estado de spin é sempre de dimensão finita, $2s+1$, e todos os estados de spin são autovetores de $\mathbb{S}^2$ com o mesmo autovalor, $s(s+1)\hbar^2$.

Postulado 3: O espaço de Hilbert, ou espaço de estados $\mathcal{E}$, é dado pelo produto tensorial de $\mathcal{E}_{\boldsymbol{r}}$ e $\mathcal{E}_{\boldsymbol{s}}$. Isso implica que **todos os observáveis de spin comutam com os observáveis orbitais**. Mais do que isso, a caracterização de um estado é dada pelo produto tensorial de kets orbitais e de spin. Com exceção do caso em que $s = 0$, não é suficiente especificar um ket de $\mathcal{E}_{\boldsymbol{r}}$ para caracterizar o estado de uma partícula.

Postulado 4: O elétron é uma partícula de spin ½ ($s = 1/2$) e seu **momento magnético intrínseco** é dado por:

$$\mathbb{M}_S = \frac{2\mu_B}{\hbar}\mathbb{S}$$

Onde μ_B representa o magnéton de Bohr, $q\hbar/2m_e$.

Vale ressaltar o seguinte: dizer que se encontrou uma partícula de spin ½ não basta para dizer que se encontrou um elétron, ou seja, o elétron **não é a única entidade quântica com spin ½** . Prótons e nêutrons, por exemplo, também tem spin ½, apesar de possuírem diferentes razões giromagnéticas. Até o presente momento, conhecem-se partículas de spins $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ até valores altos como $\frac{11}{2}$.

Analogia Clássica: Um dos maiores dilemas na física da atualidade diz respeito à analogia ou não analogia clássica da quantidade "spin". Alguns autores, e físicos, defendem que a quantidade é puramente quântica (assim como o livro base para esse estudo), usando o seguinte argumento: se imaginássemos que uma partícula, como um elétron, ao invés de se comportar como um ponto, tivesse certa extensão espacial, poderíamos associar o momento angular de spin à rotação desse corpo em relação ao seu próprio eixo. No entanto, é importante dizer que tal consideração não pode ser feita, uma vez que para descrever uma estrutura tão complexa quanto um corpo rígido em rotação, necessitaríamos de, no mínimo, 6 variáveis, três para caracterizar a localização de um de seus pontos e três ângulos para especificar sua orientação espacial. Essa teoria seria muitíssimo mais complexa, de forma que tal analogia **não pode ser feita**. Dessa forma, não haveria uma analogia clássica ao spin, uma vez que ele existe em nossa consideração da partícula como um ponto.

Ainda, existe a vertente de físicos que acreditam que exista, de fato, analogia clássica, e o spin relaciona-se à quantidade que conhecemos por **momento de inércia** no mundo clássico. Eu, como autor, me posiciono frente a primeira vertente. No entanto, fica a cargo do leitor o posicionamento quanto a esse paradigma.

3. Problemas de Spin ½

a) Notação

Se estivermos trabalhando com átomos ou partículas de spin meio, isto é, $s = \frac{1}{2}$, então o número quântico m só pode assumir dois valores: $\pm\frac{1}{2}$. Isso implica no seguinte:

$$\mathbb{S}_z \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

E

$$\mathbb{S}_z \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

Essa notação é demasiadamente complicada e iremos simplifica-la. Iremos chamar esses dois estados possíveis do sistema (estados de spin) de estados **up** e **down**. Isso se faz pela referência ao alinhamento ou anti-alinhamento desse sistema com um campo magnético: suponha um campo magnético orientado no sentido crescente de z (e suponha que z cresça no sentido de baixo para cima). Então, uma partícula no estado $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ se alinhará ao campo, enquanto uma partícula no estado $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ se contra-alinhará ao campo. Então, chamaremos

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow\rangle = |+\rangle$$

E

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow\rangle = |-\rangle$$

Essa notação simplificada nos permite obter as ações dos operadores $\mathbb{S}$ de forma rápida e instantânea:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}^2|\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\pm\rangle \\
&\mathbb{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle \\
&\mathbb{S}_+|+\rangle = 0; \mathbb{S}_-|-\rangle = 0 \\
&\mathbb{S}_+|-\rangle = \hbar|+\rangle; \mathbb{S}_-|+\rangle = \hbar|-\rangle
\end{aligned}$$

Observação: no experimento de Stern-Gerlach e em outros pontos do texto em que precisamos explicitar que os estados $|\pm\rangle$ dizem respeito ao spin estar alinhado ou contra-alinhado ao eixo z, faz-se uso da notação $|\pm_z\rangle$.

b) Matrizes de Pauli

Qualquer estado de spin genérico de uma partícula de spin ½ pode ser escrito como uma combinação linear dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$:

$$|\varphi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$$

Onde $a, b \in \mathbb{C}$. Vamos atuar um operador genérico de spin, $\mathbb{S}_i$, onde $i = x, y, z$, sobre $|\varphi\rangle$. Certamente, isso resultará num outro ket $|\varphi'\rangle$ que pode também ser escrito na base $|\pm\rangle$:

$$\mathbb{S}_i|\varphi\rangle = |\varphi'\rangle = c|+\rangle + d|-\rangle$$

Em notação matricial, onde $\mathbb{S}_i$, $|\varphi\rangle$ e $|\varphi'\rangle$ estão escritas na base $|\pm\rangle$:

$$\begin{pmatrix} \langle +|\mathbb{S}_i|+\rangle & \langle +|\mathbb{S}_i|-\rangle \\ \langle -|\mathbb{S}_i|+\rangle & \langle -|\mathbb{S}_i|-\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Nós somos capazes de calcular esses coeficientes dependendo de qual valor i assumir. Vamos supor que $i = z$, ou seja, desejamos expressar $\mathbb{S}_z$ na base $|\pm\rangle$. Calculemos, então, os quatro termos da matriz, lembrando que $\langle \pm|\pm\rangle = 1$ e $\langle \pm|\mp\rangle = 0$:

$$\langle +|\mathbb{S}_z|+\rangle = \left\langle + \left|\frac{\hbar}{2}\right| + \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle +|+\rangle = \frac{\hbar}{2}$$
$$\langle +|\mathbb{S}_z|-\rangle = \left\langle + \left|-\frac{\hbar}{2}\right| - \right\rangle = -\frac{\hbar}{2}\langle +|-\rangle = 0$$
$$\langle -|\mathbb{S}_z|+\rangle = \left\langle - \left|\frac{\hbar}{2}\right| + \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle -|+\rangle = 0$$
$$\langle -|\mathbb{S}_z|-\rangle = \left\langle - \left|-\frac{\hbar}{2}\right| - \right\rangle = -\frac{\hbar}{2}\langle -|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}$$

Assim, podemos escrever:

$$\mathbb{S}_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_z}$$

A matriz σ_z é uma das três **matrizes de Pauli**. Elas são comuns em problemas de spin ½, portanto recebem uma nomenclatura especial. As matrizes σ_x e σ_y são obtidas de forma análoga a σ_z. Vamos obter σ_x, usando as relações acima para $\mathbb{S}_x$. Para isso, usaremos os operadores $\mathbb{S}_\pm$, definidos por:

$$\mathbb{S}_\pm = \mathbb{S}_x \pm i\mathbb{S}_y$$

Somando esses dois operadores, obtemos $\mathbb{S}_x = \frac{1}{2}(\mathbb{S}_+ + \mathbb{S}_-)$.

$$\langle +|\mathbb{S}_x|+\rangle = \left\langle + \left|\frac{1}{2}(\mathbb{S}_+ + \mathbb{S}_-)\right| + \right\rangle = \underbrace{\left\langle + \left|\frac{1}{2}\mathbb{S}_+\right| + \right\rangle}_{=0} + \left\langle + \left|\frac{1}{2}\mathbb{S}_-\right| + \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle +|-\rangle = 0$$
$$\langle +|\mathbb{S}_x|-\rangle = \left\langle + \left|\frac{1}{2}(\mathbb{S}_+ + \mathbb{S}_-)\right| - \right\rangle = \frac{\hbar}{2}$$
$$\langle -|\mathbb{S}_x|+\rangle = \left\langle - \left|\frac{1}{2}(\mathbb{S}_+ + \mathbb{S}_-)\right| + \right\rangle = 0$$
$$\langle -|\mathbb{S}_x|-\rangle = \left\langle - \left|\frac{1}{2}(\mathbb{S}_+ + \mathbb{S}_-)\right| - \right\rangle = \frac{\hbar}{2}$$

Portanto,

$$\mathbb{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_x}$$

Fica a cargo do leitor a obtenção da expressão de σ_y. Para resumir,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E

$$\mathbb{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$$

c) Experimento de Stern-Gerlach

Nessa sessão, iremos discutir o experimento de Stern-Gerlach, talvez o mais importante de toda a mecânica quântica. Foi ele que demonstrou experimentalmente a existência da quantização do momento angular.

Sabemos que um objeto carregado girando em torno de um eixo se comporta como um dipolo magnético. A energia potencial a que esse dipolo está sujeito é:

$$U = -M.B$$

Onde M é o vetor de momento de dipolo magnético e B é o vetor de campo magnético. Essa expressão nos mostra os seguintes resultados:

- Se M e B têm a mesma direção e o mesmo sentido, U é mínimo (esse é o motivo pelo qual a agulha de uma bússola se alinha ao campo magnético);

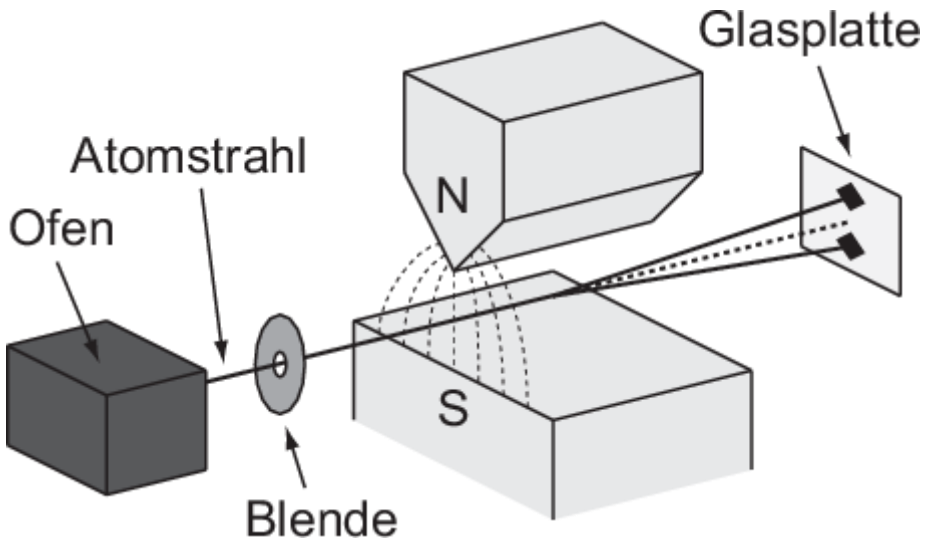
- Se M e B têm a mesma direção e sentidos opostos, então U é máximo;

- Dipolos alinhados com o campo B são sugados na direção do campo;

- Dipolos contra-alinhados com o campo B são repelidos da direção do campo.

Em 1922, Stern e Gerlach exploraram essas propriedades físicas de dipolos magnéticos para estudar o spin de partículas atômicas. Lembre-se de que o momento de dipolo magnético intrínseco de uma partícula está diretamente relacionado com seu spin, de forma que, para partículas de spin ½, temos apenas 2 possibilidades de configuração do spin, como discutimos na sessão "notação": ou temos o spin "up", denotado por $|+\rangle$ ou $|\uparrow\rangle$/ ou temos o spin "down", denotado por $|-\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$. Dessa forma, o momento intrínseco estará **ou alinhado** a $\boldsymbol{B}$, ou **contra alinhado** ao mesmo, quando impusermos o campo magnético.

O experimento de Stern-Gerlach gira em torno dessa particularidade: tomando átomos de prata, que são neutros eletricamente (de forma a não sofrerem a ação da força de Lorentz, que seria radicalmente maior do que a repulsão gerada pelo alinhamento dos spins), assim como nêutrons, e que possuem spin ½, eles geraram um campo magnético não uniforme numa direção, de acordo com o esquema a seguir:



O aparato experimental era, então, composto de um forno ("ofen"), que ejetava átomos de prata através de uma fenda ("blende"). Esses átomos adentravam a região de campo magnético produzido pelos pares norte-sul da figura. Nota-se que o campo é mais intenso na região norte do imã e menos intenso na região sul, por conta do formato do imã, que aumenta a concentração de linhas de campo na região "pontuda" da porção norte.

Classicamente, o resultado desse experimento seria simples: se qualquer momento de dipolo magnético fosse permitido aos átomos de prata, então na chapa do lado direito do aparato ("glassplatte") teríamos uma distribuição uniforme de átomos ao longo do eixo z (esse eixo é o eixo que parte do polo sul em direção ao polo norte, enquanto o eixo x é o eixo posicionado no sentido dos átomos de prata viajando no aparato. O eixo y seria, portanto, um eixo apontando perpendicularmente à trajetória, para o fundo do desenho).

No entanto, o resultado do experimento é outro: existem apenas dois pontos distintos onde os átomos de prata atingem a chapa, ambos posicionados ao longo do eixo z, como mostra a figura nos quadradinhos pretos. Essa é uma prova experimental de que, de fato, o momento magnético intrínseco é quantizado. (De fato, a teoria da mecânica quântica foi construída com bases experimentais, para que tais resultados pudessem ser previstos com antecedência).

Do que revisamos acima sobre dipolos magnéticos, podemos explicar quanticamente com a ideia de spin o que acontece nesse experimento (note: o campo $\boldsymbol{B}$ está na direção z, majoritariamente): a porção de átomos que possui a componente z do momento magnético alinhada na direção do campo, isto é, $m = \frac{\hbar}{2}$, serão "sugados" na direção do campo e irão, portanto, divergir do seu caminho retilíneo que vinham seguindo, ligeiramente para cima; átomos de componente $m = -\frac{\hbar}{2}$ serão repelidos, movendo-se ligeiramente para baixo de sua trajetória. Portanto, teríamos originado na chapa dois pontos distintos, simétricos em relação ao ponto onde os átomos de prata originalmente cairiam se não houvesse $\boldsymbol{B}$ algum. E esse é o resultado experimental obtido.

Vale ressaltar um parêntese aqui: consideramos que **todo** o momento magnético dos átomos é devido **unicamente** a seu spin. De fato, essa consideração pode ser feita uma vez

que não estamos tratando aqui de um corpo carregado, passível à precessão da força de Lorentz. Além disso, as dimensões do aparato experimental são tais que podemos desprezar a característica ondulatória das partículas (ou seja, o tratamento quântico do problema deve girar em torno apenas do spin, não da natureza da função de onda orbital). A descrição quantitativa das dimensões desse aparato encontra-se no volume 1 do Cohen, na página 392.

No fundo, o aparato de Stern-Gerlach funciona como um **filtro**: injetamos nele um feixe de partículas que possuem a componente z do momento angular de forma aleatória, ou seja, com uma porção de $|+\rangle$ e uma porção de $|-\rangle$, e dele saem dois feixes que são, claramente, ou up ou down. Aqui começa a parte interessante desse experimento.

Vamos supor que estamos interessados na saída das partículas up, $|+\rangle$. Então vedamos a saída das down e seguimos a trajetória das $|+\rangle$. Vamos adicionar **outro filtro SG** para as partículas $|+\rangle$. É importante ressaltar a seguinte consideração: **a posição do segundo filtro é tal que as partículas up não têm tempo de evoluir temporalmente**. Se isso fosse possível, então o resultado do experimento não seria interessante. O importante é que todas as partículas que entrem no segundo filtro sejam, de fato, up.

Qual seria a saída desse segundo filtro? Bem, claramente esse resultado depende da **direção** que o campo magnético do filtro é colocado. Supusemos, no primeiro filtro, que o campo estava alinhado no eixo z. Vamos agora supor que o campo do segundo filtro esteja alinhado num eixo n, que é um eixo **entre** z e y, formando um ângulo θ com z. Ou seja, o vetor $\hat{n}$ que caracteriza o eixo (assim como o vetor $\hat{k}$ caracteriza o eixo z) pode ser escrito como:

$$\hat{n} = (0, \sin\theta\,, \cos\theta)$$

Isto é, $\hat{n}$ é um versor tão genérico que pode representar os próprios eixos y e z se for usado com os ângulos convenientes. Isso é bom por trazer generalidade ao resultado matemático: se $\theta = 0$, então $\hat{n} = (0, 0, 1) = \hat{k}$ e ele está representando o eixo z; se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $\hat{n} = (0, 1, 0) = \hat{\jmath}$ e ele está representando o eixo y.

Vamos calcular qual é a fração de átomos que irão "sobreviver" ao segundo filtro, isto é, o os que são up nesse novo eixo designado por $\hat{n}$ depois de serem conhecidamente up em z. Em notação matemática, vamos calcular a probabilidade P de um átomo passar pelo filtro F_2, sabendo que ele passou pelo filtro F_1:

$$P(passe\ \ F_2/passou\ F_1)$$

Essa probabilidade, usando a notação de bras e kets, pode ser escrita da seguinte forma: queremos a quantidade de partículas que é $|+_n\rangle$ das partículas que já são $|+_z\rangle$. Ou seja, queremos $\langle +_n|+_z\rangle$. Porém, a probabilidade é o módulo dessa quantidade ao quadrado:

$$P(passe\ \ F_2/passou\ F_1) = |\langle +_n|+_z\rangle|^2$$

Claramente, $|+_z\rangle$ é um autovetor do operador $\mathbb{S}_z$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$ e $|+_n\rangle$ é um autovetor do operador $\mathbb{S}_n$, com autovalor $\frac{\hbar}{2}$. Vamos escrever o vetor $|+_n\rangle$ como uma combinação linear de $|+_z\rangle$ e $|-_z\rangle$:

$$|+_n\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle$$

Nesse caso, a probabilidade de interesse será simplesmente $|a|^2$. Precisamos calcular essa quantidade. O operador $\mathbb{S}_n$ pode ser escrito como uma combinação linear das matrizes de Pauli, uma vez que vimos que elas são construídas como uma "base" para os operadores $\mathbb{S}_{x,y,z}$. Isto é,

$$\mathbb{S}_n = \frac{\hbar}{2}\left(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z\right)$$

Os coeficientes n_x, n_y e n_z foram definidos quando definimos $\hat{n}$: $n_x = 0$, $n_y = \sin\theta$ e $n_z = \cos\theta$. Dessa forma, podemos escrever $\mathbb{S}_n$ da seguinte maneira:

$$\mathbb{S}_n = \frac{\hbar}{2}\left(\sin\theta\,\sigma_y + \cos\theta\,\sigma_z\right)$$

$$\mathbb{S}_n = \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i\,sin\theta \\ i\sin\theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\right]$$

$$\therefore \mathbb{S}_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Deve ficar claro ao leitor que essa é a representação matricial de $\mathbb{S}_n$ na base $|+_z\rangle, |-_z\rangle$, pois foi nessa base que construímos σ_y e σ_z na sessão "matrizes de Pauli".

Sabemos que $|+_n\rangle$ é um autovetor de $\mathbb{S}_n$, de forma que:

$$\mathbb{S}_n|+_n\rangle = \frac{\hbar}{2}|+_n\rangle$$

Na representação usando a base $|\pm_z\rangle$:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

E o problema de encontrar a resume-se a resolver a equação de autovalores-autovetores acima. Lembremos que uma das linhas da matriz contém informação redundante acerca dos valores de a e b, de forma que usaremos apenas a linha superior, juntamente com a condição de normalização do ket $|+_n\rangle$.

$$a\cos\theta - ib\sin\theta = a$$
$$a(1-\cos\theta) = -ib\sin\theta$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1-\cos\theta}{-i\sin\theta} = \frac{i(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

Poremos arrumar essa expressão usando relações trigonométricas: $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$ e $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

$$\frac{b}{a} = \frac{i.2.\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{b}{a} = \frac{i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}$$

Se fizermos a suposição de que $b = i\sin\frac{\theta}{2}$ e $a = \cos\frac{\theta}{2}$, vemos que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ e temos satisfeita a condição de normalização. Assim, encontramos não só o valor de a, mas também o valor de b (que, no momento, não nos é de muita utilidade). Portanto, a probabilidade que procuramos é:

$$P(passe\ \ F_2/passou\ F_1) = |a|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

Esse resultado é coerente? Bem, se $\theta = 0$, então $P = 1$ e todos os que passaram por F_1 passarão por F_2, o que é totalmente coerente pois $\theta = 0$ indica que o segundo filtro Stern-Gerlach está alinhado na mesma direção do primeiro. Se $\theta = \pi$, então $P = 0$, o que indica que nenhum átomo que passou por F_1 passará por F_2, o que também é muito coerente, uma vez que $\theta = \pi$ indica um filtro F_2 com eixo de $\boldsymbol{B}$ apontando no sentido negativo de z. Para passar por esse filtro, os átomos deveriam ser $|-_z\rangle$, mas nenhum desses passou por F_1, de forma que nenhum, nesse caso, passaria por F_2.

A próxima etapa talvez seja a mais intrigante de todo esse experimento, e é nela que se prova a sutileza de uma medida quântica. Vamos adicionar um terceiro filtro F_3 depois do filtro F_2 e estudar sua saída (relembrando: definimos a "saída" de um filtro SG como os átomos que estão alinhados com o campo no eixo do equipamento). O novo filtro fará um ângulo ϕ com o eixo z, de forma a ser caracterizado por um novo vetor $\widehat{n_2}$ dado por:

$$\widehat{n_2} = (0, \sin\phi\,, \cos\phi)$$

Qual é a probabilidade de um átomo passar por F_3 dado que ele já passou por F_2?

$$P(passe\ \ F_3/passou\ F_2) = \left|\langle +_{n_2}|+_n\rangle\right|^2$$

Vamos usar uma notação um pouquinho mais simples: $\left|\langle +_{n_2}|+_n\rangle\right|^2 = \left|\langle +_\phi|+_\theta\rangle\right|^2$. Ou seja, queremos saber quantos estão alinhados em ϕ, dado que já estavam alinhados em θ. Vamos usar a relação de completeza, que nesse caso se escreve muito facilmente:

$$\mathbb{I} = |+_z\rangle\langle +_z| + |-_z\rangle\langle -_z|$$

Inserindo:

$$\left|\langle +_\phi|+_\theta\rangle\right|^2 = \left|\langle +_\phi|+_z\rangle\langle +_z|+_\theta\rangle + \langle +_\phi|-_z\rangle\langle -_z|+_\theta\rangle\right|^2$$

Note: se $|+_\theta\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle$, então $\langle +_z|+_\theta\rangle = a$ e $\langle -_z|+_\theta\rangle = b$:

$$\left|\langle +_\phi | +_\theta \rangle\right|^2 = \left|\langle +_\phi | +_z \rangle a + \langle +_\phi | -_z \rangle b\right|^2 = \left|\langle +_\phi | +_z \rangle \cos\frac{\theta}{2} + \langle +_\phi | -_z \rangle \left(i \sin\frac{\theta}{2}\right)\right|^2$$

O interessante aqui é que não precisamos fazer mais conta alguma. Se notarmos que a relação que foi feita para θ vale para qualquer ângulo que seja definido da mesma forma, ou seja, vale para ϕ, podemos inferir que, se $|+_\phi\rangle = c|+_z\rangle + d|-_z\rangle$, então os coeficientes c e d serão dados **da mesma forma que $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$**, alterando θ por ϕ:

$$c = \langle +_z | +_\phi \rangle = \cos\frac{\phi}{2}$$
$$d = \langle -_z | +_\phi \rangle = i \sin\frac{\phi}{2}$$

Assim, os termos $\langle +_\phi | +_z \rangle$ e $\langle +_\phi | -_z \rangle$ são os complexos conjugados de c e d. Portanto,

$$\left|\langle +_\phi | +_\theta \rangle\right|^2 = \left|\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2$$

Usando a relação trigonométrica do cosseno da subtração, obtemos a probabilidade procurada como:

$$P(passe\ \ F_3/passou\ F_2) = \cos^2\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Esse resultado faz sentido? Bem, se $\theta = \phi$, então tudo que passou por F_2 passa por F_3, já que os filtros estão na mesma direção. Se estiverem defasados de π, então nada passa por F_3. Esse resultado é coerente com a fórmula obtida.

Dado que o átomo passou por F_1 e F_2, qual é a probabilidade de ele passar por F_3? Usando a teoria de probabilidades,

$$P(F_3/F_1) = P(F_2/F_1) * P(F_3/F_2)$$

E isso equivale a:

$$P(F_3/F_1) = \cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Mas qual é a curiosidade nesse resultado? Bem, façamos o seguinte: suponha $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pi$. Isto é, o segundo filtro está alinhado na direção de y, enquanto o terceiro está alinhado na direção de $-z$. Se não houvesse um segundo filtro, o sistema se comportaria de forma trivial: apenas $|+_z\rangle$ passariam do primeiro filtro e, ao chegarem ao terceiro, seriam todos barrados, e nada passaria por ele. No entanto, com o segundo filtro entre os dois, observe:

$$P(F_3/F_1) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Adicionar o segundo filtro fez com que a distribuição de spins dos átomos **mudasse**. Isso mostra como **realizar uma medida em mecânica quântica altera o estado do sistema** (medir, nesse caso, é a aplicação do campo magnético, que separa os átomos de acordo com

seu spin e, portanto, mede o spin). Essa é a relevância do experimento de Stern Gerlach: muito diferente da mecânica clássica, o simples fato de realizarmos uma medida altera o sistema que está sendo medido. O segundo filtro não somente **mede** o spin das partículas, ele **muda** o spin das partículas.

d) Evolução temporal de uma partícula num campo magnético

Suponhamos que o campo magnético seja uniforme, igual a $\boldsymbol{B}_0$, na direção do eixo z. Se γ é a razão giromagnética dessa partícula (no elétron, $\gamma = \frac{2\mu_B}{\hbar}$, como foi visto), então seu momento magnético é $M = \gamma\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é seu momento angular clássico. Sua energia potencial se torna:

$$U = -M.\boldsymbol{B}_0 = -MB_0 = -\gamma B_0 \mathcal{L}_z$$

Definamos $\omega_0 = -\gamma B_0$. Lembre-se: $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{k}$. Dessa forma, quantizar o operador energia, $U = \omega_0\mathcal{L}_z$, torna-se trivial: construímos o operador hamiltoniano $\mathbb{H}$ como:

$$\mathbb{H} = \omega_0\mathbb{S}_z$$

Os autovalores e autovetores de $\mathbb{H}$ são conhecidos, uma vez que os de $\mathbb{S}_z$ também são:

$$\mathbb{H}|+\rangle = +\frac{\hbar\omega_0}{2}|+\rangle$$
$$\mathbb{H}|-\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|-\rangle$$

Existem, portanto, dois níveis de energia permitidos para a partícula: $E_+ = +\hbar\omega_0/2$ e $E_- = -\hbar\omega_0/2$. A separação entre eles, $\hbar\omega_0$, é proporcional à intensidade do campo magnético.

Vamos supor que, no tempo $t = 0$, o estado de spin de uma partícula possa ser escrito como:

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\phi}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\phi}{2}}|-\rangle$$

Note que esse estado é uma generalização do estado $a|+\rangle + b|-\rangle$, supusemos que os números a e b possam possuir uma fase complexa que fosse coerente com o resultado que antes obtivemos para $a = \cos\frac{\theta}{2}$ e $b = i\sin\frac{\theta}{2}$. Esse é o estado mais geral que podemos ter para um spin. Como o hamiltoniano $\mathbb{H}$ independe do tempo, a porção temporal do ket $|\psi\rangle$ é dado pela exponencial temporal, de forma que

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\phi}{2}}e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\phi}{2}}e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}|-\rangle$$

Como $E_\pm = \pm\frac{\hbar\omega_0}{2}$, ficamos com:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i(\phi+\omega_0 t)}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\phi+\omega_0 t)}{2}}|-\rangle$$

Claramente, pela expressão acima, não existe mudança no ângulo θ na evolução temporal do sistema, enquanto ϕ aumenta linearmente com o tempo. Ou seja,

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta \\ \phi(t) = \phi + \omega_0 t \end{cases}$$

O que isso quer dizer? Que a partícula mantém seu eixo fixo num ângulo θ com relação ao eixo z, e gira em torno dele com frequência angular ω_0. Isso mostra que o eixo da partícula gira de forma a formar um "cone", enquanto ela mesma gira. Esse fenômeno recebe o nome de **precessão de Larmor**.

4. Considerações Finais

Espero que o trabalho aqui exibido tenha ajudado o leitor a compreender melhor o conceito de spin em mecânica quântica. Uma abordagem mais completa do que foi tratado aqui pode ser visto no livro do Cohen, base para esse estudo.