Mecânica Quântica [07]

Evolução temporal em mecânica quântica

Exercício 01

Considere o operador de deslocamento temporal infinitesimal que satisfaz a propriedade de composição, $\mathbf{U}(t_0 + dt, t_0)$. Verifique a unitariedade do operador. Quais considerações você levou em consideração? O operador de deslocamento temporal infinitesimal pode ser escrito em função do hamiltoniano (H). Por quê? Desenvolva a expressão matemática.

Exercício 02

Obtenha a equação de Schrödinger para o operador quântico de evolução temporal:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{U}(t, t_0) \ .$$

Obtenha, em seguida, a equação de Schrödinger para um ket de estado.

Exercício 03

Mostre que o módulo da amplitude de correlação é igual a 1 para todos os tempos, quando temos sistema descrito por um autoestado de **H**. Para um caso geral, em que ket é descrito por superposição de kets da base, $\{|a'\rangle\}$, estime o módulo da amplitude de correlação. Quais as implicações desta estimativa?

Exercício 04

Um elétron é submetido à ação de um campo magnético uniforme, independente do tempo e de intensidade B, e que aponta na direção z positiva. Em $t = 0$ sabe-se que o elétron se encontra em um autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário no plano $x – z$ e que faz um ângulo β com o eixo z. **(a)** Obtenha a probabilidade de achar o elétron no estado $S_x = \hbar/2$ como função do tempo. **(b)** Ache o valor esperado de S_x como função do tempo. **(c)** Mostre que as respostas fazem sentido nos casos extremos (i) $\beta \to 0$ e (ii) $\beta \to \pi/2$.

Hugo Mello

Exercício 05

Mostre que o valor esperado de um observável calculado com base em um estado não estacionário é dependente do termo de frequências angulares:

$$\omega_{a"a'} = \frac{\left(E_{a"} - E_{a'}\right)}{\hbar} \ .$$

Exercício 06

A partir do conceito de amplitude de correlação, mostre a relação de incerteza tempo-energia:

$$\Delta t \Delta E \simeq \hbar \ .$$

Discuta esse resultado.

Exercício 07

Discorra sobre as principais diferenças entre a representação de Schrödinger e de Heisenberg da mecânica quântica.

Exercício 08

Deduza a equação de movimento de Heisenberg:

$$\frac{d\mathbf{A}^H}{dx} = \frac{1}{i\hbar}\left[\mathbf{A}^H, \mathbf{H}\right] \ .$$

Quando a comparamos com a equação clássica de movimento na forma de parênteses de Poisson, qual importante conclusão pode-se obter?

Exercício 09

Deduza a relação conhecida por Teorema de Ehrenfest:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle \mathbf{x} \rangle = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{p} \rangle = -\left\langle \nabla V\left(\mathbf{x}\right)\right\rangle \ .$$

Exercício 10

Seja *x(t)* o operador de coordenada para uma partícula livre em uma dimensão na representação de Heisenberg. Estime:

$$\left[x(t), x(0)\right] \ .$$

Exercício 11

Mostre que a amplitude de transição independe da representação adotada.

Exercício 12

Considere um pacote de onda de uma partícula livre em uma dimensão. Em $t = 0$ ele satisfaz a relação de mínima incerteza:

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \ .$$

Além disso, sabemos que:

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0 \ .$$

Usando a representação de Heisenberg, obtenha $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_t$ como função de t ($t \geq 0$) quando $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_{t=0}$ for dado.