Lista 1 Mecânica Quântica

(Dated: 20 de março de 2015)

Para os exercícios seguintes, considere a notação abaixo:

$$\langle\vec{r}|\vec{r}'\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \qquad \int d\vec{r}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = \mathbb{1}, \tag{1}$$

$$\langle\vec{k}|\vec{k}'\rangle = \delta(\vec{k}-\vec{k}'), \quad \int d\vec{k}|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| = \mathbb{1}, \tag{2}$$

$$\langle\vec{r}|\varphi\rangle = \varphi(\vec{r}), \quad \langle\vec{k}|\varphi\rangle = \tilde{\varphi}(\vec{k}), \quad \langle\vec{k}|\vec{r}\rangle = \frac{e^{\imath\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}}, \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\mathbb{r}} = \mathbb{x}\hat{x} + \mathbb{y}\hat{y} + \mathbb{z}\hat{z}, \tag{4}$$

$$\overrightarrow{\mathbb{k}} = \mathbb{k}_x\hat{x} + \mathbb{k}_y\hat{y} + \mathbb{k}_z\hat{z}. \tag{5}$$

Exercício 1 Obtenha $(\overrightarrow{\mathbb{r}}|\vec{r}\rangle)^\dagger$ e $(\overrightarrow{\mathbb{p}}|\vec{r}\rangle)^\dagger$ onde $\mathbb{p} = \hbar\mathbb{k}$.

Exercício 2 Mostre que:

a) $\langle\varphi|\varphi\rangle = \int d\vec{r}|\varphi(\vec{r})|^2 = \int d\vec{k}|\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2$

b) $\langle\varphi|\overrightarrow{\mathbb{r}}|\varphi\rangle = \langle\vec{r}\rangle$.

c) $\langle\varphi|\overrightarrow{\mathbb{r}}^2|\varphi\rangle = \langle\vec{r}^2\rangle$.

d) $\langle\varphi|\overrightarrow{\mathbb{p}}|\varphi\rangle = \hbar\langle\vec{k}\rangle$.

e) $\langle\varphi|\overrightarrow{\mathbb{p}}^2|\varphi\rangle = \hbar^2\langle\vec{k}^2\rangle$.

f) $\langle\varphi|\overrightarrow{\mathbb{A}}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\overrightarrow{\mathbb{A}}|\varphi\rangle^*$.

Exercício 3 Obtenha o operador ρ tal que $\langle\vec{r}|\rho|\vec{r}\rangle = |\varphi(\vec{r})|^2$ e $\langle\vec{k}|\rho|\vec{k}\rangle = |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2$.

Exercício 4 Mostre que se $\overrightarrow{\mathbb{r}} = \mathbb{x}_1\hat{x} + \mathbb{x}_2\hat{y} + \mathbb{x}_3\hat{z}$ e $\overrightarrow{\mathbb{k}} = \mathbb{k}_1\hat{x} + \mathbb{k}_2\hat{y} + \mathbb{k}_3\hat{z}$ então

$$[\mathbb{x}_i, \mathbb{x}_j] = [\mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j] = 0, \quad [\mathbb{x}_i, \mathbb{p}_j] = \imath\hbar\delta_{i,j}.$$

Exercício 5 Considere o operador $\mathbb{A}$. O que significa $\mathbb{A}^m$?

Exercício 6 Se $\mathbb{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$, quanto vale $e^{\mathbb{H}}|\varphi\rangle$?

Exercício 7 Considere $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ e mostre que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = [\mathbb{H}, \rho(t)].$$

O operador ρ é denominado de operador densidade.

Exercício 8 Considere dois operadores arbitrários $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$. Mostre que:

$$e^{\mathbb{A}}e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}e^{[\mathbb{A},\mathbb{B}]/2}.$$

Exercício 9 Seja

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\imath E_n t/\hbar}|\varphi_n\rangle,$$

onde $\mathbb{H}|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$. Mostre que

$$\langle\psi(t)|\mathbb{H}|\psi(t)\rangle = \langle E\rangle, \quad \langle\psi(t)|\mathbb{H}^2|\psi(t)\rangle = \langle E^2\rangle.$$

Exercício 10 Considere

$$\mathbb{H} = \frac{\mathbb{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbb{x}^2.$$

Mostre que:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\imath(E/\hbar)t}|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle\cdots|\varphi_d\rangle = e^{\imath(E/\hbar)t}|m_1 m_2 \ldots m_d\rangle,$$

onde

$$E = \hbar\omega(m_1 + m_2 + \cdots + m_d) + d\hbar\omega/2,$$

com d sendo a dimensionalidade do espaço.

Exercício 11 O traço de um operador $\mathbb{A}$ é definido por:

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \sum_i \langle u_i|\mathbb{A}|u_j\rangle,$$

onde $\{|u_i\rangle\}$ formam uma base discreta ortonormal, e por

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \int d\alpha\langle w_\alpha|\mathbb{A}|w_\alpha\rangle,$$

onde $\{|w_\alpha\rangle\}$ forma uma base contínua ortonormal. Então,

$$\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad \int d\alpha|w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| = \mathbb{1}.$$

a) Mostre que o traço de um operador não depende da base considerada. (Dica: considere outras bases ortonormais)

b) Mostre a propriedade cíclica do traço: $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$.

Exercício 12 Quanto vale

a) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger$?

b) $(|u\rangle\langle v|)^\dagger$?

c) $(\mathbb{A}^\dagger)^\dagger$?