Mecânica Quântica

Revisão de conceitos – Espaços vetoriais e base de espaço vetorial

Questão 01

Sendo $IR^2 = \{(x, y) \mid x, y \in IR\}$. Podemos defini-lo como espaço vetorial sobre IR desde que se definam adição e multiplicação por um número real assim:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ e}$$

$$a\,(x, y) = (ax, ay)$$

Faça a verificação dos axiomas de espaço vetorial.

Questão 02

Para o $IR^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in IR\}$. A adição e multiplicação de escalares são definidas por:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \text{ e}$$

$$a\,(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

Faça a verificação dos axiomas de espaço vetorial.

Questão 03

Mostre que o conjunto definido por $V = \{u \in IR \mid u > 0\}$, com a operação de adição definida por:

$$u \oplus v = uv, \forall\, u, v \in V$$

E com a multiplicação de um elemento de V por um número real dada por:

$$\alpha u = u^{\alpha}, \forall\, u \in V \text{ e } \forall\, \alpha \in IR$$

É um espaço vetorial.

Questão 04

Mostre que o conjunto $W = \{(x, y) \in IR^2 \mid y = 0\}$ é um subespaço vetorial do IR^2.

Questão 04

Mostrar que é subespaço de $M_2(IR)$ o seguinte subconjunto:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid y = -x \right\}$$

Questão 05

Consideremos no IR^3 os seguintes subespaços vetoriais:

$$U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)] \text{ e } V = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

Determinar um sistema de geradores de $U \cap V$.

Questão 06

Verifique quais dos seguintes conjuntos de vetores do espaço vetorial IR^3, são linearmente independentes.

a) {(1, 1, 0), (1, 4, 5), (3, 6, 5)}
b) {(1, 2, 3), (1, 4, 9), (1, 8, 27)}
c) {(1, 2, 1), (2, 4, 2), (5, 10, 5)}

Questão 07

Se u, v e w são vetores de um espaço vetorial V tais que $u \in [w]$ e $v \in [w]$, mostre que {u, v} é linearmente dependente.

Questão 08

Mostre que o subconjunto {1, i} é uma base de $\mathbb{C}$ sobre IR.

Questão 09

Mostre que o subconjunto de vetores:

$$\{(0, 2, 2), (0, 4, 1)\}$$

É uma base do seguinte subespaço vetorial do IR^3:

$$U = \{(x, y, z) \in IR^3 \mid x = 0\}$$

Questão 10

Determine uma base e a dimensão do espaço solução do seguinte sistema:

$$S = \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Questão 11

Mostre que as matrizes a seguir formam uma base de $M_2(IR)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{e} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$