Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Física para Engenharia II - 4320196
Lista de exercícios 3 - 2014

(Quando necessário utilize $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$)

1. Um oscilador não amortecido de massa m e frequência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$, partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x(t)$.

R: $x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\left[\mathrm{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\right]$.

2. (Poli 2006) Um corpo de massa m desliza sobre um plano horizontal sem atrito sujeito a três forças: uma força elástica resultante da ação de uma mola de constante elástica k, uma força devido À resistência viscosa do meio, caracterizada pela constante de resistência viscosa ρ e uma força externa periódica $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$, sendo Ω a frequência externa.

(a) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento do corpo e encontre a sua solução estacionária.

(b) Considerando que $m = 50\,\mathrm{kg}$, $k = 5000\,\mathrm{N/m}$, $F_0 = 50\,\mathrm{N}$ e $\rho = 500\,\mathrm{kg/s}$, calcule a frequência natural do sistema e o seu fator de qualidade.

(c) No regime estacionário, usando os valores do item anterior, determine o valor de Ω para o qual a amplitude do movimento é máxima.

(d) No regime estacionário, usando os valores do item (b), determine o valor da amplitude máxima.

R: (a) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$, $x(t) = A(\Omega)\cos[\Omega t + \Phi(\Omega)]$, $A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}}$ e $\Phi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$, (b) $\omega_0 = 10\,\mathrm{s^{-1}}$ e $Q = 1$, (c) $\Omega_R = 5\sqrt{2}\,\mathrm{s^{-1}}$ e (d) $A_{max} = \frac{1}{50\sqrt{3}}\,\mathrm{m}$.

3. (Poli 2007) Um corpo de massa $50\,\mathrm{g}$ está preso a uma mola de constante $k = 20\,\mathrm{N/m}$ e oscila, inicialmente, livremente. Esse oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0{,}9\,\mathrm{kg/s}$. Depois disso o oscilador, ainda no meio viscoso, é excitado por uma força externa $F = F_0\cos(\Omega t)$, onde $F_0 = 9{,}0\,\mathrm{N}$ e $\Omega = 20{,}0\,\mathrm{rad/s}$.

(a) Determine a frequência natural do sistema.

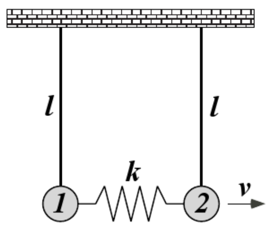
(b) Qual o regime de oscilação do sistema quando imerso no meio viscoso, mas antes de ser excitado pela força externa? Justifique a resposta.

(c) Depois que a força externa é aplicada e que o sistema entrou no regime estacionário, qual o valor da amplitude do movimento?

(d) Qual deveria ser o valor exato da frequência externa de excitação para que a amplitude de oscilação, no regime estacionário, fosse máxima?

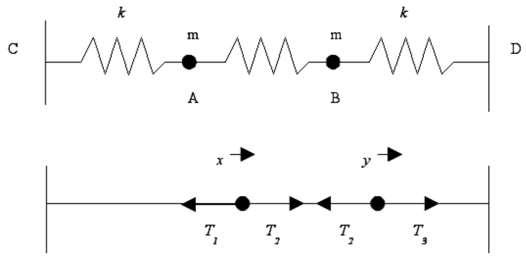
R: (a) $\omega_0 = 20\,\mathrm{s^{-1}}$; (b) Regime subcrítico ($\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$) ; (c) $A = 0{,}5\,\mathrm{m}$ e (d) $\Omega_R = \sqrt{238}\,\mathrm{s^{-1}}$.

4. Duas partículas de mesma massa $m = 250\,\mathrm{g}$, estão penduradas no teto por barras idênticas, de comprimento $l = 0{,}4\,\mathrm{m}$ e massa desprezível, e estão ligadas uma À outra por uma mola de constante elástica $k = 25\,\mathrm{N/m}$. No instante $t = 0$, a partícula 2 (figura abaixo) recebe um impulso que lhe transmite uma velocidade $v = 15\,\mathrm{cm/s}$. Determine os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das posições de equilíbrio das duas partículas (em cm) para $t > 0$.



R: $x_1(t) = 1{,}5\,\mathrm{sen}(5t) - 0{,}5\,\mathrm{sen}(15t)$ e $x_2(t) = 1{,}5\,\mathrm{sen}(5t) + 0{,}5\,\mathrm{sen}(15t)$.

5. Considere duas partículas A e B cada uma com massa m conectadas por uma mola de constante elástica k e comprimento natural a. Cada partícula está ligada a dois suportes C e D por duas molas com as mesmas características da primeira mola. Os dois suportes são separados por uma distância $3b$, como mostrado na figura abaixo. Em um dado instante de tempo t o deslocamento das partículas A e B é x e y a partir da posição de equilíbrio, resultando nas forças mostradas na figura. Calcule as frequências de oscilação do sistema.

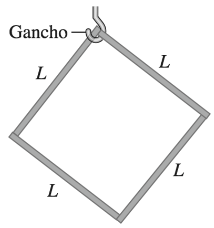


R: $\omega_1 = \frac{k}{m}$ e $\omega_2 = \frac{3k}{m}$.

6. Quando deslocados das posição de equilíbrio, os dois átomos da molécula de H_2 são submetidos a uma força restauradora $F_x = -kx$ com $k = 580 N/m$. Calcule a frequência da oscilação da molécula de H_2.

7. Um dispositivo experimental e sua estrutura de suporte para instalação a bordo da *International Space Station* deve funcionar como um sistema massa-mola com subamortecimento com massa de 108 kg e constante de mola igual a 2,1 $\times 10^6 N/m$. Uma exigência da Nasa é que não ocorra ressonância das oscilações forçadas em nenhuma frequência menor do que 35 Hz. O dispositivo experimental satisfaz essa exigência?

8. Um objeto quadrado de massa m é formado de quatro varetas finas idênticas, todas de comprimento L, amarradas juntas. Esse objeto é pendurado em um gancho pelo seu canto superior. Se ele for girado levemente para a esquerda e depois solto, em que frequência ele irá oscilar para a frente e para trás?



R: $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5}}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0{,}921\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$.

Lista de exercícios 3 - continuação

Os exercícios abaixo foram extraídos do livro: Curso de Física Básica, vol. 2, 4 ed., H. Moysés Nussenzveig.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 4

1. Verifique que a (4.2.17) é solução da (4.1.2) para $\omega_0 = \gamma/2$, e que a (4.3.20) satisfaz a equação diferencial (4.3.4) e as condições iniciais (4.3.17).

$$x_1(t) = te^{-\frac{\gamma}{2}t} \tag{4.2.17}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \tag{4.1.2}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \,\text{sen}(\omega_0 t) \quad (\omega = \omega_0)} \tag{4.3.20}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \tag{4.3.4}$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{4.3.17}$$

2. Um oscilador harmônico amortecido tem um fator $Q = 10$. Partindo da posição de equilíbrio, é-lhe comunicada uma velocidade inicial de 5 m/s. Verifica-se que a energia total do oscilador diminui numa taxa, por segundo, igual a 4 vezes sua energia cinética instantânea. Calcule o deslocamento x do oscilador (em m) em função do tempo t (em s).

3. Seja r a razão entre dois máximos consecutivos do deslocamento de um oscilador livre fracamente amortecido ($\gamma \ll \omega_0$). O parâmetro $\delta = |\ln r|$ chama-se *decremento logarítmico*. (a) Relacione δ com a constante de amortecimento γ e com o período τ do oscilador. (b) Se n é o número de períodos necessário para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial, ache δ.

4. Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0. Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 3,68 m, após 1 segundo. (a) Qual é o valor de v_0? (b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2$ m com a mesma velocidade inicial v_0, qual seria o valor de x no instante t?

5. Uma partícula de massa m move-se na direção z no interior de um fluido, cuja resistência de atrito é da forma $-\rho\dot{z}$ ou seja, é proporcional à velocidade ($\rho > 0$). A força peso é desprezível em confronto com a resistência de atrito durante o intervalo de tempo considerado. Dadas a posição inicial z_0 e a velocidade inicial v_0, ache $z(t)$.

6. Para pequenas partículas em queda livre na atmosfera, a resistência do ar é proporcional à velocidade, ou seja, orientando o eixo z verticalmente para baixo, é da forma $-\rho\dot{z}$ ($\rho > 0$). Considere a queda livre de uma tal partícula a partir de uma posição inicial z_0 e velocidade inicial v_0, levando em conta a força peso (ao contrário do Problema 5). Ache $z(t)$. *Sugestão*: Usando o método da Seção 4.3 (a), procure uma solução particular da equação diferencial de movimento, que é inomogênea. Para isto, leve em conta que, para tempos grandes, a partícula tende a cair com velocidade constante (por quê?), que se chama *velocidade terminal*.

7. Um oscilador não amortecido de massa m e freqüência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0$ sen (ωt), partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x(t)$.

8. Um oscilador não amortecido de massa m e freqüência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0 \exp(-\beta t)$, onde $\beta > 0$ é uma constante. Inicialmente, o oscilador encontra-se em repouso na posição de equilíbrio. Ache o deslocamento $x(t)$. *Sugestão*: Use o método da Seção 4.3 (a), procurando uma solução particular da equação diferencial inomogênea de comportamento análogo ao de F.

9. Um bloco cúbico de 10 cm de aresta e densidade 8 g/cm^3 está suspenso do teto por uma mola de constante elástica 40 N/m e comprimento relaxado de 0,5 m, e mergulhado dentro de um fluido viscoso de densidade 1,25 g/cm^3. Na situação considerada, a resistência do fluido é proporcional à velocidade, com coeficiente de proporcionalidade $\rho = 2$ N.s/m. Inicialmente em equilíbrio, o bloco é deslocado de 1 cm para baixo e solto a partir do repouso. Com origem no teto e eixo z vertical orientado para baixo (fig. P.1), determine a coordenada z da extremidade superior do bloco em função do tempo.

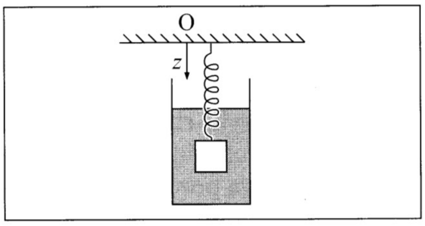


Figura P.1

10. Para um oscilador de massa m, freqüência livre ω_0 e constante de amortecimento γ, sujeito à força externa $F = F_0 \cos(\omega t)$, calcule: (a) O valor exato de ω para o qual a amplitude de oscilação estacionária A é máxima, e o valor máximo de A; (b) O valor exato de ω para o qual a velocidade tem amplitude ωA máxima, e o valor do máximo.

11. Uma pessoa está segurando uma extremidade A de uma mola de massa desprezível e constante elástica 80 N/m. Na outra extremidade B, há uma massa de 0,5 kg suspensa, inicialmente em equilíbrio. No instante $t = 0$, a pessoa começa a sacudir a extremidade A (fig. P.2), fazendo-a oscilar harmonicamente com amplitude de 5 cm e período de 1 s. (a) Calcule o deslocamento z da massa em relação à posição de equilíbrio, para $t > 0$. (b) Calcule a força total $F(t)$ exercida sobre a extremidade A para $t > 0$.

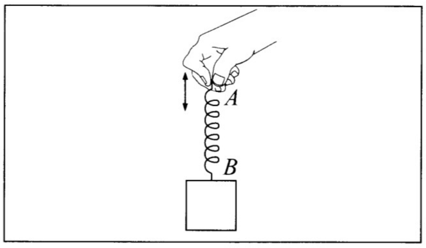


Figura P.2

12. Um bloco de 1 kg, ligado a uma parede vertical por uma mola de massa desprezível e constante elástica 100 N/m, inicialmente relaxada, pode deslocar-se sobre uma superfície horizontal com coeficiente de atrito (estático e cinético) $\mu = 0{,}25$. No instante $t = 0$, o bloco é deslocado de 24,5 cm para a direita e solto a partir do repouso. Descreva o movimento subseqüente. *Observação*: Como a força de atrito tem sinal oposto ao da velocidade, é preciso tratar separadamente cada semiperíodo de oscilação.

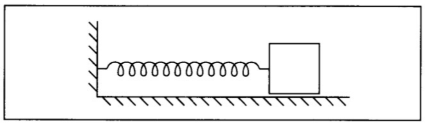


Figura P.3

13. Seja $x = a\cos(\omega t) + b\,\text{sen}(\omega t)$ a solução estacionária para o movimento de um oscilador amortecido sob a ação da força $F = F_0\cos(\omega t)$. Mostre que somente a componente em quadratura contribui para a potência média $\bar{P}$. Calcule $\bar{P}$.

14. Duas partículas de mesma massa, igual a 250 g, estão suspensas do teto por barras idênticas, de 0,5 m de comprimento e massa desprezível, e estão ligadas uma à outra por uma mola de constante elástica 25 N/m. No instante $t = 0$, a partícula 2 (fig. P.4) recebe um impulso que lhe transmite uma velocidade de 10 cm/s. Determine os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das posições de equilíbrio das duas partículas (em cm) para $t > 0$.

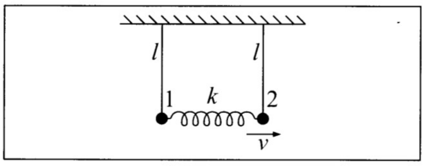


Figura P.4

15. Duas partículas de mesma massa m (fig. P.5) deslocam-se com atrito desprezível sobre uma superfície horizontal, presas por molas de constante elástica k a paredes verticais e ligadas uma à outra por uma mola de constante elástica K. Inicialmente, com as partículas em repouso na posição de equilíbrio, comunica-se uma velocidade v à partícula 2 através de um impulso. Ache os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas partículas das respectivas posições de equilíbrio, para $t > 0$.

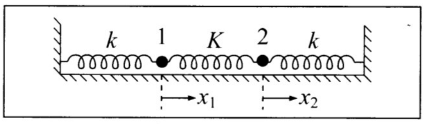


Figura P.5

16. Dois pêndulos idênticos, formados por partículas de massa m suspensas por barras de massa desprezível e comprimento l, estão ligados um ao outro por uma mola de massa desprezível e constante elástica k, inicialmente relaxada, com os pêndulos na posição vertical de equilíbrio (Fig. P.4). Aplica-se à partícula 2 uma força $F = F_0\cos(\omega t)$. (a) Obtenha a solução estacionária para os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas partículas. (b) Trace gráficos representando o andamento das amplitudes de oscilação das duas partículas em função de ω.

17. Um modelo clássico para a molécula de CO_2 é constituído por duas partículas idênticas de massa M ligadas a uma partícula central de massa m por molas idênticas de constante elástica k e massa desprezível. Sejam x_1, x_2 e x_3 os deslocamentos das três partículas a partir das respectivas posições de equilíbrio (fig. P.6). (a) Escreva as equações de movimento para x_1, x_2 e x_3 e verifique que o centro de massa do sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. (b) Obtenha as equações de movimento para as coordenadas relativas, $x_2 - x_1 = \xi$ e $x_3 - x_2 = \eta$. (c) A partir de (b), calcule as freqüências angulares de oscilação associadas aos dois modos normais de vibração do sistema. Interprete fisicamente estes dois modos, caracterizando os tipos de oscilação das massas a eles associados. (d) Aplique este modelo à molécula de CO_2, calculando a *razão* entre as duas freqüências de modos normais de vibração para esta molécula. Tome as massas do carbono e oxigênio como 12 e 16, respectivamente, em unidades de massa atômica.

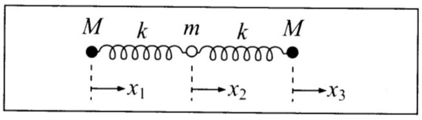


Figura P.6

18. Uma partícula de massa m está ligada por uma mola de constante elástica k e massa desprezível a outra partícula de mesma massa, suspensa do teto por urna mola idêntica à anterior (Fig. P.7). Inicialmente o sistema está em equilíbrio. Sejam z_1 e z_2 deslocamentos, a partir das respectivas posições de equilíbrio, das partículas 1 e 2, com o eixo dos z orientado verticalmente para baixo. (a) Escreva as equações de movimento para z_1 e z_2. (b) Obtenha os modos normais de oscilação vertical do sistema. Para isto, considere uma nova coordenada q, combinação linear de z_1 e z_2: $q = \alpha z_1 + \beta z_2$. Escreva a equação de movimento para q e procure determinar os coeficientes α e β de tal forma que esta equação para q se reduza à equação de movimento de um oscilador harmônico simples. Você obterá duas soluções, q_1 e q_2, que se chamam as *coordenadas normais* (Seção 4.6). Calcule as freqüências angulares de oscilação ω_1 e ω_2 associadas aos dois modos normais do sistema.

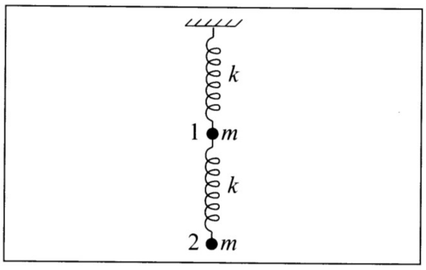


Figura P.7