Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 18

Corrente Elétrica e Lei de Faraday - (Griffiths, Cap.7)

Corrente Elétrica

Revisando os conceitos que vimos no início do curso, lembrando que a corrente elétrica que fluí em um circuíto é definida como a quantidade de carga que atravessa uma seção reta do fio por unidade de tempo, ou seja,

$$I = \frac{dq}{dT}$$

Usando esta definição mostramos também que se a corrente for transportada por diferentes espécies i de carga q_i, cada uma com densidade n_i e velocidade macroscópica $\vec{v}_i$, a corrente total fluindo através de uma superfície S pode ser escrita como

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$

onde $\hat{n}$ é a normal à superfície e

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

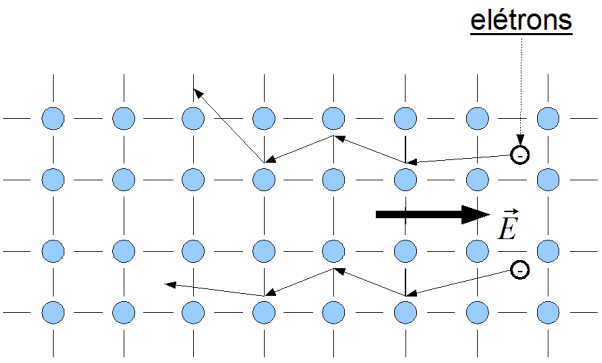
Vimos também que a densidade de cargas, $\rho = \sum_i n_i q_i$, e a densidade de corrente têm que satisfazer a Equação da Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Naturalmente, quando aplicarmos um campo elétrico em um fio com cargas inicial-

mente em repouso, as cargas começam a se mover e podem até se acumular em algum ponto do condutor. Mas este acúmulo dá origem a um campo eletrostático de repulsão entre as cargas, que faz com que seja atingida uma situação em que o fluxo de cargas se torna uniforme em todo o condutor. Esta questão é muito bem discutida na seção 7.1.2 do livro texto. Mas vamos discuti-la seguindo uma abordagem alternativa. complementar ao texto.

Conceito Microscópico de Resistividade: Regime Permanente



Consideraremos um meio com uma densidade n de portadores de carga (n = número de portadores/volume) e suponhamos que em um instante inicial apliquemos um campo elétrico $\vec{E}$ no meio. As cargas começam a ser aceleradas pelo campo elétrico, mas esta aceleração não é constante porque, ao colidirem com outras cargas ou, no caso de condução em um meio sólido, ao se colidirem com átomos da rede cristalina, perdem momento, como esquematizado na figura. Suponhamos que a frequência média de colusão ν, ou seja, o tempo médio entre colisões seja $\tau_{col} = 1/\nu$. Então podemos escrever a equação de movimento para um portador de carga como

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m\nu\vec{v}$$

Esta equação é denominada Equação de Langevin e está baseada no modelo físico de que em cada colisão o portador de carga perde todo seu momento na direção do campo. Dividindo por m, podemos escrever esta equação como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Esta é uma equação diferencial inomogênea para $\vec{v}$. Do curso de cálculo sabemos que a solução é dada pela soma da solução da equação homogênea e uma solução particular.

Equação homogênea

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu\vec{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_n = \vec{A}e^{-\nu t}$$

onde $\vec{A}$ é um vetor constante.

Solução particular

Como o campo elétrico é constante, a solução particular é simplesmente

$$\vec{v}_p = \frac{q}{m\nu}$$

porque $d\vec{v}_p/dt = 0$, satisfazendo a equação. Então

$$\vec{v}(t) = \vec{A}e^{-\nu t} + \frac{q}{m}e^{-\nu t}$$

e

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{m\nu}\left[1 - e^{-\nu t}\right]}$$

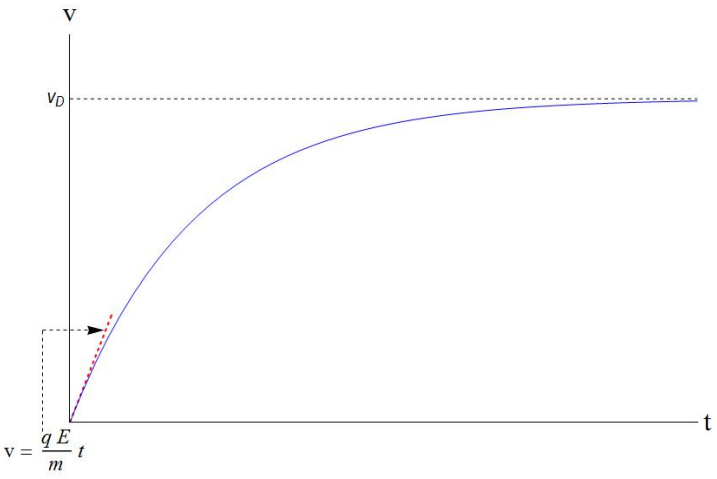
É interessante ver o comportamento desta equação. Para tempos pequenos, ou seja, $\nu t < 1$, podemos desenvolver a exponencial em série de Taylor de forma que

$$\vec{v}(t) \approx \frac{a\vec{E}}{m\nu}\left[1 - (1 - \nu t + \ldots)\right] \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}(t) \approx \frac{q\vec{E}}{m}t$$

indicando que o portador de carga é inicialmente uniformemente acelerado, como esperamos, antes das colisões aparecerem. Por outro lado, para $\nu t \gg 1$, temos

$$t \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \vec{v}_p = \frac{q\vec{E}}{m\nu}$$

Ou seja, o portador de carga atinge uma velocidade constante de deriva pelo meio condutor, numa situação em que o mo-



mento ganho no campo é balanceado pelo momento perdido em colisões. Esta é a velocidade média de condução das cargas que transportam corrente em um meio.

.1 Resistividade

Considerando, para facilitar, que no meio haja somente um tipo de portador de carga, a densidade de corrente, em regime permanente, será então

$$\vec{j} = nq\vec{v}_D$$

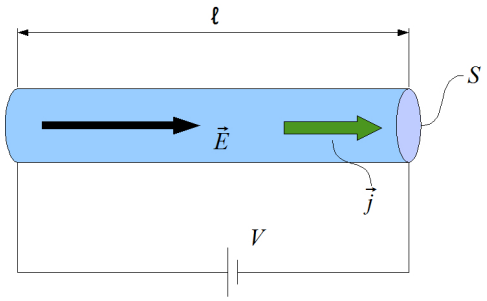
Utilizando a expressão para $\vec{v}_D$, obtemos

$$\boxed{\vec{j} = \frac{nq^2}{m\nu}\vec{E}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{m\nu}{nq^2}\vec{j}}$$

Portanto obtemos que o campo elétrico é proporcional à densidade de corrente; esta é a Lei de Ohm, que é apresentada empiricamente em teoria de circuítos. O coeficiente de proporcionalidade é definido como a resistividade do meio,

$$\boxed{\eta = \frac{m\nu}{nq^2}}$$

Como a resistividade depende de q^2, ela é sempre positiva, independente de os portadores de carga serem elétrons ou íons.



Para relacionar este resultado com a Lei de Ohm macroscópica apresentada em teoria de circuítos, consideremos uma situação simples de um tensão V aplicada a um fio retilíneo e homogêneo, de comprimento ℓ e área da seção transversal S. Temos então

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\ell; \qquad I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = jA$$

Então, substituindo na relação $E = \eta j$, obtemos

$$\frac{V}{\ell} = \eta \frac{I}{A} \qquad \therefore \boxed{V = RI; \qquad R = \frac{\eta \ell}{A}}$$

que é a Lei de Ohm macroscópica, juntamente com a expressão para a resistência R em termos da resistividade.

.2 Decaimento do acúmulo de cargas em um condutor

Nós sempre supomos que num condutor perfeito a densidade de cargas se localiza somente na superfície. Mas, na realidade, um condutor real sempre tem uma resistividade não nula. Consideremos então o que acontece com uma densidade de carga localizada que possa aparecer dentro do condutor, quando nele aplicamos um campo elétrico, como discutido na seção 7.1.2 do livro texto. A evolução de qualquer densidade de carga tem que satisfazer a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Considerando a Lei de Ohm, $\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\eta}$, temos

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\eta} \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Mas, em um campo eletrostático, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$; então

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\eta \epsilon} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) e^{-t/\eta\epsilon}}$$

Portanto qualquer densidade inicial de carga dentro do meio decai com um tempo característico $\tau = \eta\epsilon$. Por exemplo, para o cobre

$$\eta = 1,68 \times 10^{-8} \Omega m; \qquad \epsilon \approx \epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} f/m;$$

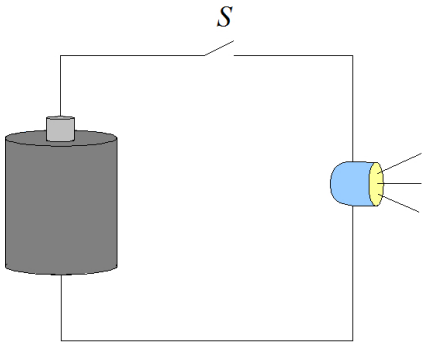
então

$$\therefore \tau = \eta\epsilon \approx 1,5 \times 10^{-19} s!$$

ou seja, qualquer acúmulo de cargas decai muito rapidamente.

.3 Força Eletromotriz

Agora vamos estudar à seção 7.1.2 do livro texto. Vimos que a resistividade de um condutor é causada pelas colisões entre portadores de carga. Então, para que a corrente circule no condutor, é necessário que exista uma força média continuamente "empurrando" as cargas para compensar as perdas por colisão. Consideremos, para contextualizar o modelo, o caso simples de um LED ligado a uma bateria. Quando a chave S é fechada, o LED acende; portanto trabalho é realizado sobre ele para que emita luz. Mas a fonte de energia, a bateria, só realiza trabalho em uma parte do circuíto (neste caso através da de reações químicas), transportando elétrons de seu polo positivo para o negativo, pelo interior da bateria. Quem, então, "empurra" os elétrons para que eles circulem através do LED?



O que acontece é que a bateria provoca um acúmulo de elétrons em seu polo negativo. Este acúmulo de cargas gera, automaticamente, um campo elétrico, dado por $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$, não uniforme. Este campo exerce uma força sobre as próprias cargas e as vizinhas, fazendo com que elas se desloquem através do fio, fazendo que o acúmulo de cargas desapareça com o tempo característico $\tau = \eta\epsilon$, ou seja, muito rápido, até atingir o regime estacionário, com as cargas fluindo com a velocidade de deriva $v_D = qE/m\nu$, em que E é o campo eletrostático auto-consistente que se estabelece no circuíto.

Portanto, em regime permanente, há duas forças atuando sobre os portadores de carga; a força da fonte localizada, $\vec{F}_f$, e a força do campo eletrostático auto-consistente que se estabelece no circuito, $\vec{F}_E = q\vec{E}$,

$$\vec{F} = \vec{F}_f + q\vec{E}$$

Então o trabalho total para fazer as cargas se moverem pelo circuíto é dado por

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{F}_f \cdot d\vec{\ell} + q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Mas, como o campo eletrostático é conservativo ($\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$), temos

$$\boxed{W = \oint \vec{E}_f \cdot d\vec{\ell}}$$

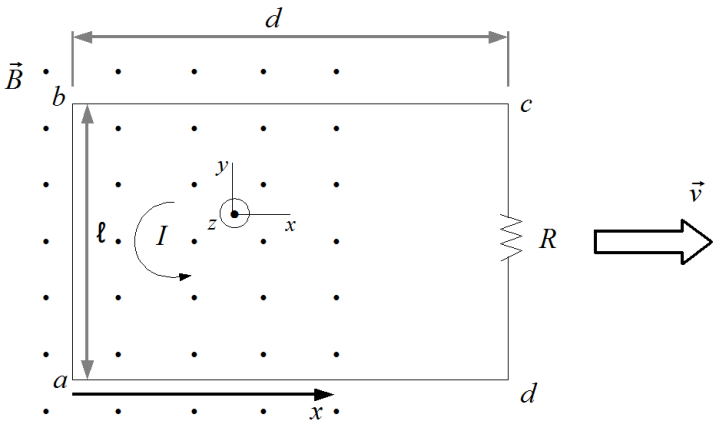
A Força Eletromotriz é definida como o trabalho feito pela fonte por unidade de carga

$$\varepsilon = \frac{\tau}{q} = \oint \frac{\vec{F}_f}{q} \cdot d\vec{\ell}$$

Este nome é infeliz porque ε não é uma força, mas uma voltagem.

.4 Força Eletromotriz Induzida

Uma força eletromotriz importante é a devida ao movimento de condutores através de campos magnéticos. Consideremos, por exemplo, a espira mostrada na figura, que se desloca para a esquerda, com velocidade constante, através de uma região do espaço em que há um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{e}_z$.



Naturalmente todas as cargas do fio da espira estarão se movendo para a direita com velocidade $\vec{v}$. As que estiverem dentro do campo sofrerão uma força magnética dada por

$$\vec{f}_m q\vec{v} \times \vec{B} = q(v\hat{e}_x) \times (B\hat{e}_z) = -qvB\hat{e}_y$$

A força eletromotriz devida a esta força magnética será então

$$\varepsilon = \oint \frac{\vec{f}_m}{q} \cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b vBdy + \int_b^{d-x} vB(-\hat{e}_y) \times (dx\hat{e}_x) = 0$$

Portanto

$$\varepsilon = -vB\ell$$

O sinal $(-)$ significa que a integral de linha é positiva no sentido contrário ao que consideramos. A corrente elétrica circulando no sentido positivo é dada por

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{vB\ell}{R}$$

Usando a regra da mão direita, é fácil verificar que o sentido do campo magnético produzido por esta corrente é o mesmo do campo $\vec{B}$ fixo. Isto está de acordo com a Lei de Faraday, que impõe que a força eletromotriz através de um contorno fechado é igual à variação temporal do fluxo magnético através dele, de forma a se opor (Lei de Lenz) a esta variação

$$\varepsilon = \frac{d\phi_m}{dt}; \qquad \phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Neste exemplo, $\phi_m = B\ell x$; portanto

$$\left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| B\ell v$$

Como o fluxo está diminuindo, $\varepsilon = -B\ell v$.

Por outro lado, a corrente através da resistência implica em perda de energia

$$P = RI^2$$

Esta energia não pode ser produzida pelo campo magnético. Neste exemplo, a energia é fornecida pela força externa que está puxando a espira com velocidade constante. Para manter esta velocidade constante, a força externa tem que equilibrar a força magnética na espira

$$\vec{f}_{ext} = -\vec{f}_{mag} = -F\vec{\ell} \times \vec{B} = -I\ell\hat{e}_y \times B\hat{e}_z = IB\ell\hat{e}_x$$

$$f_{ext} = \tfrac{v\ell^2 B^2}{R}$$

A potência correspondente é

$$P_{ext} = f_{ext} v = \frac{v^2\ell^2 B^2}{R} = RI^2$$

ou seja, a potência exercida pela força externa é dissipada na resistência.