

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES : DES QUESTIONS POUR LA RECHERCHE¹

Vinício de Macedo SANTOS²
Patrick TRABAL³

Ce texte se propose de présenter et discuter une série de recherches menées au Brésil depuis une vingtaine d'années, concernant les relations des élèves avec les mathématiques et leurs difficultés dans cette matière. L'idée générale est de présenter de façon critique ces travaux, menés par le premier auteur, et d'envisager des prolongements suite à des développements de la sociologie française.

Le fil conducteur des recherches conduites au Brésil peut se décrire en une volonté de considérer à la fois les difficultés des élèves et celles des maîtres dans leur enseignement. Au delà de la symétrie nécessaire pour comprendre ce qui se joue dans un cours de mathématiques, il semble pertinent de pointer les difficultés des enseignants dans leur propre apprentissage lors de leur formation. C'est la raison pour laquelle, nous décrivons le passage de la première série de recherches – lesquelles portent sur les significations que les parents, les élèves et les enseignants donnent aux mathématiques dans l'école élémentaire – à un autre programme qui visait à suivre les professeurs dans l'école normale⁴ dans le cadre de la formation continue. Mais on ne peut se satisfaire de ces perspectives qui nécessitent de clarifier les difficultés effectives des élèves. On décrira donc un troisième moment de ces recherches, lequel se caractérise par une volonté d'enquêter sur les difficultés mêmes des apprenants.

Après avoir présenté ces travaux, on s'efforcera de les confronter à une perspective sociologique. Ces discussions, menées maintenant depuis plus de deux ans entre un didacticien et un sociologue, permettront d'envisager un nouveau programme de recherches qui tentera d'articuler différents niveaux de description pour saisir la complexité de cette thématique.

Ce thème s'inscrit dans un programme d'études développé en collaboration avec le Groupe de Sociologie Pragmatique et Reflexive (GSPR) de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales (EHESS), Paris (France), au cours de l'année 2009, avec l'appui de la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

² USP [Université de São Paulo]- Brésil – vms@usp.br

³ CERSM – Université Paris Ouest Nanterre / GSPR – EHESS. ptrabal@u-paris10.fr

⁴ Au Brésil, l'école normale correspond à un niveau lycéen. A l'époque, ce niveau d'études suffisait pour enseigner à l'école primaire.

1. Les difficultés d'apprentissage : se focaliser sur les significations des mathématiques

Notre attention systématique sur le thème de la relation entre les élèves et leurs difficultés avec les mathématiques a commencé avec une recherche intitulée : « *Les Mathématiques dans l'école et au collège : les significations que les parents, les élèves et les enseignants donnent aux mathématiques* »⁴, développée dans le cadre d'un master à la fin des années 80. Cette étude est partie de l'hypothèse selon laquelle des idées socialement transmises sur les mathématiques interviennent sur la prédisposition des élèves pour les apprendre à l'école. Symétriquement, on peut considérer que l'école contribue à la diffusion des idées et valeurs qui font de l'expérience scolaire des élèves en mathématiques une expérience conflictuelle. La problématique de cette première étude était donc d'interroger les significations des mathématiques et leurs relations avec les types de difficultés qu'elles suscitaient. Cette problématique s'appuie sur ce que l'on considère comme l'un des principaux défis posés au professeur de mathématiques dans la salle de classe : réussir à susciter l'intérêt des élèves peu motivés, le maintenir et proposer des solutions à leurs difficultés. Il s'agissait, dans un premier temps, d'étudier la problématique en analysant comment chaque individu appréhende la discipline afin d'aider le professeur à adapter son enseignement.

La perspective théorique principale qui a guidé ce premier travail de recherche renvoie, d'une part, au « constructivisme trivial » de Glasersfeld⁵, qui s'appuie exclusivement sur le principe selon lequel « la connaissance n'est pas reçue passivement par le sujet cognitif, mais est activement construite »⁶; et, d'autre part, à l'idée que les références cognitives des élèves sont importantes pour les significations données aux notions mathématiques lorsqu'elles engagent des situations et activités qu'ils cherchent résoudre.

Les travaux de recherche, les pratiques pédagogiques et le débat sur les *curricula* d'apprentissage des mathématiques, pointent une critique selon laquelle l'enseignement aurait un caractère plus syntaxique que sémantique, c'est-à-dire plus fondé sur la compréhension de règles que sur la compréhension des significations⁷ ou sur la valorisation de processus intuitifs mis en jeu par la résolution des problèmes.

Les données ont été collectées dans une école du réseau d'enseignement public de l'État de São Paulo, localisée dans sa capitale, à partir d'entretiens réalisés selon un guide. Celui-ci traduit la volonté de repérer les façons dont les élèves, les enseignants et les parents concernés par l'enquête perçoivent les mathématiques ainsi que leur rapport à elles, dans et en dehors de l'école. Nous avons utilisé une procédure méthodologique d'enquête centrée sur l'interprétation de la diversité et des particularités des réponses, en rassemblant, de cette façon, les significations données aux mathématiques, les difficultés des groupes interrogés, et en accordant une attention particulière aux significations présentes dans les énoncés produits par les élèves, en cherchant à interpréter les modes de représentations.

⁴ Recherche développée auprès le Programme de Master et Doctorat en Éducation de la PUC-São Paulo Pontifícia Universidade Católica, 1989, avec l'appui de CAPES.

⁵ Glasersfeld, « Constructivism in Education », p. 182.

⁶ Ernest, « Variedades de constructivismo: sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas », p.5.

⁷ Gómez-Granell, « A aquisição da linguagem Matemática: símbolo e significado », p. 265.

En examinant ce qui a été dit par les sujets de l'enquête à propos des mathématiques et de son enseignement, nous pouvons identifier deux champs de significations : l'un lié à des aspects pratiques et utilitaires dans les apprentissages élémentaires et qui, donc, met en évidence un aspect instrumental et fonctionnel de la connaissance mathématique ; l'autre qui, sans exclure le premier, s'associe à la nature de la pensée mathématique et à la condition de développer certains concepts spécifiques, relevant d'un aspect plus spécialisé, voire idéalisé de cette connaissance. Plus complexe, son apprentissage requiert plus de temps et d'implication.

Dans le premier cas, il s'agit d'un sens concret, pragmatique des mathématiques, déterminé par les exigences des calculs d'opérations, des mesures, expérimentés par chacun dans des situations du quotidien : des achats, des ventes, des calculs de coûts, des mesures, des poids, des pourcentages et des solutions de problèmes courants. Dans le deuxième cas, il s'agit de mettre en évidence des mathématiques supposées utiles, bien que plus avancées, et qui nécessitent du temps et un enseignement approfondi pour les comprendre. Cela renvoie à l'association entre les mathématiques et le développement scientifique et technologique – fonctionnement des ordinateurs, voyages spatiaux, constructions de l'ingénierie civile et mécanique, systèmes de satellites, etc. – ainsi qu'à l'économie. On peut considérer que les significations présentes dans cette pensée collective méritent de mettre en valeur l'importance des mathématiques. Les personnes interrogées attribuent une valeur positive se situant au delà des affinités personnelles et les difficultés auxquelles une grande part des acteurs font face à l'école. À la fois les mathématiques sont une connaissance dont la compréhension est caractérisée par les difficultés et elles sont reconnues comme une nécessité.

En dépit de la valeur positive de la connaissance et de l'enseignement des mathématiques, reconnue par tous les sujets interrogés dans cette étude, nous avons constaté qu'ils ont connu des difficultés croissantes au cours de leur scolarité et que ces difficultés ont largement contribué à leur échec en mathématiques.

2. Les difficultés d'apprentissage et la formation du professeur comme centres d'intérêt.

Le projet « *Perfectionnement de la formation des professeurs dans l'école de formation des enseignants (au niveau du Lycée) : les difficultés d'apprentissage des élèves des 1ères à 4èmes séries comme objets de réflexion* »⁹, mené pendant quatre ans et demi, de la fin des années 90 au début des années 2000, s'insère dans un domaine de recherches qui vise à identifier la nature du travail du professeur et l'ensemble des savoirs qui mériteraient de compléter la formation professionnelle du professeur de mathématiques. Il s'inscrit, de ce fait, comme une contribution à la connaissance didactique du contenu mathématique. La cognition des élèves de l'école primaire a été prise comme objet de recherche avec l'idée que cela aiderait la formation des professeurs. Pour cela, nous avons proposé une investigation sur les difficultés d'apprentissage – relative aux contenus mathématiques – des élèves des quatre premières années de l'enseignement élémentaire (en principe entre 7 et 10 ans), là des étudiants qui allaient devenir des instituteurs ou institutrices (la dernière

⁹ Recherche développée pendant la période 1997-2001, à l'UNESP (Universidade do Estado de São Paulo) avec l'appui de la FAPESP (Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo). La FAPESP est une institution publique de soutien financier pour la recherche à l'Université.

année d'un cours technique – Magistério¹⁰) du Centre de formation et de perfectionnement de Magistério (CEFAM), à leurs maîtres (de Méthodologie de l'enseignement et de supervision de stage) et leurs professeurs de l'Université.

Les objectifs du projet consistaient à : 1) identifier et analyser les difficultés d'apprentissage en mathématiques des élèves d'école primaire ; 2) développer des activités à partir de la réflexion sur les difficultés repérées, pour les professeurs formateurs et les futurs maîtres ; 3) promouvoir une articulation entre la théorie et la pratique, basée sur les interactions entre les différents acteurs.

Pour réaliser ces objectifs, les étudiants se destinant au professorat, guidés par leurs professeurs, ont successivement observé les classes pendant leur stage, enregistré leurs observations, élaboré des instruments d'évaluation, et ils les ont utilisés pour identifier et analyser les difficultés. Ils ont constitué des groupes de cinq à huit élèves auxquels ils ont donné des activités planifiées en fonction des difficultés des élèves.

Il s'agissait de promouvoir des sessions d'appui et de soutien pédagogique en mathématiques (deux heures par semaine en dehors des cours), pour ces élèves car on a presumé qu'une petite progression des élèves en mathématiques pouvait générer une impression positive dans leur estime de soi, et avoir ainsi un effet déclencheur d'une attitude plus positive dans leur capacité d'apprendre, et ce, au delà des mathématiques.

Dans la première année de la recherche, la participation a concerné des professeurs formateurs, élèves de l'école du « magistério » (CEFAM) et des enfants de l'école primaire d'une ville (5 enseignants formateurs, 25 élèves du cours de « magistério », 165 élèves de l'école primaire). A partir de la deuxième année, la recherche s'est étendue à quatre autres villes de sorte que le nombre de sujets de recherche mentionné dans le rapport final du projet (2000-2001) présenté à la FAPESP a été de 511 élèves des écoles de « magistério » (CEFAM) de cinq villes, 21 professeurs formateurs des (CEFAM) et 2847 élèves de l'école primaire publique.

L'élaboration et l'application des instruments d'évaluation, l'analyse des données recueillies et la réflexion sur les situations pour surmonter les difficultés d'apprentissage des mathématiques ont donc mobilisé les professeurs, les élèves du cours de l'école normale au niveau lycée et les professeurs de l'Université. La réalisation de cette recherche visait l'insertion des sujets concernés dans le cadre où les questions relatives à l'enseignement et l'apprentissage de mathématiques se présentaient dans toute leur complexité¹¹. Lors de l'enquête, on a regroupé les différents sujets de différentes institutions, dans une procédure coopérative, ce qui devait permettre :

- 1 • de développer la connaissance professionnelle du maître et du futur maître dans plusieurs domaines: les concepts qui se rapportent aux nombres, la géométrie et les mesures, les procédures et processus de résolution des énoncés, les relations entre les concepts, l'histoire des concepts (connaissances mathématiques); une plus grande familiarité avec les méthodologies pour

¹⁰ Cours de Magistério-CEFAM. Il s'agit d'un cours professionnel (niveau du Lycée) de formation d'instituteurs, dont la durée était de trois ans. La Loi Générale de l'Education, depuis 2006, exige un diplôme universitaire pour être instituteur. Ainsi, Le « Magistério » n'existe plus.

¹² Les professeurs ont obtenu, dans cette période, une bourse FAPESP.

¹³ Selon le Rapport Scientifique des coordinateurs de la recherche présenté à la FAPESP, 2000.

enseigner les contenus mathématiques : nombres naturels, opérations, relations spatiales, notions de géométrie et mesures ; et une meilleure compréhension des différents modes de raisonnement et d'argumentation des enfants, ainsi que leurs difficultés lors de la résolution des certaines situations de problèmes.

•2• de faire évoluer l'enseignement des élèves de l'école du « magistério » et la formation continue de leurs enseignants. Dans le premier cas, le programme du cours a été enrichi par la participation des étudiants de « magistério » à une investigation qui leur a permis d'observer les classes de mathématiques, d'évaluer les élèves, de sélectionner des groupes d'élèves à partir de leurs difficultés en mathématiques, d'analyser les programmes et les manuels de mathématiques, de sélectionner et d'élaborer des situations de problèmes à proposer aux groupes d'élèves, d'accompagner subséquemment la qualité du travail des enfants. Dans le deuxième cas, toutes ces activités ont exigé une supervision, une analyse et une réalisation des études par les professeurs formateurs, puisqu'ils avaient la responsabilité d'orienter les futurs professeurs dans leurs activités.

•3• d'améliorer *ad fine* l'enseignement des mathématiques. De cette façon, les résultats de la recherche sont directement liés au type de connaissance professionnelle produit, à la formation théorique et pratique du futur maître, à la progression des élèves dans les cours de mathématiques, et à leur entourage grâce aux activités développées et appliquées par les professeurs stagiaires.

On a pu observer un changement qualitatif repérable dans la production écrite des futurs professeurs, des professeurs formateurs et des chercheurs coordinateurs. Cette production était d'ailleurs une exigence de l'agence de recherche et de soutien financier. Ce changement a concerné notamment les points suivants :

- Chaque futur professeur a produit un rapport contenant ses observations de classe, sa planification, ses interventions auprès des groupes d'élèves, ses analyses et ses réflexions. Ensuite, ces rapports ont été évalués par leurs enseignants qui ont discuté les idées principales au cours des réunions qui ont eu lieu toutes les deux semaines dans les écoles du « magistério » (CEFAM). À la fin du cours, ces futurs professeurs devaient occuper un poste d'enseignant dans les écoles primaires de leur ville.

- Les professeurs formateurs ont produit pareillement des rapports contenant leurs observations, leurs planifications, leurs interventions en classes, leurs analyses et réflexions, et celles-ci ont été présentées et discutées lors des réunions avec les chercheurs coordinateurs du projet.

- Les rapports des chercheurs coordinateurs se référaient au développement des étapes, à la participation des différents acteurs et à l'utilisation des résultats de la recherche lors de leurs cours à l'Université et à la production des leurs articles scientifiques.

- Les élèves se sont montrés plus confiants et attentifs en classe de mathématiques et ils ont amélioré leur réussite scolaire. Ce qui a pu être confirmé par les résultats

des évaluations de mathématiques (on a repéré des progrès dans 91% des cas) et par les remarques des enseignants sur les enfants lors de réunions d'évaluation.

Ce travail a donc permis une meilleure compréhension des types de difficultés d'apprentissage, ce qui est décisif pour le perfectionnement de la formation initiale et continue du professeur, dans la mesure où celui-ci est engagé dans des processus alternatifs pour repérer des problèmes d'apprentissage des élèves et ses propres difficultés rencontrées au cours de sa formation et de son enseignement. Même si le sujet principal de la recherche concernait le futur professeur, les difficultés des élèves étaient discutées et étudiées en lien avec la planification des activités à mettre en œuvre pour les réduire. Même si l'enfant et le professeur formateur étaient les sujets de la recherche, l'objectif principal restait le développement des différentes connaissances des professeurs dans la formation initiale. Mais le type d'enquête et les sujets qu'elle engageait définissaient également d'autres enjeux : la référence à la cognition des élèves, les facteurs qui rendent difficile l'apprentissage ou les notions posant des difficultés aux élèves, la base théorique des professeurs formateurs qui orientent l'action des futurs maîtres dans tous les aspects exigés par la recherche.

L'enquête sur les difficultés d'apprentissage a également mis en relief le thème de l'évaluation. Dans cette recherche, l'intervention des futurs professeurs se fixait deux objectifs : mieux les préparer pour le métier et favoriser les progrès des élèves.

Les activités développées ont fait émerger la nécessité d'études théoriques spécifiques, visant à réfléchir sur les pratiques enseignantes, sur le lien entre la théorie et la pratique dans le processus de formation, ainsi que sur les activités des professeurs et futurs professeurs.

3. Le contexte social au cœur de la relation des élèves à leurs difficultés en mathématiques

Le projet « *Évaluation de la recherche : enquête sur les difficultés en mathématiques dans l'enseignement primaire du réseau public dans la ville de São Paulo* » a démarré à la suite de la prise de conscience par l'université du fort taux d'échec des élèves au bout de la quatrième année du premier cycle, c'est-à-dire la dernière année de l'école primaire. La ville de São Paulo, avec une population de 11 millions d'habitants, dispose d'un réseau municipal d'enseignement avec 546 169 élèves répartis en huit années sur deux cycles fondamentaux, en principe, pour les tranches d'âge de 7 à 14 ans, (292 454 dans le 1^{er} cycle et 253 715 pour le 2^e cycle)¹⁵.

Dans la période comprise entre les années 2000 et 2004, le taux moyen de redoublements était de 12,61% pour la quatrième année (la dernière année du primaire) et de 10,54% pour la huitième année (dernière année du collège). On constate que le pic de redoublement est lié à des changements au cours de ces deux cycles. Ces taux indiquent que dans le premier cas, à la fin du premier cycle, il y a eu une croissance significative des difficultés. Ces données indiquent que les forts taux de redoublement se sont déplacés de la fin chaque série au bout des cycles de quatre années à l'école primaire et au collège dans la ville de São Paulo. Ce dernier résultat

¹⁴ Recherche développée entre la fin de 2006 et la fin de 2008, à la FEUSP [Faculté d'Éducation de l'USP], avec l'appui de FAPESP.

¹⁵ Données de 2005 (Source: Sistema Escola Online).

se rapproche de celui correspondant à la période précédant les années 2000, puisque la croissance moyenne des taux d'échec dans la quatrième année n'est pas très éloignée de la situation peu satisfaisante qui concernait autrefois les premier et second cycles de l'enseignement fondamental. Il convenait d'interroger ce changement, de déterminer ses origines et ses conséquences pour l'élève.

La première hypothèse invite à penser que ces résultats proviennent de l'implémentation du système de cycles de quatre ans à l'éducation élémentaire et du suivi accru des processus d'évaluation, lesquels sont plus concentrés et plus rigoureux dans la dernière année du cycle. Ces indices concernant le redoublement restent généraux car on ne dispose pas de spécification du redoublement par matière scolaire ; de plus, il n'y pas d'indications sur les causes de ces redoublements. L'impact de l'enseignement de mathématiques dans ces résultats n'est pas précisé, même si on peut supposer qu'il est important, car lors de quelques macro-évaluations, réalisées au niveau local (épreuve São Paulo), national (épreuve Brésil) ou international (PISA), marquées par la forte présence des mathématiques et de la langue portugaise dans ces évaluations, les taux de réussite des élèves sont les plus bas possibles. Cependant, bien que l'idée selon laquelle la présence des mathématiques juggle la possibilité des élèves à développer des compétences élémentaires minimales soit assez partagée, cela n'a pas suffi pour changer la réalité et assurer une meilleure qualité à l'enseignement visant à offrir de réelles possibilités aux élèves. Plutôt que de déterminer quantitativement l'impact de l'enseignement des mathématiques sur ces échecs, il s'agissait dans cette recherche, de recenser les difficultés spécifiques d'apprentissage au moment où les élèves travaillent les énoncés et les connaissances mathématiques.

Ainsi, la finalité générale de ce projet consistait-elle à rechercher les difficultés et les facteurs qui interviennent dans l'enseignement et dans l'apprentissage de mathématiques, dans un contexte social précis, marqué par des taux élevés d'échec et un redoublement. Il s'agit plus précisément: 1) de repérer les différents types d'obstacles présents dans l'apprentissage des mathématiques des élèves à la fin du 1er cycle de l'enseignement fondamental ; 2) de recenser les possibles particularités des relations aux mathématiques, établies par des groupes de population d'un grand centre urbain (São Paulo) au sein de l'école publique.

Nous avons défini deux actions principales dans le cadre de cette recherche :

- 1• Une évaluation permettant d'étudier un échantillon significatif des élèves des 13 coordinations d'enseignement de la ville qui sont dans la quatrième année du premier cycle et dont les résultats ont été comparés avec les résultats de macro-évaluations extérieures (épreuve São Paulo, épreuve Brésil) appliquées aux mêmes années/séries pour faire un état des connaissances mathématiques des élèves dans la ville de São Paulo, en considérant le profil socio-économique du groupe et les particularités des différentes régions de la ville ;

- 2• la constitution de petits groupes de cinq à huit élèves pour approfondir l'enquête sur leurs difficultés concernant divers concepts mathématiques, afin d'identifier la nature et la structure de ces difficultés ; ce point comprend aussi un travail sur les interactions lors des réunions et des entretiens avec les professeurs des groupes d'élèves pour discuter des aspects recensés lors des résultats de l'évaluation et lors du travail pédagogique en portant l'attention sur les difficultés des élèves.

La diversité des interrogations en jeu confère aux difficultés mathématiques une grande complexité et ici, contrairement aux indicateurs réunis à partir des macro-évaluations, il s'agit d'apporter une attention particulière pour l'interprétation des processus vécus par les élèves et les professeurs. En conséquence, on va essayer de répondre à plusieurs questions relatives à leur pratique et à leur formation, de confirmer ainsi des hypothèses et de débattre de ce qui émerge dans le domaine de l'expérience scolaire de ces sujets par rapport aux mathématiques. Comme on veut atteindre un certain niveau de compréhension et expliquer les phénomènes liés aux difficultés en mathématiques des élèves d'un réseau d'enseignement, dans le contexte d'un grand centre urbain – en cherchant à privilégier les processus et non les conséquences –, il s'agissait de s'engager dans une recherche qualitative, enrichie par une analyse statistique des données fournies par l'évaluation des différentes des macro-évaluations officielles.

La diversité des aspects socioculturels invitait à une approche ethnographique. Dans cette perspective, on peut s'attacher à explorer des phénomènes sociaux particuliers, à travailler sur des données non structurées, c'est-à-dire qui n'ont pas été codifiées à travers un système analytique de catégories préalablement établi, à réaliser une investigation fine sur un petit nombre de cas et à analyser des données en prenant au sérieux des interprétations explicites des significations et des fonctions des actions humaines¹⁶. On a travaillé sur des interactions avec des petits groupes d'élèves, lors de la discussion des énoncés qui abordaient des concepts mathématiques. Ce travail représente un exercice d'enquête selon une méthode de « microgénése de l'habilité »¹⁷, caractérisée par une perspective qui se focalise moins sur les résultats que sur les informations en jeu lors de la session dans laquelle ces élèves essaient de résoudre des énoncés, de formuler des questions, de montrer leurs doutes, leurs réactions et leurs intérêts, en interagissant avec le chercheur. Cette méthode est décisive pour enquêter sur les difficultés de l'apprentissage en mathématiques.

Compte tenu de la grande quantité d'élèves qui fréquentent la quatrième année du premier cycle et du grand nombre d'élèves qui ont échoué, il a fallu définir un échantillon de 1 328 élèves de 26 écoles, et de la même façon, élaborer et utiliser un instrument d'évaluation, afin de dresser un tableau rassemblant les progrès en mathématiques. L'échantillonnage d'élèves de la quatrième année prenait en compte le fait que les élèves de cette année sont organisés dans deux groupes : les cours habituels et les cours de PIC (Programme Intensif du Cycle 1) dans lesquels les élèves en échec ont reçu un accompagnement supposé différent.

Le travail avec des petits groupes d'élèves et de professeurs s'est déroulé en deux temps : en 2007, le travail a été réalisé avec des petits groupes d'élèves (5 à 8 élèves par groupe, choisis au hasard), avec leurs professeurs, dans des écoles impliquées dans l'évaluation du projet ; en 2008, le travail s'est déroulé avec des petits groupes d'élèves tirés au sort (avec leurs professeurs) issus de 13 écoles différentes sélectionnées en fonction de la combinaison de quelques critères :

¹⁶ Atkinson et Hammersley, « Ethnography and Participant Observation », p.248, cités par Fernandes, « Fazer matemática compreendendo e compreender Matemática fazendo: a apropriação de artefatos da matemática escolar », p. 60.

¹⁷ Miranda et al., *Dificuldades del aprendizaje de las matemáticas: un enfoque evolutivo*, p.57.

- 1• l'utilisation de l'épreuve « São Paulo », une évaluation réalisée pour les élèves des écoles publiques dans la ville de São Paulo¹⁸ ;
- 2• l'indice de vulnérabilité sociale de la région¹⁹ ;
- 3• la mobilité de la population de la région, c'est-à-dire s'il s'agit d'une région dans laquelle les familles changent de domicile en raison des inondations et de la violence sociale, pour les adultes cherchant du travail ;
- 4• la mobilité des professeurs de l'école ;
- 5• la cohésion et la stabilité de l'équipe pédagogique de l'école.

Il s'agit d'identifier dans chaque cas en tenant compte du fait que de nombreux enseignants ont un contrat de travail temporaire, et même parmi ceux qui ont un emploi stable (car ils ont passé un concours), certains mutent vers une école plus proche de leur résidence.

En ce qui concerne les professeurs, des réunions, discussions et entretiens ont été organisés. En effet, l'analyse de leur point de vue sur les difficultés d'apprentissage et d'enseignement semblait décisive. L'étude, actuellement en cours, comprend deux processus d'analyse qui sont liés : une macro-analyse des caractéristiques statistiques²⁰ et une micro-analyse basée sur les processus d'interaction, développés par le chercheur avec les élèves et avec le professeur.

L'analyse descriptive et inférentielle de ces données de l'évaluation a permis les conclusions suivantes :

- La réussite des élèves est indépendante de la variable sexe.
- Les élèves dans les classes habituelles ont plus de chances de réussite et moins de risques d'erreur que les élèves des classes PIC.
- Deux des 13 coordinateurs se distinguent en présentant un résultat supérieur pour l'évaluation des élèves (ils ont obtenu proportionnellement le plus grand taux moyen de réponses correctes et la plus faible proportion moyenne de non-réponse).
- C'est dans les questions sur les nombres et les opérations que les élèves ont le mieux réussi. Dans ce sujet, il y a eu les plus fortes proportions de réponses correctes et l'une des plus basses proportions de réponses partiellement correctes, d'erreurs et de non-réponses. Sur les autres contenus, nous n'avons pas noté de différences significatives.

L'analyse des processus d'interaction des élèves avec le professeur vise à caractériser et à décrire la relation des élèves avec les contenus et les situations mathématiques en identifiant les significations, les raisonnements et les difficultés et en croisant les résultats avec les éléments issus de l'analyse des interactions avec les chercheurs et les professeurs. Ainsi, nous avons pu repérer des compétences et des difficultés en repérant des différences entre les groupes d'élèves et même au sein

¹⁸ En prenant les données sur le progrès moyen du réseau public, on a formé trois groupes d'écoles : avec le progrès au-dessus la moyenne, moyen et au-dessous la moyenne.

¹⁹ Basé sur le plan de l'Indice de Développement Humain (IDH) de la ville de São Paulo. Rapport de Développement Humain 2007. www.paud.org.br, (consulté en : septembre 2008)

²⁰ Les connaissances des élèves de la quatrième série de l'enseignement primaire dans le réseau public municipal de la ville de São Paulo sont analysés au moyen de graphiques, tableaux et des modèles statistiques qui représentent les progrès dans l'épreuve selon la localisation des écoles, les domaines de contenu, le sexe et le type de classe dans laquelle l'élève étudie.

d'un même groupe ; nous envisageons d'étudier ces variations dans une prochaine étape de recherche. A titre d'illustration, dans le tableau ci-dessous sont regroupées les compétences et les difficultés qui ont été observées :

Contenus	ce que les élèves maîtrisent	les difficultés des élèves
Nombres (très travaillés par les enseignants)	compter mentalement – compter sur les doigts – lire les nombres – identifier des régularités et des séquences de nombres – comparer et ordonner des nombres – reconnaître les classes et les ordres	Représentations des nombres – des séquences numériques plus complexes – lecture des énoncés mathématiques – écriture des grands nombres
Opérations sur les nombres (très travaillées)	Algorithmes (addition et soustraction) – division (en partie) – Calcul Mental – résolution de problèmes avec aide à la lecture et à l'interprétation – utilisation de différentes stratégies dans les problèmes	Concept de la division – soustraction avec retenues – algorithmes de division et de soustraction – modes de représentations – utilisation du langage mathématique, écrit au lieu de dessin – interprétation d'énoncés – mémorisation des tables de multiplication
La forme et l'espace (peu ou non-travaillés)	Associer certains solides et leur mise à plat sans justification – déterminer le nombre de faces d'un solide – l'identification des triangles et des cercles – reconnaissance des angles	Dénomination de solides géométriques – relation entre les solides géométriques et les objets du monde physique – classement de figures planes – polygones (excepté triangle et le carré) – différenciation des figures planes et non-planes
grandeurs et mesures (peu ou non-travaillés)	Notions concernant le système monétaire – estimation des mesures et comparaison des unités de mesure – formulation de certaines hypothèses relatives aux mesures	Identification de la mesure d'objets réels – Lecture des symboles de mesures
Traitement de l'information Introduction à la statistique (peu ou non-travaillés)	organiser les données à l'aide du professeur	Situations énumérées – liaison de données organisées et de situations de tous les jours – représentation graphique et interprétation des graphiques

De cela, on peut souligner quelques considérations sur ce qui a été observé chez les élèves et les enseignants:

- De petits groupes d'élèves, qui avaient des difficultés sur les nombres et les opérations, parviennent à montrer de réelles compétences notamment sur les techniques d'opérations numériques (sauf la division) et le calcul mental, dès lors qu'ils évoluent dans une situation où ils peuvent parler avec leurs pairs ou avec des adultes sur leurs difficultés et sur les limites de leur compréhension.
- Bien que de nombreux élèves comptent sur les doigts, d'autres ont peur d'utiliser ce procédé.
- Le succès des élèves ayant des questions sur le thème des opérations numériques, qui est le plus travaillé par les enseignants, n'est pas plus grand que le succès obtenu sur les questions liées à des contenus que les enseignants ne sont

pas habitués à travailler, comme l'espace, les formes, les grandeurs et mesures et de traitement des données.

- Les élèves sont réticents à utiliser les représentations graphiques et le symbolisme mathématique dans la résolution de problèmes, bien que l'on repère qu'ils mobilisent à oral des stratégies différentes pour les résoudre. Il y a une difficulté des élèves à mémoriser leur raisonnement. Dans la plupart des cas, ce qu'ils ont retenu de leur démarche est assez éloigné de leur raisonnement. Mais il s'agit là, sans doute de difficultés à exprimer des stratégies.

Dans la série des trois recherches présentées dans ce texte, en particulier dans les deux premières, on a privilégié l'aspect selon lequel l'ensemble « élève – professeur – connaissance mathématique » fonctionnait comme un système fermé. Dans ce cas, on a envisagé une proposition d'enseignement général avec des activités et avec une méthodologie jugée *a priori*, adéquate et suffisante pour faire face aux difficultés des élèves et les résoudre. Cependant, une partie de la recherche présentée dans ce travail révèle aussi que la manière de comprendre et de focaliser la relation et les difficultés des élèves avec les mathématiques se modifie tous les jours en fonction des questions que chaque situation pose.

Si l'enquête vise à évaluer la réalité de la compréhension des difficultés d'apprentissage des élèves dans la formation du professeur, qu'il s'agisse de formation initiale ou continue, ses savoirs didactique et pédagogique apparaissent comme décisifs pour gérer la classe de mathématiques. Cette dimension est particulièrement décisive depuis les années 1990 qui correspondent à une valorisation des processus d'apprentissage du professeur dans les cours de formation et dans la recherche.

Une telle étude réalisée dans le cadre d'un réseau d'enseignement long et complexe permet d'identifier une diversité de facteurs qui caractérisent la relation des étudiants avec la connaissance en général, avec les mathématiques d'une façon plus spécifique et avec leurs professeurs. Parmi les facteurs qui pèsent sur les progrès et les difficultés des élèves, on ne peut toutefois se contenter d'étudier le *curriculum* utilisé, les conditions d'enseignement, les limites des innovations et les méthodologies développées dans le seul domaine des mathématiques. Dans ces conditions, nous pensons que les difficultés d'apprentissage en mathématiques viennent non seulement des relations établies entre l'élève, le professeur et les mathématiques, mais aussi de jeux sociaux plus complexes.

Comme on l'a déjà développé, dans le troisième moment de ce texte, si on cherche à analyser et à comprendre les difficultés d'apprentissage des élèves dans le contexte d'un grand centre urbain, des éléments sérieux mettent en doute la croyance dans l'efficacité d'un modèle didactique autonome et universel. Il faut suggérer qu'il est nécessaire de toujours renouveler et accroître les références théoriques.

4. Conclusion et perspectives

C'est la raison pour laquelle nous avons entrepris des discussions avec des chercheurs français afin de développer un programme d'études dont l'objectif principal consiste à renouveler les connaissances théoriques et méthodologiques relatives aux tensions suscitées par l'enseignement des mathématiques et à

poursuivre, sur des bases théoriques élargies, les recherches dans l'espace éducationnel brésilien.

C'est vers la sociologie que nous souhaitons nous tourner car il nous semble que cette discipline a à dire et à comprendre sur l'enseignement des mathématiques. Le déplacement de nos préoccupations vers la sociologie exige une réflexion théorique et un travail empirique que nous mènerons dans une perspective comparative en France et au Brésil.

L'idée générale qui guide une série de travaux récemment entrepris par les auteurs de ce texte – Vinicio de Macedo Santos et Patrick Trabal – consiste à interroger les façons dont le monde sensible, physique, social – ce que d'aucuns nomme « le réel » – est engagé dans l'enseignement des mathématiques. Il s'agit de prendre au sérieux la tension entre d'une part, la volonté, diversement présente dans l'histoire des mathématiques de rompre avec le monde sensible (qu'il s'agisse des travaux se réclamant d'une référence à Platon ou de ceux se référant à quelques conceptions formalistes), et d'autre part, la nécessité de faire écho, sous une forme ou sous une autre, aux préoccupations des apprenants, à leur vécu, à leur projet, à leur expérience... lesquels sont largement inscrites dans le monde sensible. Pour cela, nous analysons les marques de présence du « réel » dans les programmes et textes officiels (lesquelles se donnent souvent à lire en termes d'utilité voire d'utilité sociale des mathématiques), dans les manuels scolaires en portant l'analyse sur les enjeux de l'introduction d'une notion et sur les exercices (le réalisme de la situation à mathématiser, lorsque l'exercice n'est pas posé sous une forme mathématique, sera alors à interroger), et enfin dans les pratiques des enseignants et des élèves (des enquêtes sont prévues).

Ce travail devrait permettre de mettre à l'épreuve des hypothèses selon lesquelles il réside une profonde ambivalence des acteurs de l'enseignement des mathématiques dans le rapport de la discipline au monde « réel » : une propension à penser que l'activité mathématique doit se départir de toute référence à l'expérience sensible, une certitude que les mathématiques sont utiles au monde (allant parfois jusqu'à une conception « panmathématique » qui considère qu'elles sont présentes partout) et doivent à ce titre, être enseignées à tous, une hésitation à accepter le travail de « mathématisation du réel » que certains préféreraient confier à des disciplines empiriques, un relatif embarras sur les processus de sélection qui s'appuient sur les mathématiques,...

Parallèlement, nous souhaitons porter l'analyse vers les formes de critique de la mathématisation. Renouant ainsi avec une « sociologie de la critique »²¹, il s'agit d'étudier les mathématiques lorsqu'elles sont en débat pour repérer la perception des différents acteurs, les processus de dénonciations et de justifications. A la suite de travaux portant sur les représentations de cette discipline et de son enseignement²² on vise à repérer les attributions de sens à cette discipline, des conceptions sur leur utilité, sur le rôle social et les conséquences dans la vie ordinaire. Le matériau est en cours de constitution ; forums internet, discussions avec des enseignants, observations d'interactions. A la suite de quelques tentatives²³, on envisage également d'organiser pendant les cours de mathématiques des débats sur les forces et les faiblesses de cette discipline.

²¹ Boltanski, « Sociologie critique et sociologie de la critique », p. 124-134.

²² Trabal, *La violence de l'enseignement des mathématiques et des sciences* ; Trabal, « Une sociologie de l'enseignement des mathématiques », p. 57-68.

²³ Trabal, « Des lycéens discutent une text d'un mathématicien », p. 63-68.

Ainsi, en cherchant à identifier comment les élèves articulent leurs représentations, leurs expériences avec la connaissance des exigences mathématiques pour construire des formes de tangibilité²⁴, nous pensons pouvoir construire une sociologie pragmatique de l'enseignement des mathématiques qui, dans la tradition ouverte par les philosophes américains du début du 20^e siècle aura à cœur de faire des propositions pour gérer ces difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

- Abreu, Guida, « A teoria das representações sociais e a cognição matemática », *Quadrante: revista teórica de investigação*. Lisboa, vol. 4, n^o 1, 1995, pp. 25- 41.
- Atkinson, Paul, & Hammersley, Martin, « Ethnography and Participant Observation », in (eds) Denzin, N. & Lincoln, Y., *Handbook of Qualitative Research*. Californie, Sage Publications Inc, 1994, pp. 248-261.
- Barros, Antonio, « Cognições pessoais e rendimento na matemática: um programa de recuperação de alunos com dificuldades », *Estudos de Psicologia*. Lisboa, vol 12, n^o 2, 1995, pp.15-26.
- Boltanski, Luc, « Sociologie critique et sociologie de la critique », *Politix*, vol. 3, n^o 10-11, 1990, pp. 124-134.
- Chateauraynaud, Francis, « L'épreuve du tangible : expériences de l'enquête et surgissements de la preuve », *La croyance et l'enquête. Aux sources du pragmatisme. Raisons pratiques*, Paris, EHESS, vol. 15, 2004, pp. 167-194.
- Ernest, Paul, « Variedades de constructivismo : sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas », traduction de Juan Godino, *Hiroshima Journal of mathematics Education*, 2, 1994, pp.1-14.
- Fernandes, Elsa, « Fazer matemática compreendendo e compreender Matemática fazendo : a apropriação de artefatos da matemática escolar », *Quadrante : revista teórica de investigação*, Lisboa, vol. 9, n^o 1, 2000, pp. 49-86.
- Glaserfeld, Ernst von, « Constructivism in Education », in (éd) Husen, T. and Postlethwaite, N., *International Encyclopedia of Education* , Oxford, Pergamon, 1989, pp. 162-193.
- Gómez-Granell, Carmen, « A aquisição da linguagem Matemática : símbolo e significado », in (éds) Teberosky, A. e Tolchinski, L. *Além da alfabetização : a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e Matemática*, São Paulo, Editora Ática, 1997, pp. 257-282.
- Miranda, Ana, Fortes, Carmen y Gil, Maria Dolores, *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas : un enfoque evolutivo*, Málaga, Ediciones Aljibe, 1989.
- Perez, Julia Centeno, « Dificultades, errores, conflictos y obstáculos », *Números decimales. Por qué? Para qué?*, Madrid, Editorial Síntesis, 1988, pp.135-149.
- Santos, Vinício de Macedo, Teixeira, Leny Rodrigues, et Morelatti, Maria Raquel. « Professores em formação: as dificuldades de aprendizagem em Matemática como objeto de reflexão », *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 10, n^o 12, 2007, pp. 15-25.

²⁴ Chateauraynaud, « L'épreuve du tangible: expériences de l'enquête et surgissements de la preuve », p.167-194.

- Santos, Vinicio de Macedo, (Org.), *Ensino de Matemática em debate: sobre práticas escolares e seus fundamentos*, Campinas, Cedes, vol. 1, 2008.
- « A matemática escolar, o aluno e o professor: paradoxos aparentes e polarizações em discussão », *Cadernos CEDES (UNICAMP)*, Campinas-SP, vol. 28, 2008, pp. 13-28.
- Socas, Martín, « Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria », in (éd) Rico, L. *et alii. La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Barcelona, Horsori, 1997, pp. 125-154.
- Trabal, Patrick, « Des lycéens discutent un texte d'un mathématicien : le panmathématisme de Lichnerowicz soumis à des élèves de première », *Gazette des mathématiciens* (Société Mathématique de France), n° 68, 1996, pp. 63-68.
- *La violence de l'enseignement des mathématiques et des sciences : un autre approche de la sociologie des sciences*, Paris, L' Harmattan, Coll Education et formation, série Références, 1997.
- « Une sociologie de l'enseignement des mathématiques », *Le Télémaque*, n°15, 1999, pp. 57-68.