



# La investigación en Educación Matemática

Parte del capítulo  
Didáctica de la Matemática e  
Investigación,  
del libro MATEMÁTICA ESPAÑOLA  
EN LOS ALBORES DEL SIGLO XXI,

Editado por J. Carrillo y L.C, Contreras, abril 2000.



## Referencias

- LEON, R. y HAMILTON, W. (1981). «The Evolution of Cooperation». *Science*, Vol. 211, pp. 1390-1396.
- FRKO, G. (1989). «Approximation by superpositions of a sigmoidal function». *Mathematics of Control, Signal, and Systems*, 2, 303-314.
- MAN, J.A. y SKAURA, D.M. (1993). *Redes Neuronales: Algoritmos, aplicaciones y técnicas de programación*. Wilmington, Delaware.: Addison-Wesley/Diaz de Santos.
- JAERG, D.E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- MIN, S. (1994). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. New York: McMillan.
- Y, H.R. y C.H. PARADIMITRIOU. (1981). *Elements of the Theory of Computation*. New Jersey: Prentice Hall.
- BLATT, F. (1962). *Principles of Neurodynamics*. Washington DC: Spartan Books.
- HART, D.E. y ZINSE, D. (1985). «Feature Discovery by Competitive Learning». *Cognitive Science*, 9, 75-112.
- ILL, S. y NORVIG, P. (1997). *Inteligencia Artificial: Un Enfoque Moderno*. New Jersey: Prentice Hall.
- C.H. (1994). *A Recursive Introduction to the Theory of Computation*. New York: Springer-Verlag.
- SKY, P., MOZER, M.C. y RUMELHART, D.E. (1996). *Mathematical Perspectives on Neural Networks*. Lawrence Erlbaum Associates. Mahwah: New Jersey: Erlbaum.
- J. y GREEN, G. (1995). «Neural Networks, Approximation Theory, and Finite Decision Computation». *Neural Networks*, Vol 8, Nº1, pp. 31-37.

## DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN

Luis Rico / Modesto Sierra  
 Universidad de Granada / Universidad de Salamanca

## 1. Introducción

La finalidad de este estudio es presentar la trayectoria recientemente realizada por el área de conocimiento Didáctica de la Matemática. El despegue y desarrollo de la Didáctica de la Matemática han sido imparable, a nivel internacional desde la segunda guerra mundial y en nuestro país desde la recuperación de la democracia; igualmente lo es su consolidación como disciplina académica. Esta evolución se ha hecho al tiempo que se producía un enorme desarrollo en las otras disciplinas matemáticas y el despegue de las ciencias de la educación, y es deudora de ambos. Al igual que ocurre en otras materias fronterizas, esta dualidad de referencias supone, a un tiempo, nuestra debilidad y nuestra fuerza.

El esquema elegido para este capítulo trata de economizar ideas y estructurarlas en un sistema coherente, que permita controlar la complejidad de temas abordados. Igualmente, sintetiza las principales actuaciones realizadas y algunos de los logros alcanzados. Siguiendo el objetivo general marcado para esta obra, nos proponemos lograr que los especialistas españoles en Didáctica de la Matemática reconozcan sus rasgos definitorios y mejoren su comprensión sobre la propia disciplina. Aunque comparte un mismo objeto de estudio con el resto de las disciplinas matemáticas, la Didáctica de la Matemática tiene rasgos específicos diferenciadores que, a veces, no resultan sencillos de entender o explicar. Por ello, también nos proponemos que compañeros de otras áreas de conocimiento, en especial los matemáticos, puedan comprender las preocupaciones que alientan nuestro trabajo, sus fundamentos disciplinares, las ambiciones que lo sostienen y la maestría alcanzada por nuestros expertos en sus investigaciones y estudios.

La primera parte, que comprende los cuatro primeros apartados del trabajo, está dedicada a ubicar la Didáctica de la Matemática dentro del amplio campo de problemas y actividades que se conocen con el nombre de educación matemática. Posuimos distintos ámbitos de actuación, que se caracterizan por diferentes competencias, agentes, instituciones y problemas; así mismo establecemos relaciones entre esos campos. La Didáctica de la Matemática es uno de esos campos, queda ubicada dentro la educación y como parte de la cultura, de la cual forma parte relevante el propio conocimiento matemático. Una segunda parte, quinto apartado, desarrolla nuestra idea de investigación y ejemplifica resultados y logros para cada uno de los campos de actuación delimitados. Finalmente, en una tercera parte que comprende desde el sexto apartado en adelante, se hace balance de las actividades que tienen lugar en Didáctica de la Matemática en el momento actual, mostrando un ejemplo de investigación y presentando de manera detallada el trabajo realizado en España.

Esperamos conseguir así el objetivo de explicar las líneas generales en la evolución de la Didáctica de la Matemática y los esfuerzos de comprensión y organización hechos hasta el momento por los especialistas en este campo.

## 2. Educación matemática y Didáctica de la Matemática

La sociedad proporciona a hombres y mujeres los recursos que necesitan para su desarrollo físico, afectivo, intelectual y moral, así como los medios para su sostenimiento. La cultura es uno de estos bienes sociales ya que permite dar razón del entorno humano y explicar objetos, hechos y acciones.

El sistema educativo introduce a niños, adolescentes y jóvenes en la cultura a la que pertenecen y les proporciona parte importante de sus tradiciones públicas. Mediante la educación se transmiten conocimientos, artes, destrezas, lenguajes, convicciones, actitudes y valores (Stenhouse, 1984). Las matemáticas son una de esas herramientas intelectuales, parte de la herencia cultural que se transmite por medio del sistema educativo.

Nuestra conceptualización sitúa las matemáticas en la encrucijada de las ciencias con las humanidades. Las matemáticas son conocimiento social y público, forman parte de las estructuras de significado que dan sentido y dotan de objetividad a nuestra información, constituyéndola en conocimiento fundado (Bloor, 1991).

Desde las primeras civilizaciones las matemáticas han sido instrumentos culturales genuinos, y han formado parte de los planes para la formación de los ciudadanos. Esto lo observamos en sumerios y babilonios, con la fundación hacia el 2500

a.C de las escuelas de escribas (edubba), pasando por las instituciones educativas de la civilización greco-latina, las escuelas medievales, los centros educativos de la época moderna, hasta nuestros días. En todos los casos aritmética y geometría han formado parte de la cultura de cada época, de la educación de las personas cultivadas.

### 2.1. Educación matemática

En las sociedades contemporáneas las matemáticas son parte esencial de la formación básica que han de compartir todos sus miembros. Por esto tiene sentido hablar de educación matemática, ya que se trata de una actividad social clave para la formación de los ciudadanos en una sociedad democrática avanzada.

El sistema convencional de enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje son parte relevante de la educación. La educación matemática abarca desde las primeras nociones sobre la cantidad, la forma y la deducción que enseñamos a nuestros niños hasta su culminación en una formación profesional o en estudios superiores.

La educación matemática implica una actividad intelectual intensa de carácter explicativo, que se sostiene sobre el aprecio por la belleza formal, las nociones de prueba y argumentación, y que se expresa mediante una gran variedad de acciones, términos, símbolos, técnicas, actitudes y recursos. Las matemáticas son una construcción humana que se utiliza con fines técnicos para la modelización de nuestro entorno y se aplica en la resolución de problemas prácticos (Restivo, 1992).

La educación matemática abarca el dominio de conceptos y procedimientos para comunicar conocimientos y organizar grandes parcelas de la actividad intelectual, científica, económica, cultural y social. Las matemáticas son el lenguaje de la ciencia y dan forma objetiva a multitud de problemas, permitiendo una crítica racional previa a la toma de decisiones (Skovmose, 1994).

Desde la perspectiva del especialista, consideramos la educación matemática como un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general, de actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tienen lugar con carácter intencional (Rico, Sierra y Castro, 1999). La educación matemática la llevan a cabo determinados profesionales en unas instituciones y mediante unas tareas; en todos los casos se proponen dar respuesta a problemas y necesidades derivados de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La enseñanza de la matemática es actividad social y, también, actividad científica. Un primer ámbito donde esta actividad científica tiene vigencia es en la propia

enseñanza de la ciencia. La enseñanza es necesaria para la formación matemática del individuo. Cada individuo ha de lograr competencia en el manejo de los sistemas de representación matemáticos y en sus operaciones. La enseñanza obligatoria comporta una formación científica básica para todos los ciudadanos:

«Uno de los objetivos básicos de la enseñanza de la ciencia es la adquisición por parte de los estudiantes de representaciones mentales adecuadas de conocimientos científicos previos. Dichas representaciones no sólo son lingüísticas: no basta con poseer los conceptos o saberse de memoria las leyes básicas de una determinada teoría, sino que hay que haber interiorizado el por qué de dichas teorías, así como las técnicas de escritura, observación, medición, cálculo y experimentación que van ligadas a la misma.

La adquisición de representaciones está sometida a un proceso de normalización; no se trata de una actividad exclusivamente individual, sino que está profundamente mediatizada por la sociedad. Esta determina, al menos en la enseñanza reglada, los contenidos técnico-científicos a enseñar y el orden de su presentación. A continuación evalúa e interactúa con el individuo a través de sus agentes docentes, dándole su mayor o menor competencia, al par que corrigiendo, motivando y, en general, normalizando las representaciones mentales que el sujeto individual se haya hecho de la teorías.» (Echevarría, 1995, pp. 60-62).

Los profesionales que trabajan en educación matemática abarcan un amplio abanico de tareas para llevar adelante, en toda su complejidad, la transmisión del conocimiento matemático a los ciudadanos en nuestra sociedad actual. Entre esas tareas tenemos: impartir clases de matemáticas, promover el aprendizaje de los escolares, evaluar el conocimiento de los alumnos, diseñar y evaluar materiales curriculares, escribir libros de texto y otros documentos escolares, formar profesores, gestionar o coordinar los aspectos administrativos de la educación matemática, orientar al profesorado de matemáticas, editar revistas y difundir experiencias educativas, dirigir departamentos o equipos de profesores, colaborar con grupos de investigación e innovación, investigar, y muchas otras que pueden considerarse.

Estas actividades se llevan a cabo en diversas instituciones del sistema educativo: centros de educación infantil y primaria, centros de secundaria, centros universitarios, centros de formación de profesores, departamentos universitarios, centros de investigación, dependencias administrativas, editoriales y otros.

Los profesionales de la educación matemática tienen formaciones diferentes según las competencias que tienen que desarrollar y llevan a cabo su trabajo mediante prácticas diversificadas, que tienen perfiles profesionales distintos, en los que deben ubicarse.

## 2.2. Didáctica de la Matemática

En este trabajo estamos interesados por una clase concreta de actividad profesional dentro de la educación matemática. Nos referimos a la investigación en Didáctica de la Matemática.

Para tener una perspectiva clara sobre la investigación en Didáctica de la Matemática nos proponemos ubicar esta actividad dentro del marco general de la educación matemática donde, a nuestro juicio, adquiere significado.

En términos generales distinguimos en educación matemática tres sentidos distintos, cada uno de los cuales establece un campo diferente de actuación:

\* En primer lugar, educación matemática como conjunto de conocimientos, artes, destrezas, lenguajes, convenciones, actitudes y valores, centrados en las matemáticas y que se transmiten por medio del sistema escolar. La educación matemática en este ámbito se refiere al conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje; la finalidad de la educación matemática se centra aquí en enseñar y estructurar de manera adecuada los diversos significados de los conceptos matemáticos, superando la aparente exclusividad de su significación formal y deductiva. También se refiere a la organización y planificación necesarias para que estos conocimientos sean transmitidos, aprendidos, utilizados y compartidos socialmente por la totalidad de los ciudadanos.

\* En segundo lugar, educación matemática como actividad social que tiene lugar en unas instituciones determinadas y que es llevada a cabo por unos profesionales cualificados. En este caso se entiende la educación matemática como la totalidad de acciones y condiciones que hacen posible la enseñanza de las matemáticas. Abarca pues el conjunto de conocimientos, procesos y condiciones que posibilitan las interacciones entre profesores y alumnos en el medio escolar sobre un tópico matemático, es decir, que hacen viable la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La educación matemática se refiere aquí a la actividad intencional mediante la que se lleva a cabo la construcción, comprensión, transmisión y valoración del conocimiento matemático. En este ámbito, la educación matemática se refiere al análisis y estudio de las condiciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Parte importante de este ámbito se refiere al conocimiento y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

\* En tercer lugar, educación matemática como disciplina científica, es en este caso cuando nos referimos a la Didáctica de la Matemática. Se entiende aquí disciplina en su sentido académico, como totalidad y, en general, normalizando las representaciones mentales que el sujeto individual se haya hecho de la teorías.» (Echevarría, 1995, pp. 60-62). Los profesionales que trabajan en educación matemática abarcan un amplio abanico de tareas para llevar adelante, en toda su complejidad, la transmisión del conocimiento matemático a los ciudadanos en nuestra sociedad actual. Entre esas tareas tenemos: impartir clases de matemáticas, promover el aprendizaje de los escolares, evaluar el conocimiento de los alumnos, tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático. La disciplina Didáctica de la Matemática tiene como objetos de estudio propios los dos campos antes mencionados, junto con su propia fundamentación teórica. Este carácter recursivo de la Didáctica de la Matemática dentro de la educación matemática puede provocar, a veces, interpretaciones inadecuadas.

En cada uno de los tres ámbitos mencionados se llevan a cabo estudios e investigaciones:

Pasamos a presentar con algún detalle estos tres niveles, en tanto que son ámbitos de investigación para la Didáctica de la Matemática, considerando en cada caso unos profesionales, las instituciones en las que trabajan, los problemas y cuestiones sobre los que trabajan y las prácticas que los caracterizan.

### 3. Educación matemática y sistema educativo

#### 3.1 Profesionales

Para caracterizar al profesional de la educación matemática consideramos el término *educador matemático* más apropiado que el convencional de profesor de matemáticas, destacando así el predominio de los factores educativos en la enseñanza de las matemáticas sobre los puramente instructivos (Rico y Sierra, 1991).

«Entendemos por educador matemático a toda persona que pretende formar o instruir a otra, u otras, mediante las matemáticas, es decir, considera las matemáticas, en todo o en parte, como objeto de educación para las personas a cuya formación y desarrollo está contribuyendo.» (I) p. cl. p.22).

Este planteamiento considera educador matemático a todo profesional de la enseñanza que incluye entre sus objetivos educativos el transmitir nuevos conocimientos matemáticos a personas en formación. Realizan esta función un buen número de profesores, desde los niveles de educación infantil y primaria hasta la universidad; también quedan incluidos inspectores, psicopedagogos, autores de libros, asesores curriculares vinculados con la matemática y, por supuesto, los especialistas e investigadores en Didáctica de la Matemática.

La profesión de educador matemático tiene una difusión considerable en nuestro país. Nosotros hemos valorado, siguiendo diversas estadísticas de los Anuarios del Ministerio de Educación y Ciencia, un total aproximado de 211.000 *educadores matemáticos* en España, durante el curso 93-94, con el sentido amplio que hemos dado al término.

#### 3.2. Instituciones

Los educadores matemáticos, en sentido general, trabajan en las aulas de los centros escolares de los distintos niveles: educación infantil, primaria, secundaria obligatoria y postobligatoria, facultades y escuelas universitarias. El nivel de reflexión que aquí nos ocupa focaliza su atención en el conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje; su principal actividad está en la preparación e implementación de clases de matemáticas junto con la evaluación del rendimiento de los escolares, actividad que se lleva a cabo en el aula de matemáticas. Esta actividad central necesita de la planificación y el diseño de unidades didácticas, pruebas de evaluación y otros materiales escolares, actuaciones que se realizan en los seminarios y departamentos escolares. En este sentido también se pueden considerar instituciones involucradas las empresas y otras sociedades particulares, como son las editoriales o asociaciones de profesores, cuando trabajan en el diseño y producción de materiales curriculares.

Otras instituciones claves para el trabajo en este nivel son los centros de diseño de materiales, los departamentos o seminarios de profesores en los que se planifica y se toman decisiones para el desarrollo de la actividad escolar, y, en especial, las aulas, donde tiene lugar la acción educativa en toda su plenitud.

No es éste el lugar para entrar en detalle sobre la importancia que tienen las instituciones educativas, en especial los centros que articulan el Sistema Escolar en la enseñanza obligatoria, para el desarrollo de la educación matemática. Sólo dejar constancia de que, a nuestro juicio, es en estas instituciones donde las demandas educativas sobre matemáticas adquieren su auténtica dimensión social e importancia cultural. De ahí el interés que el conocimiento de estas instituciones y de las tareas

que en ellas se llevan a cabo tiene para la educación matemática y para su fundamentación científica.

### 3.3. Problemas y cuestiones

En el nivel general en que nos encontramos, las matemáticas se consideran parte esencial de la cultura básica que se debe transmitir a la totalidad de los ciudadanos y se contemplan como un conjunto fundamental de herramientas cognitivas para el desarrollo y autonomía intelectual de niños y jóvenes.

Desde esta perspectiva, la principal tarea que se debe abordar es una tarea de planificación y gestión, consistente en organizar la formación matemática de los ciudadanos, llevarla a término y valorar su realización de acuerdo con los mecanismos sociales de control de los aprendizajes. Esta perspectiva curricular permite abordar la enseñanza de las matemáticas en los diversos niveles del sistema educativo y resolver los problemas que encuentran los escolares para lograr el dominio de esos conocimientos.

La tarea descrita tiene gran complejidad y en su puesta en práctica surgen dificultades que forman parte de las preocupaciones permanentes de la opinión pública. En un informe reciente, resultado de un debate sobre los efectos de las modificaciones en el currículo escolar de matemáticas en España, leemos:

«Los cambios introducidos por la LOGSE están repercutiendo ya, tanto en los modos de aprendizaje como en sus resultados. La existencia de modificaciones en la cantidad y en la calidad de la formación matemática de los alumnos de nuestro país parece incontestable, al menos entre los docentes del nivel secundario o de la enseñanza superior (en este caso, sobre todo para aquellos en contacto más directo con los alumnos procedentes del Bachillerato). La discusión radica, entonces, en cómo valorar el sentido --positivo o negativo-- de tales modificaciones, y cuáles han de ser las posibles acciones que corrigan los fallos que se detecten.» (Boletín SEIEM, nº 5).

Las cuestiones generales que expresan las preocupaciones en este ámbito se mantienen inalterables desde hace tiempo:

- \* ¿Qué conocimientos transmitir?, ¿qué conceptos y procedimientos resultan adecuados?, ¿qué propiedades los estructuran y caracterizan?, ¿qué significados han de destacarse para los conocimientos matemáticos?

- \* ¿Cómo organizar la transmisión del conocimiento matemático?, ¿con qué secuencia?, ¿con qué dinámica de trabajo?, ¿mediante qué actividades?, ¿con qué materiales?, ¿cómo negociar significados coherentes?

- \* ¿Cómo se produce el aprendizaje de las matemáticas?, ¿dónde están las dificultades para su comprensión?, ¿qué errores se producen?, ¿cómo superarlos?, ¿cómo novilizar el conocimiento de un sujeto?, ¿cómo incrementarlo?

- \* ¿Cómo evaluar el conocimiento matemático?, ¿qué es lo importante en la comprensión?, ¿cómo se detecta?, ¿cuándo se ha logrado el dominio de un concepto o estructura matemática?, ¿cuándo se dispone de conocimiento útil?

El trabajo de los educadores matemáticos, en sus distintas competencias y funciones, consiste en proporcionar respuestas prácticas y viables, conceptualmente fundadas, a cuestiones como las anteriores y otras similares. También los investigadores en Didáctica de la Matemática abordan los problemas mencionados para encontrarles interpretación dentro de marcos teóricos más amplios y generales. En este ámbito la colaboración entre educadores e investigadores es frecuente y necesaria.

La investigación en Didáctica de la Matemática ha estado, tradicionalmente, ocupada en el estudio de problemas curriculares, tanto en su elaboración y construcción teórica como en su evaluación y control; se ha centrado así en programas de innovación curricular, puesta en práctica de nuevas propuestas didácticas y valoración de los aprendizajes.

El papel del profesor en este ámbito de investigación suele ser el de colaborador y participante activo. Algunas orientaciones metodológicas, como es el caso de la investigación-acción, sitúan la responsabilidad de la investigación sobre innovación curricular en los equipos de profesores.

Por ello es motivo de debate el papel del profesor en este ámbito. En la implementación del currículo en el aula el papel del profesor no puede reducirse a una actuación meramente pasiva y transmisora de las decisiones tomadas por otros. Se reivindica la autonomía del profesor basada en su participación como investigador, que se vincula con los estudios sobre innovación y cambio curricular.

«La clave del procedimiento [de innovación], en su totalidad, es el papel del profesor como investigador. El proyecto no es tan sólo un estudio de profesores que se están analizando a sí mismos: la aplicación de sus resultados depende de que los docentes sometan a prueba sus hipótesis, mediante investigación relativa a sus pro-

pias situaciones. Esto implica una clase especial de profesionalidad: la enseñanza basada en la investigación.» (Steinhouse, 1984; p. 193).

El ideal es que, en un proceso de innovación, la especificación del currículo aliente una investigación y un programa de desarrollo por parte del profesor, mediante el cual éste mejore progresivamente la comprensión de su propia labor y perfeccione su enseñanza. De este modo, toda investigación y desarrollo del currículo bien fundados han de estar basados en estudios realizados en el aula y sostenerse sobre el trabajo y las experiencias de los profesores.

La posición clave que desempeñan los profesores en estos estudios justifica la amplia discusión sobre su papel como investigadores. Sin dejar de reconocer que se trata de un problema complejo, nuestra posición en este punto quiere ser matizada y equilibrada. El profesional de la educación con sentido amplio asume algunas características del investigador como son la capacidad para un ejercicio profesional autónomo mediante el análisis sistemático, el trabajo en equipo, el estudio de la labor de otros profesores y la falsación de innovaciones curriculares mediante criterios empíricos sostenidos por la verificación en el aula.

El profesor-investigador es aquel que se preocupa por comprender mejor su propia práctica y se propone interpretar racionalmente la propia experiencia. En este contexto la teoría es un marco general para facilitar una estructuración sistemática de la actividad escolar y la comprensión de la complejidad de las tareas de enseñanza y los procesos de aprendizaje. Pero el interés del profesor suele quedar limitado por el propio interés de la innovación; no trasciende al marco teórico más amplio del cual esa experiencia forma parte. Éste es un trabajo del investigador en Didáctica de la Matemática quien, apoyándose en la colaboración del profesor, puede progresar en su esfuerzo de comprensión general, del cual la innovación estudiada es sólo un ejemplo.

Gran parte de la investigación realizada en Didáctica de la Matemática está ubicada en este ámbito de actuación. Nos referimos al amplio campo de las investigaciones curriculares y cognitivas, tanto las de carácter general como las que se refieren a la planificación, transmisión y aprendizaje de conocimientos matemáticos específicos. También los estudios sobre evaluación y rendimiento, estudios comparativos y longitudinales, estudios sobre dificultades específicas en el aprendizaje de las matemáticas, estudios sobre el empleo, utilidad y limitaciones de multitud de materiales y recursos (Rico y otros, 1997). Las elaboraciones teóricas tratan de aportar, desde el tercer nivel de reflexión que hemos considerado, las herramientas adecuadas para la resolución de los problemas que se plantean en el nivel curricular.

El profesor de matemáticas tiene que ser, de manera general, experto en Didáctica de la Matemática. Su actividad específica como investigador está en el ámbito del diseño, la innovación curricular o la evaluación. En estos casos las actuaciones de los profesores son relevantes, imprescindibles y legítimas, pero esto no debe confundirnos y hacemos pensar que estas tareas del profesor abarcan la totalidad de ámbitos de actuación en educación matemática, reduciendo ésta a esos campos y agotando el trabajo teórico en esos estudios.

#### 4. Educación matemática y formación de profesorado

##### 4.1 Profesionales

El segundo nivel que consideramos se refiere a la formación de profesores de matemáticas. Como Kuhn (1975) ha puesto de manifiesto, las modernas disciplinas se caracterizan por una especialización cada vez más sofisticada, de ahí que las comunidades de profesionales se encuentren diversificadas según diferentes competencias. Haciendo un esfuerzo de generalización (y, por tanto, de simplificación) es usual distinguir unos pocos campos prioritarios de competencias en cada comunidad profesional. En nuestro caso distinguimos tres tipos de profesionales, que responden a la distinción tradicional entre ciencia, formación y tecnología; entre teoría, formación y aplicación; entre los contextos de descubrimiento y justificación, los de formación, y los de aplicación. En definitiva, distinguimos entre investigadores, formadores y técnicos.

En educación matemática hay un cuerpo de profesionales cuya competencia consiste en mantener abiertos los frentes de indagación tanto teóricos como empíricos de cada disciplina. Estos profesionales se ubican en las universidades y centros de investigación especializados, son los investigadores de la disciplina Didáctica de la Matemática. Los investigadores construyen, critican y difunden conocimiento fundado. Pero, como en la mayor parte de las disciplinas, el conocimiento teórico por sí sólo es insuficiente; las construcciones teóricas son herramientas conceptuales que necesitan ser comprobadas y validadas en contextos prácticos. En el apartado anterior hemos considerado como grupo técnico de profesionales a los educadores matemáticos.

La comunicación entre técnicos e investigadoras necesita de otro grupo de profesionales que mejoren la cualificación de los primeros transmitiéndoles los conocimientos de los segundos, que contribuya a la formación inicial de aquellos o les

reciente, mediante planes de formación permanente. Por ello es necesario considerar un segundo grupo de profesionales. Se trata de los formadores de profesores, de todos aquellos profesionales que, de un modo u otro, trabajan sobre el conocimiento y la formación del profesor de matemáticas; aquellos que proponen de manera sistemática a los educadores matemáticos las diversas aplicaciones prácticas que se derivan del trabajo de reflexión teórica e indagación empírica de los investigadores.

Pensemos en todos aquellos cuyo interés se centra en profundizar y mejorar sistemáticamente e intencionalmente el conocimiento de los profesores de matemáticas, aportarles nuevas herramientas y conocimientos prácticos. Estos profesionales trabajan en los centros de formación de profesores, de formación inicial: centros universitarios y de formación permanente, centros de profesores en sus diversas variantes. Pero también podemos encontrar expertos en formación de profesores en los grupos de innovación, entre divulgadores de la Didáctica de la Matemática, entre los inspectores docentes, en los coordinadores y responsables de los seminarios de trabajo de Primaria y de Secundaria, es decir, entre los profesionales críticos y reflexivos que tratan de compartir con sus compañeros los resultados de su propia práctica.

La experiencia nos dice que el técnico especialista en formación permanente de profesores de matemáticas es un profesional cuyas competencias están apenas comenzando a delimitarse, y cuyo perfil profesional no termina de estar definido. La formación de profesores no constituye un campo profesional diferenciado dentro de la educación matemática en algunos países; en nuestro país la consideración de su especificidad y de sus particularidades es relativamente reciente.

Una de las dificultades para caracterizar el colectivo de estos profesionales está en el carácter voluntario y asistemático con el que muchos de ellos asumen su actividad. Uno de los fracasos de las recientes innovaciones educativas derivadas de la LOGSE hay que situarlo en la incapacidad para dotar de un estatus profesional específico dentro del Sistema Educativo a los técnicos de la formación permanente, a los coordinadores de los centros de profesores e innovadores de la práctica profesional en matemáticas.

## 4.2. Instituciones

Desde la creación y consolidación del sistema nacional de educación en España, a mediados del siglo XIX, se puede asegurar que han existido dos modelos en la formación inicial del profesorado. El primero de ellos se refiere a la formación del profesorado de educación primaria en instituciones específicas, que han recibido distintas denominaciones a lo largo de la historia como Escuelas Normales, Escuelas de

Magisterio, Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de Educación General Básica, en estas instituciones el profesor de educación primaria recibía una formación con cuatro componentes: científica, didáctica, psico-pedagógica y prácticas de enseñanza; estas cuatro componentes han tenido diferente peso a lo largo de la historia. El segundo modelo se refiere a la formación del profesorado de secundaria donde ha primado la formación matemática en las Facultades de Ciencias o de Matemáticas, con algún complemento en formación didáctica o psicopedagógica. Esta tradición, basada en dos modelos diferentes, para la formación de profesores de primaria y la formación de profesores de secundaria ha sido común en la práctica totalidad de países europeos.

Por lo que se refiere a la formación inicial de los Maestros, al considerar los sucesivos planes de estudio a lo largo de este siglo en España se puede comprobar que siempre han estado presentes las matemáticas, aunque no ha ocurrido lo mismo con su metodología y su didáctica (Sierra, 1987; Sierra y Rico, 1996).

Los actuales planes de estudio del Título de Maestro (Real Decreto 1440/1991) derivados de la Ley de Reforma Universitaria (LRU) de 1983, marcan los criterios y directrices generales que configuran los estudios conducentes a dicho título. Este decreto establece una serie de especialidades, señalando para cada una de ellas una serie de materias troncales, que marcan el perfil común de los profesores de esa especialidad. Incrementar la formación profesional de los futuros profesores de Primaria era uno de los objetivos de los nuevos planes de estudio. Sin embargo, la formación en Didáctica de la Matemática de los estudiantes de Magisterio no ha recibido la atención necesaria en los nuevos planes, al igual que ocurre con las didácticas de las restantes materias del currículo de primaria.

En Abrera y cols. (1998) se puede apreciar el debate existente en la actualidad sobre las necesidades formativas de los profesores de primaria en Didáctica de la Matemática, las coincidencias y diferencias entre los programas que se imparten en distintas universidades y la discusión, apenas iniciada, relativa a la metodología y evaluación en estas asignaturas.

La formación inicial del profesorado de enseñanza secundaria en España se ha sostenido sobre una filosofía distinta de la seguida para la formación del profesorado de primaria. Implícitamente se ha apoyado en la máxima «Para enseñar es suficiente con el dominio de la disciplina», lo cual ha dado lugar a que el profesor de matemáticas de secundaria tenga una fuerte formación científica sobre su disciplina y una nula formación sobre otros conocimientos profesionales, necesarios para ejercer como Profesor.

En algunas universidades ha existido la especialidad de Metodología de las Matemáticas en los planes antiguos, pero en los actuales planes de estudio para el TÍTULO de Licenciado en Matemáticas (Real Decreto 1416/1990) derivados de la Ley de Reforma Universitaria (LRU) no se contempla la Didáctica de la Matemática como materia troncal. Algunas universidades (Alicante, Almería, Cantabria, Granada, Autónoma de Barcelona, La Laguna y Valencia) han introducido asignaturas optativas de Didáctica de la Matemática en los segundos ciclos de la Licenciatura de Matemática, oscilando su carga docente entre 6 y 18 créditos, según las diferentes universidades.

La Ley General de Educación estableció el *Curso de Aptitud Pedagógica* (CAP) impartido por los Institutos de Ciencias de la Educación, para la formación psicopedagógica de los licenciados en las diversas materias; este curso se considera como mero trámite administrativo sin carácter formativo profesional. La Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 estableció un nuevo curso de formación inicial para el profesorado, llamado *Curso de Cualificación Pedagógica* (CCP); actualmente no se ha desarrollado la normativa legal necesaria para el desarrollo de este curso por lo que, en la práctica totalidad de universidades, la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria se realiza mediante los antiguos CAPs que, mediante 30 horas de clases teóricas, pretenden proporcionar la formación básica en Didáctica de la Matemática. Esta preparación, acompañada de una estancia de dos a cuatro semanas en un aula de matemáticas de secundaria, es todo el conocimiento didáctico que, en la mayor parte de las universidades, se considera adecuado para la formación inicial del profesor de matemáticas, al igual que ocurre para el resto de las áreas curriculares.

En cuanto a la formación permanente del profesorado de matemáticas, hay que señalar la creación de los *Centros de Profesores* -CEPs- por Real Decreto 2112/84 de 14 de noviembre (B.O.E. 24-XI-84), que se transforman posteriormente en *Centros de Profesores y Recursos* -CPRs-, como uno de los intentos recientes más ambiciosos por institucionalizar la formación permanente del profesorado. En estos Centros -actualmente denominados *Centros de Profesorado*- se pretende que los profesores sean los propios agentes de su formación, organizados en seminarios de trabajo, ofreciendo los CPRs la estructura administrativa y técnica de apoyo. A partir del año 87 se inició una nueva etapa, que adopta una estrategia de formación más abierta, dando participación a los profesores de los departamentos universitarios y a especialistas de otros ámbitos.

Con la intención de disponer de sus propios especialistas-asesores pedagógicos en las distintas áreas del currículo, la Administración convoca cursos de Formadores de Profesores en las diversas disciplinas y, en particular, en matemáticas. Sin embar-

go, la dispersión de objetivos, la ausencia de una política estable de formación, un exceso de trabajo, la burocratización de las funciones del asesor y una evidente falta de medios han desbordado el proyecto de los CPRs, que quedó agotado a comienzos de los 90 (Rico, Sierra y Castro, 1999). Las nuevas necesidades de formación del profesorado de secundaria, derivadas de la implantación de los nuevos planes de estudio debidos a la LOGSE, superan, en la mayoría de los casos, las posibilidades de los CPRs; en estos momentos hay que acudir a grupos de especialistas, en los que se integran los asesores, con una gran presencia de expertos universitarios.

#### 4.3. Problemas y cuestiones

La formación didáctica del profesorado de matemáticas de primaria y de secundaria es uno de los ámbitos de actuación de la educación matemática con más riqueza y variedad de problemas y, por tanto, con mayor potencialidad para la investigación y para el desarrollo y consolidación de la disciplina Didáctica de la Matemática.

La situación actual sobre formación inicial de Maestros de Primaria y de los profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria en Didáctica de la Matemática es, claramente, insatisfactoria y así es percibido por la comunidad de especialistas. Como ejemplo reciente, en el Informe titulado *Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria*, realizado por diferentes sociedades de matemáticos convocadas por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y publicado en el número 31 de *Suma*, puede leerse lo siguiente:

"...la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas, tanto en las escuelas de magisterio como en las facultades de matemáticas deja mucho que desear. En las primeras porque el actual plan de estudios de magisterio mantiene una formación puramente testimonial en matemáticas (entre un 2% y un 7% del total de créditos, en términos generales) (...).

En las segundas, porque no se da, con escasísimas excepciones, formación acerca de los temas que posteriormente los profesores de secundaria tendrán que explicar, así como tampoco acerca de didáctica de las matemáticas. En este sentido se constata que en las facultades de matemáticas la formación parece que va en la línea de que todos fueran a hacer investigación en Matemáticas, con demasiado contenido matemático y sin atender nada a cuestiones como psicología del aprendizaje matemático, historia de las matemáticas, instrumentos concretos para la didáctica, juegos, aplicaciones,... que ciertamente le serían de inestimable ayuda en su labor al futuro profesor." (p.17-18).

La universidad española, lamentablemente, sigue sin entender ni atender correctamente la formación inicial del profesorado de secundaria: no le atribuye un contenido específico basado en el dominio del propio campo disciplinar, sino que lo confunde con una formación pedagógica generalista; tampoco reconoce la preparación de sus propios especialistas para llevar a cabo estas tareas. El resultado son unos cursos y planes de formación inicial superficiales y desestructurados, de cuya utilidad están convencidos todos sus participantes, pero que facilitan el cumplimiento de un requisito formal a un precio razonable.

La formación permanente del profesorado de matemáticas es, en estos momentos, otra cuestión pendiente de desarrollo en el sistema educativo español. Transferidas las competencias en materia educativa, o a punto de transferirse a todas las comunidades autonómicas, son necesarios planes concretos y detallados para esta formación, que aún no se han abordado.

Sin embargo, la formación inicial y permanente del profesorado de primaria y secundaria es un campo preferente de actuación en didáctica de la matemática. La necesidad de fundamentar dicha formación, identificando componentes básicos, dio lugar, hace ya algunos años, a la creación del grupo BACOMET (Basic Components of Mathematics Education for Teachers), cuyo fruto ha sido la publicación de la obra *Perspectives on Mathematics Education* (Christiansen, Howson y Olte, 1986). También el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) ha realizado recomendaciones sobre esta formación en sus *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991). Entre nosotros, los componentes del grupo de trabajo *Conocimiento y desarrollo profesional del profesor*, de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, vienen desarrollando una reflexión sistemática sobre este asunto.

Gran parte de la investigación por desarrollar y realizar en Didáctica de la Matemática corresponde a este ámbito de actuación.

Igualmente son múltiples las cuestiones que quedan abiertas:

- \* ¿qué componentes básicas constituyen el necesario conocimiento disciplinar y académico para un profesor de matemáticas?
- \* ¿cuántos y qué campos de las matemáticas debe conocer un profesor?
- \* ¿cómo se estructura el conocimiento curricular del profesor en formación?
- \* ¿cómo puede mejorarse el conocimiento profesional del profesor en activo?
- \* ¿cómo promover el trabajo en equipo para la planificación y el diseño?

\* ¿qué destrezas son necesarias para la gestión de un aula de matemáticas?

\* ¿cómo adquiere formación práctica el profesor de matemáticas?

## 5- La disciplina Didáctica de la Matemática

### 5.1 Profesionales

El tercer ámbito de reflexión que hemos establecido se refiere a la disciplina científica que estudia las cuestiones y problemas de la educación matemática, los investiga y los aborda teórica y empíricamente. Nos referimos a la Didáctica de la Matemática. Los investigadores en Didáctica de la Matemática constituyen un colectivo de profesionales reconocibles por la realización sistemática de trabajos académicos, por su pertenencia a grupos internacionales y, fundamentalmente, por su producción regular de trabajos de investigación en este campo, sometidos a la crítica y el control de los expertos. En sentido estricto, estos investigadores constituyen la comunidad de especialistas que se ocupan y trabajan en Didáctica de la Matemática.

Esta comunidad profesional constituye un grupo muy reducido en España y su procedencia está poco diversificada. Una descripción aceptable de la ubicación actual de los investigadores en Didáctica de la Matemática es la siguiente:

«El oficio de investigar en didáctica de las matemáticas en España, lo practican profesores. No hay investigadores en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas que la hagan, no existen institutos o centros de investigación dedicados a la didáctica de las matemáticas con personal fijo propio como los que conocemos en otros países (...) Algunos profesores que practican este oficio tienen la obligación de hacerlo -quiero decir, la obligación establecida por su condición de funcionario-: son los profesores de universidad que están adscritos al área de conocimiento didáctica de la matemática (...)

Otros profesores que practican este oficio no tienen la obligación de hacerlo. Éste es el caso de los profesores no universitarios que, por su cuenta, en grupo o junto con profesores universitarios, investigan. Aunque aún es pronto para hacer apreciaciones de carácter general, me atrevo a aventurar que gran parte de esos profesores tendrán una dedicación eventual al oficio.» (Puig, 1998, p. 66).

La dimensión de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática puede establecerse en base a distintos componentes. Teniendo en cuenta los profesores numerarios de los cuerpos universitarios que constituyen el Área de Didáctica de

la Matemática en la Universidad Española (Anuario del MEC para el año 1993), los miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, y los licenciados matriculados en los diversos programas de doctorado en Didáctica de la Matemática que se han impartido en las universidades españolas durante el curso 98-99, podemos estimar que el colectivo de investigadores profesionales en Didáctica de la Matemática se mueve en torno a los 300 miembros, actualmente.

La caracterización anterior, como ocurre con algunas reflexiones analíticas, puede resultar restrictiva en exceso. Limitar la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática en nuestro país a un grupo restringido de 300 personas parece que distorsiona la realidad y no tiene en cuenta el enorme esfuerzo de investigación llevado a cabo en esta disciplina durante los últimos 30 años en España. Pero es un hecho constatado que las condiciones estructurales que la sociedad española proporciona a los educadores matemáticos, a finales de la década de los 90, sólo da oportunidad a un reducido número de personas para ejercer la profesión de investigador en Didáctica de la Matemática con carácter estable. Esas condiciones son inadecuadas y limitan la enorme potencialidad de los educadores matemáticos españoles en su campo de investigación, pero tratar de ignorarlas o de ocultarlas retóricamente sólo sirve para aplazar la necesaria reflexión y la toma de decisiones que lleven a superar esta situación.

## 5.2. Instituciones

Las instituciones que desarrollan investigación en Didáctica de la Matemática son de dos tipos: universidades y centros de investigación.

La configuración de los departamentos universitarios en los que se realiza la investigación en Didáctica de la Matemática varía de unos países a otros, desde centros muy específicos, como es el caso de los departamentos universitarios españoles, hasta otros más genéricos y bien organizados, como es el caso de los *Departamentos de Educación* de algunas universidades portuguesas.

Un segundo tipo de instituciones para llevar a cabo investigaciones en Didáctica de la Matemática son los institutos o centros de investigación. En Europa conocemos algunos centros prestigiosos de investigación como son los *Shell Center for Mathematical Education* del Chelsea College de la Universidad de Londres y de la Universidad de Nottingham (1968) en el Reino Unido, el *Zentrum für Didaktik der Mathematik* de la Universidad de Karlsruhe y el *Institut für Didaktik der Mathematik* de la Universidad de Bielefeld (1973) en Alemania o el *Instituto Freudenthal de Utrecht* (Holanda). También hacen contribuciones destacables algunos de los 30 institutos franceses *Instituts de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques*

(IREM-s). En México hay un gran centro de investigación en el *Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV)* del IPN. La infraestructura disponible, los medios y recursos que gestionan, y los diferentes grupos de expertos dedicados en exclusiva a la investigación, junto con la normativa legal en la que se sostienen, son algunas de las características de estos centros de investigación. Además de instalaciones adecuadas, con buenas bibliotecas y hemerotecas, estos centros suelen contar con colegios de primaria y secundaria, propios o vinculados a la institución, en los que realizar estudios e investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de manera regular.

En algunos países, como en Italia, los investigadores en Didáctica de la Matemática no disponen de instalaciones físicas locales en las que llevar a cabo su trabajo como investigadores; cada investigador trabaja en un centro, universitario o no, pero este trabajo no está directamente conectado con su posición institucional. La estructura para desarrollar la investigación es la de un grupo nacional, el *Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica*, que proporciona financiación y ayuda para llevar a cabo los trabajos y también un espacio institucional de reflexión, debate y control.

Las sociedades de investigadores en educación matemática han comenzado a despegar en los últimos años. En el punto 6.4 ampliamos la información sobre la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

## 5.3. Problemas y Cuestiones

La complejidad de los problemas derivados de la educación matemática origina una disciplina: la Didáctica de la Matemática. Como tal disciplina, la Didáctica de la Matemática tiene su campo de estudio en ese complejo de actividades de significación y tareas sociales de formación que hemos denominado educación matemática. La Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas así como proporcionar fundamentación teórica y sostener los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos. Es el tercer nivel de interpretación al que se hacía referencia al comienzo.

Los problemas que estudia la Didáctica de la Matemática surgen, entre otros, de los ámbitos anteriormente mencionados: desarrollo curricular y evaluación en matemáticas, formación del profesorado de matemáticas; también estudia los problemas teóricos y metodológicos debidos a su fundamentación como disciplina.

La actividad propia de la educación matemática adquiere su estatus científico mediante la investigación, es decir, la indagación sistemática con fines epistémicos. El objetivo de este documento presentar globalmente el campo de investigación de la Didáctica de la Matemática y, por tanto, dedicado a presentar detalladamente tales cuestiones y problemas.

#### 5.4. Perspectiva histórica

Las disciplinas científicas son construcciones sociales, surgen como respuesta a determinadas familias de problemas que se presentan en la naturaleza o en las instituciones. Como ocurre con toda actividad social, tienen unos referentes históricos, por lo que para comprender la situación actual de una disciplina, es necesario establecer sus antecedentes. Por su interés, presentamos una breve revisión histórica de la evolución de la investigación en Didáctica de la Matemática, con referencia a la situación española.

Kilpatrick (1994) ha estudiado de modo sistemático la historia de la investigación sobre educación matemática, ofreciendo una información exhaustiva en lo que se refiere al mundo anglosajón y, parcialmente, a la tradición alemana. Aunque desde la antigüedad han existido instituciones dedicadas a los problemas de transmisión del conocimiento matemático, no es hasta finales del siglo XVIII cuando se dan en Europa las condiciones para la emergencia de la Didáctica de la Matemática, como resultado de las ideas que sobre la educación se habían generado durante la Ilustración. Desde el comienzo del siglo XIX, como consecuencia de la implantación de sistemas escolares nacionales, se hizo necesario formar un mayor número de profesores y mejorar su preparación profesional. En este contexto tiene lugar el comienzo de la Didáctica de la Matemática como disciplina; en estos primeros momentos la influencia de las matemáticas y de la psicología son determinantes (Howson, 1984; Schubring, 1984; Kilpatrick, 1994).

Después de la segunda guerra mundial se produce una rápida expansión de la educación obligatoria y su ampliación a la educación secundaria, provocada por la revisión de los valores que sustentan la educación y la necesidad de una mayor difusión y democratización de la cultura. Esta situación plantea nuevos retos en la enseñanza de las matemáticas, que rebasan el ámbito estricto de las disciplinas matemáticas; al cabo de pocos años surge la necesidad de desarrollar un campo de especialización propio (Rico y Sierra, 1991).

Hacia mediados de los sesenta comienza la institucionalización definitiva de la Didáctica de la Matemática a nivel internacional como disciplina. Efectivamente, en

esta época se producen una serie de hechos que homologan, a nuestro juicio, a la Didáctica de la Matemática con el resto de las disciplinas. Algunos de ellos son:

- i) Celebración de Congresos internacionales específicos. Hasta el año 1969 la educación matemática ocupaba una sección en los Congresos de la *International Mathematical Union* (IMU). Es en ese año cuando se celebra en Lión (Francia) el *International Congress on Mathematical Education* (ICME) en el seno de la *International Commission of Mathematical Instruction* (ICMI), perteneciente a la IMU.
- ii) Aparición de publicaciones periódicas específicas de investigación sobre educación matemática. En 1968 se publica *Educational Studies in Mathematics*, en 1969 el *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* y en 1970 el *Journal for Research in Mathematics Education*, seguidos por otras revistas especializadas.
- iii) Incorporación plena al mundo universitario. En 1968 tuvo lugar en la Universidad de Cornell (USA) una conferencia cuyo principal objetivo consistió en establecer condiciones institucionales y científicas para integrar las investigaciones sobre educación matemática en los grados académicos universitarios (Long, Meltzer y Hilton, 1970). A partir de los años setenta diversas universidades europeas y americanas incorporan la disciplina Didáctica de la Matemática a la universidad, apoyan planes de formación para el personal investigador y, en algunos casos, programas de doctorado específicos que, recientemente, han tenido un amplio desarrollo (Hart & Hill, 1999).

En el caso español el desarrollo de la Didáctica de la Matemática se ha visto mediado en primer lugar, por el desarrollo de la matemática como ciencia y, en segundo lugar, por la posición de esta disciplina en el sistema educativo español.

Por causas históricas y sociales el desarrollo de la matemática y de la ciencia en España, en general, ha sido peculiar entre los países europeos y, durante siglos, las disciplinas matemáticas han estado al margen de la universidad española. Desde esta perspectiva hemos estudiado la evolución histórica reciente de la matemática española (Rico, 1999), donde sostenemos que la incorporación de España a la construcción y producción de conocimiento matemático, con aportación propia similar a la de otros países, en definitiva, la normalización de la producción matemática en España, ha tenido lugar con un retraso de casi cuatro siglos. En la actualidad la matemática española se encuentra suficientemente integrada en los grupos y agendas internacionales de investigación.

En relación con las ciencias de la educación, la Didáctica de la Matemática (llamada en el primer tercio de siglo Metodología de las Matemáticas) ha estado presente, en mayor o menor grado según los sucesivos planes de estudio, en la formación inicial de los Maestros desde la fundación de la primera Escuela Normal (Sierra y Rico, 1996). Es a partir de los años 70 con la promulgación de la Ley General de Educación, la constitución de los Institutos de Ciencias de las Educación (ICEs) en las universidades y el Instituto Nacional de Ciencias de la Educación (INCE), cuando se da un impulso a la investigación educativa, y en particular a la investigación sobre educación matemática. Con la Ley General de Educación (LGE) los estudios de Magisterio recuperan el carácter universitario, que ya habían tenido durante el período de la República y que habían perdido como resultado de la Guerra Civil. La Didáctica de la Matemática aparece como materia en el nuevo plan de estudios derivado de la LGE, así como en la especialidad de Metodología de la Enseñanza de Matemáticas que imparten algunas universidades. Todas estas circunstancias favorecen la aparición de grupos que inician investigaciones en la disciplina, a través de los Planes Nacionales de Investigación educativa convocados por la red INCE-ICEs (Rico y Sierra (1994) presentan una relación de dichas investigaciones).

En la década de los ochenta se produce la institucionalización de la Didáctica de la Matemática como disciplina en la universidad española. Algunos datos importantes, que se desarrollan con mayor detalle en otros apartados de este trabajo, son:

- i) consideración de la Didáctica de la Matemática como Área de Conocimiento en la universidad;
- ii) establecimiento de programas de doctorado en algunas universidades españolas y la realización de las primeras tesis doctorales específicas en Didáctica de la Matemática como consecuencia de estos programas;
- iii) presencia regular de investigadores españoles en Congresos y Reuniones científicas de relevancia;
- iv) consecución de proyectos de investigación en convocatorias competitivas regionales, nacionales y europeas.

Todo esto significa la normalización de nuestra disciplina, paralela a la del resto de las disciplinas matemáticas. También supone el desarrollo de unas señas de identidad propias de la Didáctica de la Matemática en España.

## 6.- Investigación en educación matemática. Criterios de calidad

En términos generales, por investigación se entiende aquella actividad humana que se propone elaborar de manera sistemática conocimiento fundado sobre algún asunto. A lo largo de la historia de la humanidad se han decantado diversas métodos para la construcción sistemática de conocimiento de manera justificada. El método científico ha mostrado, desde comienzos de la edad moderna, su potencia y fecundidad para dar respuesta fundamentada a aquellas cuestiones que hombres y mujeres se plantean sobre su entorno físico, natural y social. Por método científico se entiende aquel modo ordenado de hacer basado en la observación y análisis sistemático de hechos y relaciones, en la formulación de hipótesis y teorías que interpretan, predicen o permiten actuar sobre tales hechos, y en la falsación o validación de dichas hipótesis y teorías.

De manera más precisa, entendemos por investigación la actividad de indagación basada en el método científico, sostenida por un marco epistemológico y orientada a la transformación del medio humano.

### 6.1. Investigación y Didáctica de la Matemática

Hemos delimitado tres campos de reflexión en la educación matemática, que consideran problemas distintos y proceden de ámbitos de actuación diferenciados.

Un primer campo se centra en la transmisión del conocimiento matemático y en su evaluación por los sistemas educativos, es decir, estudia los problemas derivados de la enseñanza, aprendizaje y valoración de las matemáticas en el medio escolar.

Un segundo campo contempla la formación, preparación, actuación y desarrollo de los profesionales que asumen tales procesos de enseñanza y aprendizaje intencionalmente.

El tercer campo considera la actividad de fundamentación y teorización que permite interpretar, predecir y actuar sobre los fenómenos derivados de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La investigación en Didáctica de la Matemática encuentra su objeto de estudio y trabajo en los problemas que se detectan y surgen en estos tres campos. Esta investigación selecciona sus problemas en los ámbitos mencionados y se atiene a las condiciones propias de la investigación científica: indagación sistemática en un marco epistémico y con intención transformadora del medio educativo.

El desarrollo actual de la investigación en Didáctica de la Matemática muestra una situación abierta, con diversidad de problemas que proceden de distintos ámbitos y preocupaciones; también detectamos multitud de cuestiones prácticas en estudio y diferentes marcos teóricos para su tratamiento e interpretación; igualmente, las aproximaciones metodológicas están diversificadas en distintos paradigmas.

Buena parte de la actividad intelectual de la humanidad en los últimos cuatro siglos ha estado ocupada por los esfuerzos de la investigación científica. Estos esfuerzos se han orientado hacia la búsqueda de hipótesis, es decir, de proposiciones especulativas o supuestos iniciales de carácter explicativo o causal, cuya validez se confirma o rechaza mediante la observación y el razonamiento. También esos esfuerzos se han orientado hacia la elaboración teórica, es decir, a la construcción de representaciones abstractas simplificadas de conjuntos de fenómenos de los que aportan una explicación racional y empírica plausible; dichas construcciones logran coherencia porque se enmarcan en alguna teoría general del conocimiento (R.A.C., 1996). De igual modo, la ciencia pretende proporcionar soluciones a los problemas del hombre y de su entorno; la ciencia es acción transformadora y modificadora. Estos esfuerzos, aunque constantes, son recientes en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Pese a los esfuerzos realizados consideramos que, hasta el momento, no hay marco teórico predominante con el cual abordar la totalidad, o la mayor parte, de los problemas que estudia la Didáctica de la Matemática; tampoco hay orientación metodológica exclusiva. En lo que sigue presentamos nuestra caracterización del marco epistemológico de este campo de investigación.

## 6.2. Configuración multidisciplinaria de la Didáctica de la Matemática

La Didáctica de la Matemática es disciplina fronteriza entre las ciencias de la educación y las disciplinas matemáticas y, de ahí, su carácter multidisciplinario que se refleja en la diversidad de aproximaciones con que se pueden considerar los problemas que estudia. Problemas y cuestiones de la educación matemática se han abordado, y se abordan, desde perspectivas disciplinares muy distintas.

Históricamente han sido dos las aproximaciones a la investigación en este campo: la que han realizado los matemáticos, preocupados por una transmisión adecuada y de calidad de los conocimientos, es decir, interesados por problemas de la enseñanza, y la que han realizado los psicólogos, preocupados por las dificultades del aprendizaje, principalmente. Estas dos tradiciones están en la base de la disciplina Didáctica de la Matemática y han contribuido a su despegue inicial (Kilpatrick, 1994).

Bishop (1992) distingue tres tradiciones en la investigación sobre educación matemática, que configuran la disciplina Didáctica de la Matemática: la tradición pedagógica, la empírico-científica y la filosófico-escolástica.

La tradición pedagógica es la más antigua y tiene sus antecedentes inmediatos en los trabajos de Comenio, Pestalozzi y Froebel. Esta tradición se preocupa fundamentalmente de lo que sucede en el aula, y trata de resolver los problemas que se presentan en la misma: el profesor es un elemento esencial en la misma; el método que se utiliza esencialmente es el de ensayo-errores, intentando refinar cada vez más los resultados obtenidos.

La tradición empírico-científica trata de convertir la Didáctica de la Matemática en ciencia experimental, utilizando esencialmente sus métodos de investigación. La preocupación de los científicos y filósofos de la ciencia ha sido el establecimiento de unos criterios de demarcación entre el saber que puede considerarse científico y el que no. El criterio más fuerte lo constituyen las reglas metodológicas del neopositivismo y su versión moderna, el racionalismo crítico de Popper, que fijan el método hipotético-deductivo y la posibilidad de falsabilidad de las teorías como el ideal de la ciencia factual. Los postulados del método hipotético-deductivo pueden resumirse en tres proposiciones:

- i) conjeturas arriesgadas y bien formuladas acerca de la realidad (que van más allá del sentido común);
- ii) severa contrastación (mediante técnicas específicas) de esas conjeturas con la experiencia;
- iii) replicabilidad de los resultados.

Pues bien, el intento de hacer de la Didáctica de la matemática una disciplina experimental ha tenido como consecuencia la aplicación de este método, con la utilización de técnicas o procedimientos específicos para la resolución de problemas concretos. Buena parte de los trabajos aparecidos en *Educational Studies in Mathematics* y el *Journal for Research in Mathematics Education*, responden a estos ideales.

La tradición escolástica-filosófica trata de la teorización crítica de la disciplina Didáctica de la Matemática. Los esfuerzos por llevar a cabo una construcción teórica propia para la Didáctica de la Matemática se inician en los años 70 y alcanzan un alto grado de elaboración durante la década de los 80. Durante estos años se muestra que la educación matemática es un campo dominios de referencia y acción están

caracterizados por una extrema complejidad: los complejos fenómenos de las matemáticas, en su desarrollo actual e histórico, y su interrelación con otras ciencias, áreas de práctica, tecnología y cultura; la estructura multidimensional de la enseñanza y la escolarización dentro de nuestra sociedad; la diversidad de condiciones y factores altamente diferenciados en la cognición individual y el desarrollo social de los alumnos, entre otros.

A partir del ICME-5, celebrado en Australia, se constituye el grupo internacional *Theory of Mathematics Education*, el cual discute en profundidad la naturaleza de la disciplina y aglutina el trabajo de un grupo cada vez más numeroso de expertos (Steiner y cols., 1984). Estos investigadores aceptan la existencia de una disciplina, tratan de delimitar sus dimensiones y reconocen las limitaciones existentes para abordar su estudio desde un marco teórico unificado; en su trabajo no postulan una teoría ya construida sino que reflexionan acerca de las condiciones necesarias para una teoría de la Didáctica de la Matemática (Steiner, 1987). En estos años los investigadores de algunos países comienzan a explicitar las características locales de la Didáctica de la Matemática. Así, Balacheff (1984) destaca la existencia de la escuela francesa, la cual concreta en una serie de conceptos elaborados y desarrollados dentro de esa comunidad y empleados como instrumentos de investigación. Entre otros, destaca los conceptos de situación didáctica, variable didáctica, contrato didáctico, campo conceptual, transposición didáctica, y teoremas en acción.

En fechas más recientes, la obra *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline* (Biehler y otros, 1994) selecciona los principales temas que estructuran la disciplina. Dichos tópicos son: currículo de matemáticas, formación de profesores, interacción en el aula, materiales y recursos, psicología del pensamiento matemático, historia y epistemología, educación para niños con necesidades especiales y etnomatemáticas. La revisión de Malara (1998) sigue las reflexiones anteriores.

En el momento actual, y por lo que se refiere a la fundamentación de la Didáctica de la Matemática como área científica, se continúa trabajando intensamente por alcanzar un marco teórico unificado, pero también en subrayar las características propias de los grupos nacionales de investigación (Malara y cols., 1996; Ponte y cols., 1998; Arzarello, 1999) o, en algunos casos, internacionales, como el grupo de trabajo *Democracia y educación matemática* constituido por investigadores de los países nórdicos: Dinamarca, Finlandia, Islandia, Noruega y Suecia. De esta manera se destaca la importancia que para la Didáctica de la Matemática tienen las condiciones sociales, históricas, culturales y políticas propias de cada país o región. En este y otros trabajos también nosotros nos hemos propuesto caracterizar la situación española en Didáctica de la Matemática.

Todos estos avances muestran que no hay marco global establecido, si bien conocemos algunas de las principales componentes y sus aportaciones.

A nuestro juicio, el marco teórico en que se plantean, estudian e investigan los problemas y cuestiones de la Didáctica de la Matemática se sostiene desde el dominio de la Matemática, la Epistemología e Historia de la Ciencia, la Pedagogía, la Psicología y la Sociología de la Educación. No cabe confusión entre las cuestiones prioritarias de cada una de estas materias y las de la Didáctica de la Matemática: se distingue que un problema es propio de nuestra área de conocimiento cuando están implicados procesos de comunicación, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Postulamos que la fundamentación teórica para el estudio y resolución de estos problemas se sostiene en las cinco familias de disciplinas citadas de una manera específica que trasciende e integra las aportaciones concretas de cada una de ellas, cuya articulación se está comenzando a desarrollar.

Al elegir las cinco familias de disciplinas anteriores, somos conscientes de que también podían haber sido consideradas otras que, por diversos motivos, no resultan básicas en nuestro planteamiento.

### 6.3 Fundamentos epistemológicos

Todo campo científico de investigación se fundamenta sobre un marco epistemológico determinado, que presenta los fenómenos en estudio formando parte de una teoría o modo general de entender el conocimiento y enuncia los problemas planteados dentro de un sistema de ideas coherente. Toda la reflexión realizada hasta aquí sobre educación y el papel cultural de las matemáticas en nuestra sociedad constituyen parte del marco epistémico en que se fundamenta nuestra disciplina. Este marco debe permitir la interpretación, predicción y actuación sobre los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como su posterior valoración.

Nuestro planteamiento sobre la ciencia es racionalista y pragmático, y considera que ésta es una actividad de resolución de problemas en los ámbitos de la actividad humana, en el mundo de los fenómenos de la cultura. La Didáctica de la Matemática es la disciplina dedicada al estudio racional y crítico de los problemas de la educación matemática y a su resolución.

Como resultado del desarrollo reciente de las disciplinas matemáticas y de las ciencias sociales y educativas, en la actualidad son varias las disciplinas sobre las que se sostiene el esfuerzo investigador de la Didáctica de la Matemática y le sirven como marco teórico de referencia.

Según el énfasis puesto al investigar sobre los fenómenos mencionados, podemos señalar distintas aproximaciones disciplinares que conforman un marco teórico general de referencia:

- \* Teorías de la comunicación, teorías curriculares, teorías de la interacción, semiótica, medios y tecnología educativa, entre otras cuando el foco se sitúa en los fenómenos y procesos de enseñanza.
- \* Psicología de la educación, teorías del aprendizaje matemático, constructivismo, constructivismo social, entre otras cuando el foco se sitúa en los fenómenos y complejidad del aprendizaje.
- \* Análisis epistemológico y conceptual del conocimiento matemático, historia de las matemáticas, estructura de las distintas disciplinas matemáticas, procesos matemáticos, análisis fenomenológico, y otras, cuando el foco se sitúa en el estudio de la complejidad del conocimiento matemático.
- \* Sociología del conocimiento, sociología de la educación, antropología cultural, axiología y teleología de la disciplina, teoría de las instituciones educativas, y otros, cuando el foco se sitúa en los procesos sociales de construcción y valoración del conocimiento.

Articulamos el marco teórico de la Didáctica de la Matemática sobre estas cuatro dimensiones: pedagógica, cognitiva, conceptual y valorativa.

Investigar, como se ha dicho, es indagar mediante el método científico; por ello, toda investigación ha de tener una orientación metodológica predominante. Kilpatrick y Sierpínska (1993) consideraron tres aproximaciones metodológicas generales a la investigación educativa: positivista, fenomenológica y crítica; después de analizar estos paradigmas adoptan una posición holística respecto a los métodos de investigación educativa:

«No existe un único método de investigación que pueda abarcar todo el rango de preguntas que interesan a los educadores matemáticos.» (Op. cit. p. 17)

Por su fecundidad y uso frecuente, sostenemos que los paradigmas positivista, el interpretativo y el crítico enmarcan usualmente la orientación metodológica en educación matemática.

Finalmente, la investigación en Didáctica de la Matemática tiene como fin la actuación en el medio social, trata de ser acción transformadora. Esta actuación,

como ya hemos indicado, tiene lugar de modo prioritario en determinados ámbitos de actuación, entre los que hemos destacado:

- \* Diseño, desarrollo y evaluación del currículum,
- \* Formación de profesorado y desarrollo profesional,
- \* Fundamentación y desarrollo teórico de la disciplina.

Estos campos no agotan las posibilidades de acción de la educación matemática, sólo señalan sus prioridades actuales.

Así pues, postulamos que toda investigación en Didáctica de la Matemática se puede caracterizar mediante tres componentes: su marco teórico, su marco metodológico y su ámbito de actuación, que encuadran los problemas en estudio.

#### 6.4. Criterios de calidad de la investigación

La preocupación por la calidad de la investigación en Didáctica de la Matemática ha sido una constante desde el despegue de este campo de indagación y ha ido en paralelo con el avance metodológico en investigación educativa. El desarrollo de la investigación educativa y un interés permanente por la calidad de los resultados han obligado a establecer estándares y determinar criterios para la valoración de estas investigaciones (Whitrock, 1986). Entre los criterios más usuales encontramos: *Empiricidad, Factibilidad, Claridad, Pertinencia para la comunidad, Pertinencia para la práctica, Pertinencia para la teoría, Originalidad, Eficacia y Precisión* (Fernández, 1995). Cada uno de estos criterios explicita alguna preocupación básica de los investigadores en educación.

Los criterios para evaluar la investigación en Didáctica de la Matemática no son específicos sino que coinciden, en términos generales, con los establecidos por los expertos para evaluar la calidad de la investigación en educación. Freudenthal (1982) presentó tres criterios de calidad: *Fiabilidad, Validez y Pertinencia*, y discutió el sentido de estos criterios para nuestra disciplina. En términos generales, podemos decir que mediante la fiabilidad se evalúa la calidad y adecuación del método en una investigación, con la validez se evalúa la calidad y coherencia del marco teórico y por medio de la pertinencia se evalúa la calidad de los resultados para la práctica.

Kilpatrick y Sierpínska (1993) establecen una serie de criterios más elaborados para evaluar la calidad de una investigación en Didáctica de la Matemática, que se derivan igualmente de los criterios generales establecidos para la investigación edu-

cativa. Los criterios propuestos y comentados por estos autores son: *Pertinencia, Validez, Objetividad, Originalidad, Rigor y precisión, Predictibilidad, Replicabilidad y Conexiones*; estos criterios mantienen actualidad e interés.

Cada uno de estos criterios evalúa de manera prioritaria una de las componentes antes señaladas para una investigación. Así, rigor y precisión y replicabilidad son criterios centrados en los aspectos metodológicos de la investigación, establecen exigencias de calidad respecto al método elegido, prioritariamente.

Validez, objetividad y conexiones son criterios orientados a evaluar el marco teórico en que se sitúa la investigación.

Finalmente, pertinencia y predictibilidad evalúan la coherencia del estudio con el ámbito de actuación en que se sitúa.

La originalidad tiene que ver con la globalidad del estudio y es un criterio de valoración comparativo respecto de otras investigaciones realizadas sobre el mismo problema.

Kilpatrick enuncia diversas cuestiones por medio de las cuales explicitar cada uno de los criterios mencionados; estas cuestiones ponen de manifiesto qué componente de la investigación es la que se evalúa mediante cada criterio.

Azcárate (1999) ha analizado y discutido diversos criterios de calidad de las investigaciones, teniendo en cuenta su relevancia para la práctica y su incidencia en la situación educativa española.

Pasamos a enumerar algunos problemas que se detectan al evaluar la calidad de una investigación en Didáctica de la Matemática, que no quedan resueltos por los criterios anteriores.

Una primera cuestión es que los criterios de calidad son válidos para cualquier investigación educativa y no contemplan la especificidad del campo, en particular no permiten valorar el papel del conocimiento matemático en la investigación.

En segundo lugar consideramos la valoración de la coherencia global. Hemos visto que cada criterio se orienta de manera prioritaria hacia una de las componentes consideradas para una investigación; sin embargo, la coherencia y articulación entre estas componentes no se contemplan entre los criterios usuales. Una investigación debe formar parte de un marco teórico, de un modo de entender la educación matemática y abordar sus problemas. La coherencia entre marco elegido, metodología empleada, problema estudiado, expectativas generadas y medios puestos en funcionamiento deben ser evaluables con criterios precisos.

En tercer lugar señalamos que los criterios establecidos no parecen tener fuerza intrínseca. Es relativamente sencillo reconocer la calidad de una investigación cuando la tiene; mayor dificultad encontramos para explicar la falta de calidad en muchos otros trabajos. No parece haber consenso sobre el modo de establecer la calidad de las investigaciones en educación matemática.

Los criterios de calidad tienen una caracterización precisa pero excesivamente genérica, su aplicación no resulta sencilla y carecen de consenso. Trabajos superficiales pueden satisfacer formalmente los criterios generales y cubrir una apariencia de calidad. Para evaluar adecuadamente una investigación en educación matemática se necesita tener cierto dominio en profundidad del marco de la investigación y una familiaridad con el campo en estudio que no se contempla en los criterios.

En cuarto lugar señalamos la ausencia de un sistema público de valoración, lo cual dificulta discutir los criterios existentes y compararlos en una comunidad más amplia. La evaluación de la calidad no tiene justificación pública.

En los países europeos no hay sistema público y regular de evaluación de la investigación; no es usual explicitar con objetividad la valoración de los trabajos de investigación y de sus resultados. Se acepta implícitamente un relativismo considerable, que no permite profundizar en los criterios.

Mención especial merece el proceso de formación de investigadores, que proporciona una oportunidad única para establecer con firmeza criterios de calidad.

### 6.5. Cuestiones abiertas

Condiciones básicas para una investigación de calidad son un marco teórico coherente, unos criterios metodológicos consistentes, una comunidad científica crítica y constructiva y una comunidad profesional exigente con las implicaciones de la investigación. Las componentes generales descritas y los criterios enunciados contribuyen a caracterizar y valorar globalmente las investigaciones en un campo. No obstante, el carácter abierto e interdisciplinar dejan multitud de cuestiones abiertas sobre investigación en Didáctica de la Matemática.

Entre las cuestiones más significativas destacamos las siguientes:

\* ¿Qué especificidad añade lo matemático a la investigación educativa?

\* ¿Hay temas propios de investigación en Didáctica de la Matemática?

- \* ¿Hay criterios para establecer la adecuación de un tema de investigación?
- \* ¿Es posible diferenciar los estudios sobre innovación de las investigaciones genuinas?
- \* ¿Qué tipologías generales de investigación hay en Didáctica de la Matemática?
- \* ¿Qué estatus tiene el investigador en Didáctica de la Matemática? ¿cuál debería tener?
- \* ¿Quiénes tienen legitimidad para llevar a cabo una investigación?
- \* ¿En qué instituciones debe realizarse la investigación?
- \* ¿Cuál es la comunidad ante la que se presentan y validan las investigaciones?
- \* ¿Cómo mejorar la evaluación de la investigación en Didáctica de la Matemática?

### 7. Organización de la investigación en Didáctica de la Matemática

Como ya se ha mostrado, en la década de los 80 se produce un despegue de la investigación en Didáctica de la Matemática. Sociedades de profesores, seminarios y grupos de innovación proporcionan una base inicial sobre la que se desarrolla la investigación posterior.

Sin embargo, con la reforma de la universidad que institucionaliza la Didáctica de la Matemática en España, se produce a partir de la década de los 90 un cambio importante: la profesionalización del investigador en Didáctica de la Matemática. En la actualidad, la gran mayoría de estos investigadores trabajan en la universidad; su actividad se reconoce por la realización sistemática de trabajos académicos, por su conexión o pertenencia a grupos internacionales y, fundamentalmente, por su producción regular de trabajos de investigación en este campo, sometidos a la crítica y control de los expertos de la comunidad. En sentido estricto, estos investigadores constituyen la comunidad de especialistas en Didáctica de la Matemática.

### 7.1. Área de conocimiento y departamentos

La Ley de Reforma Universitaria de 1983 proporciona un marco legal para cubrir los objetivos de desarrollo científico, formación profesional y extensión de la cultura, que son las funciones básicas que el legislador asigna a la universidad española para el siglo XXI. En este marco surge el área de conocimiento Didáctica de la Matemática, como campo de conocimiento propio en la universidad española.

Este nuevo campo implica la creación de nuevos departamentos o la ampliación de los ya existentes. En la actualidad hay en España 4 departamentos universitarios de Didáctica de la Matemática, que se ubican en las universidades Complutense de Madrid, Granada, Sevilla y Valencia; hay otros 14 departamentos que integran la Didáctica de la Matemática y la Didáctica de las Ciencias Experimentales; en el resto de las universidades los profesores de Didáctica de la Matemática forman parte de departamentos más amplios, bien de matemáticas o de didáctica en general, con distintas configuraciones y denominaciones.

La creación de departamentos universitarios que integran el área de Didáctica de la Matemática ha supuesto disponer de medios personales y materiales, ayudas institucionales y recursos que potencian la docencia e investigación en este área. Aunque los nuevos planes de estudio han disminuido considerablemente el número de horas de formación en matemáticas y su didáctica para los profesores de primaria, sin embargo se ha incrementado y diversificado el número global de asignaturas de Didáctica de la Matemática en estos planes de estudio.

Por su actividad docente la Didáctica de la Matemática es una materia presente en la opatividad de muchas licenciaturas de matemáticas, de pedagogía y psicopedagogía, incluso en alguna licenciatura de estadística. También aparece en las asignaturas troncales, obligatorias de universidad y optativas de los planes de estudio de las diversas diplomaturas de magisterio, incluidas algunas titulaciones como la de Maestro Especialista en Educación Especial o la de Educador Social. Estas asignaturas plantean nuevos retos y problemas, no sólo docentes sino también para la investigación.

Los departamentos universitarios ocupan lugar prioritario en la organización y desarrollo de la investigación; se organizan en líneas de investigación, que promueven su realización y desarrollo. En próximos apartados comentaremos la producción investigadora en Didáctica de la Matemática realizada en España durante los últimos años por los departamentos universitarios.

## 7.2. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Institución clave en la organización y desarrollo de la Didáctica de la Matemática es la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* -SEIEM-, constituida en 1996. La SEIEM centra su actividad sobre los siguientes objetivos:

- \* Mantener un espacio de comunicación, crítica y debate sobre investigación en Educación Matemática, donde plantear cuestiones, transmitir e intercambiar resultados, profundizar en las elaboraciones teóricas, mejorar y validar los diseños metodológicos.
  - \* Promover la constitución de grupos de investigación estables en Educación Matemática, con producción propia cualificada, que delimiten prioridades y aborden cuestiones de indagación específicas.
  - \* Promover el impulso a la Educación Matemática en los organismos e instituciones relacionados con la investigación. Promover la participación en las convocatorias de ayudas a la investigación, institucionales y privadas.
  - \* Contribuir y participar en el desarrollo, evaluación y aplicación de investigaciones en Didáctica de la Matemática.
  - \* Contribuir a la presentación de resultados de investigación en los foros, encuentros y revistas de Educación Matemática.
  - \* Mantener contactos y promover la colaboración con grupos de investigación en Educación Matemática.
  - \* Favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
  - \* Transmitir y divulgar institucionalmente la actividad de la Sociedad.
- (Boletín SEIEM nº 0, 1996)
- En el momento de editar este documento la SEIEM está constituida por 156 socios, y se articula en las siguientes líneas de investigación:
1. Aprendizaje de la Geometría.
  2. Didáctica del Análisis.
  3. Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria.

4. Pensamiento Numérico y Algebraico.
5. Educación Infantil.
6. Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor.
7. Historia de la Educación Matemática.
8. Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica.
9. Metodología de Investigación en Educación Matemática.

Las cinco primeras líneas de investigación están centradas en la transmisión del conocimiento matemático por medio del sistema educativo, prioritariamente, la sexta línea se centra en la formación y desarrollo de los profesionales de la educación matemática, mientras que las líneas séptima a novena enfocan su actividad sobre la fundamentación y desarrollo de la disciplina.

Periódicamente los investigadores interesados en cada línea de investigación realizan encuentros nacionales o regionales entre los investigadores interesados. Estos grupos, constituidos por investigadores de distintas universidades, han comenzado a coordinar sus actuaciones presentando proyectos de investigación conjuntos en convocatorias nacionales, donde han recibido una acogida favorable.

La SEIEM celebra un simposio anual en el que tienen lugar seminarios de debate sobre temas actuales específicos de investigación. La sociedad considera críticamente su propia actividad, como podemos apreciar en un balance reciente:

«La investigación en educación matemática tiene que avanzar en varios frentes: debe profundizar en sus fundamentos teóricos y mejorar sus esquemas metodológicos, pero también tiene que abordar cooperativamente los grandes problemas que se plantean en el sistema educativo relacionados, entre otros, con profesores, escolares, materiales curriculares y sistemas de valoración. Nuestra investigación tiene que diversificar sus prioridades y atender a las necesidades de la práctica. Sin renunciar a las cuestiones conceptuales y cognitivas, la educación matemática debe profundizar en sus dimensiones culturales, éticas y sociales. Como miembros de un colectivo debemos percibir nuestro trabajo como tarea científica compartida, sometida a criterios de rigor y calidad, susceptible de coordinación y contraste con nuestros compañeros. La actividad del investigador en educación matemática es una tarea social compleja en la que hemos decidido participar; coordinemos esfuerzos e intercambemos ideas para mejorar nuestro sistema educativo y contribuir así a que nuestra sociedad tenga el desarrollo intelectual y la posición científica que le corresponde.» (Editorial, Boletín SEIEM nº 6, 1999).

### 7.3. Otras instituciones que organizan la investigación

En la actualidad, la mayor parte de la actividad investigadora sobre Didáctica de la Matemática en España la llevan a cabo dos instituciones: los departamentos universitarios y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Sin embargo, estas dos instituciones no agotan la actividad investigadora que se desarrolla en nuestro país en Didáctica de la Matemática. Otras dependencias administrativas, que sostienen institutos dedicados a investigación educativa en general, realizan con cierta regularidad actividad de indagación sobre diversos campos de la educación matemática.

El Centro de Investigación, Documentación y Evaluación (C.I.D.E.), dependiente del Ministerio de Educación y Ciencia ha promovido y financiado de manera continuada investigaciones sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación en matemáticas durante las décadas de los 80 y de los 90. La Secretaría de Estado de Educación y la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación han convocado ayudas anuales mediante el Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa, Programas de Doctorado de Calidad, y otros.

Algunas comunidades autónomas con competencia en materia educativa llevan a cabo por medio de sus Consejerías de Educación trabajos puntuales de investigación y divulgación sobre educación matemática. Caso singular es el IMIPAE del Ayuntamiento de Barcelona, cuya producción investigadora sobre cognición en matemáticas ha sido permanente. Siendo, muchos de ellos, trabajos meritorios cabe lamentar la escasa difusión de sus resultados y la falta de coordinación con equipos que trabajan sobre los mismos problemas.

También las sociedades de profesores de matemáticas, coordinadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, y las sociedades de matemáticos, lideradas por la Real Sociedad Matemática Española, mantienen una actividad de apoyo a la investigación en Didáctica de la Matemática en su sentido más amplio y difunden con regularidad por medio de sus revistas los resultados de algunos trabajos, principalmente los conectados con la innovación curricular y los problemas de la enseñanza y aprendizaje de contenidos concretos. Muestra importante de este apoyo son los premios instituidos por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, junto con el ayuntamiento de San Fernando (Cádiz), para la investigación e innovación en educación matemática.

### 7.4. Cuestiones abiertas.

En el momento actual, y por lo que se refiere a su organización, la investigación española en Didáctica de la Matemática aún padece diversos localismos. Esto lleva a que algunos investigadores busquen referencias externas y dediquen esfuerzos al seguimiento de ideas ajenas a nuestra necesidades educativas, marginales para los problemas educativos de nuestra sociedad. La comunidad española de investigadores en Didáctica de la Matemática tiene aún bastantes carencias y limitaciones que provienen de falta de organización, escasa coordinación y falta de dimensión social en sus actuaciones, fundamentalmente. Todavía está pendiente la creación y sostenimiento de proyectos comunes, al servicio de nuestra cultura, entre otros un Centro de Investigaciones en Didáctica de la Matemática, proyectos de innovación racional y empíricamente fundados, y una revista propia de investigación.

## 8. Producción investigadora

### 8.1. Antecedentes.

Las instituciones dedicadas al desarrollo de la actividad científica en España han sido, tradicionalmente, la universidad y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (C.S.I.C.). El C.S.I.C. estaba organizado en patronatos de carácter disciplinar, que coordinaban los diversos centros de investigación. El centro coordinador de la investigación en matemáticas era el *Instituto Jorge Juan de Matemáticas* que, posteriormente, se organizó en Departamentos. Desde sus comienzos este Instituto emprende tareas de difusión sobre educación matemática, con la publicación de diversas colecciones: *Colección de Monografías de Matemática*, de *Textos de Matemática Moderna*, de *Historia, Filosofía y Metodología Matemática*, de *Textos Clásicos de Matemática* y de *Conferencias de Matemática*. Sin embargo, no se conoce actividad investigadora realizada por el C.S.I.C. en Didáctica de la Matemática durante los 60 años de su existencia.

A partir de 1970, y como consecuencia de la Ley General de Educación, del *III Plan de Desarrollo* y de las ayudas de los organismos internacionales, podemos encontrar en las memorias del *Instituto Nacional de Ciencias de la Educación* -INCIE- las investigaciones educativas llevadas a cabo durante la década de los 70, donde aparecen enumerados trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática. Se trata de investigaciones de diseño clásico y orientación positivista, que presentan

estudios longitudinales sobre el rendimiento de los alumnos y los efectos de la implantación del currículum de la matemática moderna, en su mayor parte. La *Investigación «Granada Mats»*, financiada por los Planes IV y V de Investigación del INCIE y con una duración de 12 años, realizó un análisis del Programa escolar para el área de Matemáticas de las Orientaciones Pedagógicas del año 71 (Rico, 1985), siendo uno de los estudios más completos en esta época.

A pesar de esta actividad, la ausencia de un cenro específico de investigación en Didáctica de la Matemática con personal y objetivos estables, hacen que la parte más significativa y la producción más continuada de la investigación en este campo haya estado localizada en la universidad. A partir de los años 70 comienza una política activa respecto a la realización de tesis doctorales, que va a tener reflejo en nuestro campo. Las primeras tesinas de licenciatura en Didáctica de la Matemática se presentan a mediados de la década de los 70 pero, de inmediato, se ralentiza el proceso y se ponen dificultades a estos estudios que se consideran distantes de las matemáticas.

El interés por la educación matemática y la necesidad de investigar sobre las innovaciones curriculares en curso estos años permiten continuar los trabajos de investigación orientados a la realización de tesis doctorales pero, al mismo tiempo, las circunstancias externas obligan a que se lleven a cabo como estudios de pedagogía o de educación. Desde el año 1976, de creación de la *Base de Datos Teses* sobre tesis doctorales, encontramos tesis cuyos contenidos y descripciones las sitúan en Didáctica de la Matemática, aun cuando formalmente no se hayan realizado dentro del área de este nombre (Torralbo, 1999).

A partir de 1983, los profesores que trabajaban en Didáctica de la Matemática y que, posteriormente, constituyeron este área de conocimiento fueron la parte principal de los investigadores que concentraron su esfuerzo en la realización de tesis en Didáctica de la Matemática. Pero no fueron los únicos; también algunos profesores de las áreas de *Didáctica y Organización Escolar*, *Psicología Evolutiva y de la Educación* y *Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación*, interesados por los problemas del área hicieron sus tesis doctorales en educación matemática; igualmente trabajaron en este campo algunos profesores de secundaria.

Desde la constitución del área se incrementa notablemente la realización de tesis doctorales en Didáctica de la Matemática, pero en programas y departamentos de otras áreas educativas; estas tesis concluyen en su mayoría a finales de los 80 y comienzos de los 90 y constituyen una segunda generación de investigadores, centrados sobre la educación y sobre las matemáticas, pero todavía sin una visión espe-

cífica y profunda del propio campo. La tercera generación la constituyen los doctores formados ya dentro de los programas de doctorado de Didáctica de la Matemática. Hay algunos investigadores que realizan su tesis, o parte principal de ella, en un programa de formación de una universidad extranjera; este grupo se considera pionero de la tercera generación.

Podemos asegurar que la parte principal y más importante de la producción investigadora española en Didáctica de la Matemática, hasta el momento, corresponde a las tesis doctorales. Desde 1976 hasta 1998 hay, en una primera estimación, 124 tesis doctorales localizadas en Teses, defendidas en universidades españolas, cuyo campo de actuación, marco teórico y diseño metodológico permiten calificarlas como tesis de Didáctica de la Matemática (Torralbo, 1999).

## 8.2. Investigación en España

Los antecedentes y el desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Matemática en España son similares, manteniendo las proporciones adecuadas, a los que encontramos en otros países de parecido desarrollo cultural y social. Pasamos a comentar brevemente algunas de las realizaciones españolas recientes en investigación, tomando como referencias los campos a los que se refieren y las universidades en las que se estudian.

La investigación curricular tiene cierto desarrollo en la Universidad de Granada, una de cuyas líneas de investigación se refiere específicamente al Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas; hay una amplia reflexión teórica sobre el concepto de currículum publicada en diversos trabajos y se han realizado ocho tesis doctorales conectadas con este tópico.

La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos tiene un desarrollo más amplio, con participación de equipos de varias universidades. En las universidades Autónoma de Barcelona, La Rioja y Valencia se realizan investigaciones sobre aprendizaje de la Geometría. En el primer caso se desarrolla un proyecto conjunto de investigación centrado en el uso de nuevas tecnologías y en el análisis de las interacciones en el aula; en Valencia la línea de investigación está centrada sobre el modelo Van Hiele relativo a la comprensión de conceptos geométricos y su empleo para analizar su aprendizaje. También en las universidades de La Coruña y País Vasco se trabaja en este campo.

En las universidades de Granada y Jaén hay un equipo de investigación que trabaja sobre la Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria, hasta el momento se han realizado siete tesis doctorales en este campo. Este equipo mantiene una buena proyección internacional. También en las universidades de La Laguna y Murcia se trabaja en Didáctica de la Estadística y en las universidades Autónoma de Madrid y Cádiz en Didáctica de la Probabilidad.

En las universidades de Alicante, Autónoma de Barcelona, Castilla-La Mancha, La Laguna, Pública de Navarra, Salamanca, Santiago de Compostela y Valladolid se trabaja sobre Didáctica del Cálculo y del Análisis. La producción de este grupo hasta el momento es de siete tesis doctorales. Los investigadores de estas universidades mantienen una buena coordinación interna, que se expresa en el desarrollo de proyectos de investigación conjuntos.

En las universidades de Granada, Málaga, La Laguna y Valencia, principalmente, se mantienen equipos de investigadores sobre Pensamiento Numérico y Algebraico, que estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar, estructuras numéricas, sistemas de representación, paso de la aritmética al álgebra y resolución de problemas. También en las universidades de Alicante, Almería, Córdoba, Barcelona, Pública de Navarra, Zaragoza y Valladolid se trabajan estos campos. Este grupo mantiene una producción alta con dieciséis tesis doctorales defendidas hasta el momento.

En relación con aspectos procedimentales de las matemáticas, principalmente sobre resolución de problemas, hay un amplio grupo de investigadores que trabajan en las universidades Autónoma de Barcelona, Extremadura, Huelva, Granada, La Laguna y Valencia, así como en el Instituto Calasancio de la Universidad Pontificia de Somosaguas.

En relación con la Educación Infantil hay una actividad sostenida en las universidades de Cádiz, Granada, Málaga, Oviedo y Pública de Navarra.

Los estudios sobre evaluación en matemáticas han recibido una atención menor por parte de los especialistas; no obstante se mantiene una producción estable en las universidades de Almería, Autónoma de Barcelona, Barcelona, Granada, León y País Vasco, con proyectos de investigación financiados por la DGICYT y el CIDE.

Sobre el conocimiento profesional del profesor, la formación y desarrollo del profesorado de matemáticas se trabaja en las universidades de Cádiz, Extremadura, Granada, Huelva, León y Sevilla. También la producción de tesis doctorales es alta, con diez tesis realizadas hasta el momento y el desarrollo de diversos proyectos de investigación y colaboraciones internacionales.

La investigación sobre Historia de la Educación Matemática está limitada a las universidades de Barcelona, Murcia y Salamanca, donde se han realizado tres investigaciones que han dado lugar a las correspondientes tesis y hay trabajos de investigación abiertos.

En las universidades Autónoma de Barcelona y Granada hay grupos de investigación centrados en Etnomatemáticas, que mantienen una actividad estable y una proyección internacional.

Hay un grupo de investigadores que trabajan coordinadamente sobre la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica, y tratan de impulsar la reflexión teórica. Pertenecen a este grupo investigadores de las universidades Autónoma de Barcelona, Granada, Complutense de Madrid y Zaragoza.

### 8.3. Una investigación en Didáctica de la Matemática

A título de ejemplo presentamos un breve resumen de la tesis doctoral *Exploración de Patronos Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*, realizada por la profesora E. Castro en la Universidad de Granada, en 1994. Este trabajo se encuadra en la línea de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico.

#### Objetivo del estudio

Se estudia la viabilidad en el currículo de matemáticas de Secundaria Obligatoria de los números figurados (o configuraciones puntuales) como sistema de representación para los números naturales, ya que proporciona un instrumento de visualización y análisis para las sucesiones, análogo a la representación gráfica de las funciones. Su objetivo está en estudiar la potencia de las configuraciones puntuales para expresar relaciones y propiedades numéricas; también se propone establecer la comprensión de los estudiantes con este nuevo sistema, es decir, cómo descubren y utilizan las propiedades numéricas mediante dichas representaciones.

Este estudio se organiza sobre la base de las referencias siguientes:

- \* empleo coordinado de tres sistemas de representación para números naturales: configuraciones puntuales, sistema decimal de numeración y desarrollo aritmético de los números;

- \* trabajo con secuencias numéricas, lineales y cuadráticas, analizando el patrón que definen cada una de ellas mediante las configuraciones puntuales y los desarrollos operatorios;

\* realización de las siguientes tareas: continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar, obtener el término general, y utilizar el término general para obtener términos concretos.

*Delimitación del problema:*

La expresión del término general de una secuencia de números naturales presenta grandes dificultades de comprensión y es un punto al que muchos escolares son incapaces de dotar de significado adecuado por el alto grado de abstracción que supone. El término general es la expresión algebraica de la ley que satisfacen todos los términos, en función del ordinal correspondiente. El término general de una secuencia expresa la estructura común que comparten todos sus términos cuando se les considera como elementos ordenados de un conjunto. Su modo usual de expresión es mediante notación algebraica. Así, la ley  $a_n = (n^2 + 2n)/2$  indica que todos y cada uno de los términos de la sucesión que se considera se obtienen elevando al cuadrado el ordinal correspondiente, sumándole su doble y dividiendo el resultado entre 2. Sin embargo, esta noción de estructura común o *estructura que comparten todos los términos de la sucesión* no se pone de manifiesto analizando las relaciones entre dos o tres términos consecutivos.

Disponer de varios números escritos en el sistema decimal de numeración no permite al estudiante en formación apreciar la estructura común que tienen tales números; para conocer esta estructura es necesario que los números estén escritos mediante un desarrollo aritmético compartido o, mejor aún, que se presenten mediante una configuración puntual que se ajuste a un mismo patrón.

Así, la visualización de los números triangulares pone de manifiesto que los números 1, 3, 6, 10, 15, ... comparten un mismo patrón; su traducción aritmética es:

$$1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \dots$$

y adelanta la estructura que comparten los números iniciales: cada uno de ellos es suma de números consecutivos, comenzando desde 1 y llegando hasta el natural que corresponde a su posición ordinal en la secuencia; pero aún quedan muchos fenómenos de comprensión que considerar para establecer que la ley de esa sucesión es, precisamente,  $a_n = (n^2 + 2n)/2$ .

*Diseño de la investigación*

En la investigación se introduce a un grupo de estudiantes del primer ciclo de secundaria (12-14 años) el sistema simbólico de representación de los números figurados durante dos cursos escolares consecutivos, se recogen sus respuestas a una serie de tareas, se analizan mediante un sistema combinado de tres tipos de categorías; finalmente, se interpretan. Las tareas que se proponen a los alumnos con este nuevo sistema simbólico son las siguientes: visualizar el patrón de representación que comparten los términos de una sucesión, continuar la secuencia y representar términos avanzados con este patrón. Se trabaja con el mismo grupo de escolares durante los dos cursos, escogido intencionalmente.

Para la recogida de la información, análisis y toma de decisiones se sigue un modelo de *Investigación-Acción*, basado en las cuatro fases de Planificación, Acción, Observación y Reflexión.

*Resultados*

La representación puntual facilita el análisis estructural de los términos de la sucesión y permite expresar nuevos términos mediante el desarrollo aritmético obtenido. Se observa que las posibilidades de análisis del patrón puntual son variadas: cada una de ellas proporciona un posible desarrollo aritmético (aditivo o multiplicativo) que comparten los términos de la secuencia. Se obtienen así diversas expresiones de los términos de la sucesión considerada, en el sistema de representación que hemos denominado análisis aritmético. Cuando esta sucesión se presenta escrita en el sistema decimal de numeración, los alumnos no disponen de datos suficientes para encontrar un desarrollo aritmético común a sus términos.

A partir de las conexiones establecidas entre los términos de la secuencia de configuraciones puntuales y la secuencia de desarrollos aritméticos, se estudia la comprensión que muestran los escolares para generalizar la estructura común que tienen los términos de una secuencia. La investigadora trata de explicar la noción de término general de una sucesión que tienen los escolares de 13-14 años mediante la pregunta: ¿Cómo se escribe el término que ocupa el lugar n-ésimo?

Las respuestas a esta cuestión varían según el sistema de representación considerado.

Así, en el sistema decimal de numeración, el término general de la sucesión viene dado por  $n$ , que es la traducción simbólica inmediata de las expresiones: «un número en general», «cualquier número de la sucesión», «cualquier término de la sucesión», o equivalentes.

Al emplear el patrón geométrico, la necesidad de dejar espacios vacíos entre los puntos para indicar el paso a  $n$  lleva a que algunos alumnos utilicen modelos continuos para el término general. Esto indica una dificultad de este sistema para las expresiones generales.

En la representación por desarrollos aritméticos se encuentra que el paso al término general se suele escribir adecuadamente. Sin embargo, cuando se dispone de varias expresiones que traducen el mismo patrón, no es fácil considerar equivalentes el paso de cada una al término general.

Se detecta de este modo un fuerte obstáculo que subyace a la dificultad conocida para obtener la expresión del término general de una sucesión. Tanto las representaciones puntuales como los desarrollos aritméticos expresan, de algún modo, la estructura que comparten varios números. La notación decimal de esos mismos números no pone de manifiesto la estructura común.

Cuando se pide obtener el término general de la sucesión, lo que se pide es encontrar, mediante notación algebraica, una expresión general de la estructura común de todos los términos. Esta pregunta no se puede responder en el sistema decimal de numeración ya que, en este sistema, cada término viene dado por un símbolo único y no se considera su estructura compartida; de ahí que la respuesta más común que se encuentra es « $n$ », que es un símbolo único y representa «un término en general». En la representación mediante configuraciones puntuales sí se aprecia la estructura común, pero el carácter concreto de tales representaciones dificulta la obtención de un término genérico. Sólo mediante los desarrollos aritméticos es posible generalizar la expresión de los términos de una sucesión.

### Conclusiones

Los resultados obtenidos en este estudio han puesto de manifiesto que los escolares admiten sin dificultad el sistema de representación puntual para los números y lo utilizan adecuadamente, trabajando con diferentes modelos geométricos; enuncian una gran riqueza de relaciones para números triangulares y cuadrados y establecen argumentos que conectan el patrón geométrico y su correspondiente patrón aritmético a través de las representaciones puntuales.

Los trabajos realizados por los alumnos a partir de las tareas propuestas han mostrado que, de los tres sistemas empleados en la representación de números, el de los números figurados es el más intuitivo debido a su carácter gráfico, lo que permite un tratamiento y análisis visual de la estructura de una cantidad. Sin embargo, este sistema adquiere su mayor potencia cuando se trabaja conjuntamente con los desarrollos aritméticos y la notación decimal usual. Una configuración puntual adquiere sentido cuando se emplea como visualización de un determinado desarrollo aritmético de un número -o familia de números- concreto(s). La variedad de desarrollos que puede sugerir una misma representación puntual ponen de relieve este carácter intuitivo.

También se refuerza la idea de que hay números que comparten *estructura aritmética*; dicha estructura se visualiza mediante un *patrón geométrico* y se expresa mediante un desarrollo aritmético. Esta noción es un primer paso hacia la generalización, sobre base aritmética.

La riqueza de *relaciones entre números* que comparten patrón es un tercer dominio de conocimientos que los alumnos ponen de manifiesto y en el que aparecen los primeros intentos de generalización en expresiones numéricas.

En el estudio se comprueba que a esta edad es muy débil la integración entre los tres sistemas simbólicos para expresar la noción de término general de una sucesión; son muy pocos los alumnos que identifican el término general con la estructura operatoria común que comparten los términos de una secuencia, cuya notación más adecuada viene dada mediante el desarrollo aritmético. La comprensión de los escolares de 12-14 años sobre la noción de término general es prácticamente inexistente dado que no se aprecia estructura entre las representaciones mentales correspondientes a los diferentes sistemas de representación utilizados. Sólo unos pocos alumnos, que integran total o parcialmente los tres sistemas, muestran un cierto dominio de esta noción, si bien se aprecian grados distintos de comprensión.

También se obtienen evidencias que permiten sostener la tesis principal: la riqueza y complejidad de las estructuras numéricas necesita de varios sistemas de representación complementarios; la aportación de las representaciones gráficas es esencial para comprender determinadas nociones estructurales.

### 9. Resultados y evaluación de la investigación

Es un rasgo de las sociedades científicas actuales compartir y valorar el conocimiento elaborado. Por ello la comunicación, evaluación, difusión y aplicación de los

resultados de las investigaciones son momentos claves en la constitución y desarrollo de un campo científico. En especial, en el campo de las ciencias sociales, la investigación es indagación para la transformación del medio humano. Una de las dificultades que encuentran los investigadores en Didáctica de la Matemática consiste en hacer efectiva la comunicación de los resultados de sus estudios e investigaciones a la comunidad de los educadores matemáticos, de la que forman parte. La investigación educativa que no se comunica, no llega a conocerse fuera del estrecho círculo de sus autores, no se hace conocimiento público y tampoco se evalúa, por ello pierde valor de objetividad.

Dentro de las ciencias de la educación el profesor, o el responsable del currículo en los distintos niveles, necesita conocer las aplicaciones de los trabajos de investigación, disponer de criterios para elaborar materiales, avanzar propuestas fundadas que ayuden a encontrar soluciones para los problemas de la práctica escolar; esto también resulta válido para la Didáctica de la Matemática.

Son varios los niveles de comunicación que pueden considerarse. En un primer nivel está la publicación y difusión de los propios informes de los estudios o cualquier otra monografía de investigación. En España las memorias de investigación en Didáctica de la Matemática tienen una edición limitada, realizada por las universidades y otras instituciones de investigación. Una parte reducida de ellas tiene edición comercial y se concreta en unos materiales que llegan a un público más amplio; éste es el caso de las publicaciones del CIDE o de la *Colección Matemática* de la Editorial Comares.

En un segundo nivel, los resultados de las investigaciones se comunican brevemente por medio de artículos en revistas especializadas, debates en seminarios y comunicaciones en congresos científicos de investigación. Característica de este nivel de comunicación es que la presentación de trabajos implica aceptar un nivel de crítica considerable.

Este segundo nivel se encuentra en España en una etapa de constitución y consolidación. No disponemos aún de revistas especializadas en exclusiva sobre investigación en Didáctica de la Matemática. *Euseñanza de las Ciencias* es la revista que mejor se ajusta a los criterios mencionados, pero necesita tomar autonomía de las secciones de ciencias experimentales, ampliar su producción y agilizar su aparato crítico. Otras revistas publicadas en distintos países, como es el caso de la mexicana *Educación Matemática*, la colombiana *EMA*, y la portuguesa *Quadrante*, principalmente, vienen realizando una tarea muy valiosa de difusión de investigaciones en Didáctica de la Matemática publicadas en castellano. Por otra parte, con carácter no regular aparecen artículos de este campo en revistas de investigación educativa.

Los seminarios de investigación funcionan con regularidad en universidades en las que hay programas de doctorado; en ellos se presentan y debaten los trabajos de investigación en curso o ya concluidos. También la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* mantiene, como se ha dicho, un encuentro anual en el que tienen lugar varios seminarios en los que se presentan y discuten temas e investigaciones en Didáctica de la Matemática.

No disponemos aún en España de congresos especializados, que incluyan la selección y presentación de informes de investigación y su discusión posterior. Los investigadores españoles participan con regularidad en los encuentros internacionales; entre ellos conviene destacar los encuentros anuales del *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, en cuyas actas encontramos publicados los resultados de sus investigaciones.

La evaluación de los estudios e investigaciones constituye un requisito indispensable para delimitar la calidad del trabajo hecho, depurarlo, y, en su caso, proceder a su replicación, revisión o refutación. Se trata de una condición imprescindible para el avance de una comunidad científica y es una necesidad vital para el progreso de cada campo de conocimiento. La evaluación de las investigaciones constituye una estrategia destacada en el ejercicio de la crítica:

«En la ciencia lo esencial es la actitud crítica. Primero creamos las teorías y después las criticamos. Como ante nuestras teorías solemos adoptar una actitud muy humana y tendemos a defenderlas, en vez de criticarlas, siendo como son nuestras, se produce entre los científicos una suerte de rivalidad entre amistosa y hostil. Si yo no adopto una actitud crítica ante mis teorías habrá cientos de personas que se mostrarán críticas ante ellas en grado superlativo. Y, por fuerza, habremos de felicitarlos de su actitud.» (Popper, 1997: p. 57).

Son varios los ámbitos en los que, reglamentariamente, está establecida la evaluación de las investigaciones. En primer lugar, los proyectos y grupos de investigación que obtienen financiación pública de algunas de las instituciones oficiales en cargadas de promover el desarrollo científico, se someten a evaluación por pares.

En segundo término, consideramos la evaluación previa a la presentación y defensa de una tesis doctoral, o cualquier otro trabajo de investigación con validez académica, con el informe de valoración que cada uno de los miembros del tribunal debe emitir.

Otro ámbito general de evaluación de las investigaciones en las distintas áreas de conocimiento es la evaluación de la producción científica de los investigadores universitarios, que realiza la *Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora*.

Pero la evaluación de las investigaciones no se realiza sólo con carácter previo. En la edición de 1999 del encuentro anual de la SEIEM se ha dedicado uno de sus seminarios a la revisión de la tesis doctoral *Exploración de Parones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*, evaluando este trabajo y su realización cinco años después de su conclusión.

#### 10. Difusión de las investigaciones

La especificidad de los problemas de la investigación en Didáctica de la Matemática desde una perspectiva profesional y académica no deben hacerlos olvidar el compromiso y la ineludible conexión con la práctica profesional de los especialistas en este campo. Los investigadores en Didáctica de la Matemática forman parte, por derecho propio, de la comunidad de educadores matemáticos, si bien tienen un campo profesional específico. Esta situación obliga a reflexionar sobre problemas comunes, que deben abordarse conjuntamente. La coordinación sistemática permitirá alcanzar unas señas de identidad bien fundadas y consolidar ambas comunidades. Por ello, y como parte de la contribución de los especialistas en Didáctica de la Matemática al desarrollo de la educación matemática, es esencial la difusión de los resultados de sus investigaciones y la conexión con las necesidades de la práctica escolar y la formación del profesorado; también deben producirse los desarrollos tecnológicos necesarios que permitan el uso en el ámbito escolar de las innovaciones derivadas de la investigación.

Difusión y aplicación son dos necesidades que surgen del compromiso ético, cívico y profesional de los investigadores con la educación matemática; no son tareas que realicen aisladamente sino que, de uno u otro modo, llevan a cabo con la colaboración de grupos de profesores y como parte de su actividad en la comunidad de educadores matemáticos.

Distinguiamos varios niveles en la puesta en práctica de las tareas de difusión y aplicación.

En un primer nivel de generalidad encontramos los libros especializados, que sistematizan el conocimiento fundado disponible en la comunidad sobre un tópico específico de la educación matemática, bien referido a una materia del currículo de matemáticas, bien relativo a la formación de profesores o, en otros casos, sobre fundamentación y desarrollo teóricos. En estos libros se incluyen resultados de investigaciones avalados por la comunidad y reflexiones teóricas contrastadas; también pueden ser libros temáticos que difunden de manera práctica la experiencia del autor sobre un campo determinado. Consideramos dentro de este apartado los 60 libros de las colecciones de la Editorial Síntesis: *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*

*Je y Educación Matemática en Secundaria*, cuya finalidad fundamental es poner a disposición de todos los educadores matemáticos, de manera organizada, el conocimiento básico sobre enseñanza y aprendizaje de los principales tópicos del currículo de matemáticas en Primaria y Secundaria y sistematizar la información disponible sobre algunos temas de carácter más general. También se han publicado un número considerable de trabajos en otras colecciones y editoriales que hacen referencia a resolución de problemas, matemáticas de la vida cotidiana, problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, conocimiento profesional y formación del profesor.

En el campo de la aplicación encontramos los libros de texto y libros del profesor que incorporan en su estructura y en sus reflexiones didácticas resultados contrastados de investigaciones, bien propias o de otros investigadores. La calidad de los libros de texto españoles no es uniforme, pero hay una tendencia general a integrar información procedente de estudios empíricos tanto en las tareas que se proponen a los alumnos como en la sistemática de presentación y secuenciación de actividades. Los libros no están aislados, sino que forman parte de proyectos más amplios que abarcan una o varias etapas del sistema educativo.

En un segundo nivel tenemos los artículos de difusión que se publican en las revistas profesionales, editadas por las distintas Sociedades de Profesores de Matemáticas (*Números*, *Epsilon*, *Suma*, *Quadrante*) por instituciones educativas (*Educación Matemática*, *EMA*, *Sigma*) o comerciales (*Vino*). Son artículos sometidos a control de calidad; muchos de ellos difunden resultados de investigaciones, estudios empíricos o innovaciones curriculares. Los artículos de difusión que aparecen en suplementos de educación de la prensa diaria o revistas generales también pueden transmitir reflexiones y datos sobre investigaciones.

Igualmente hay una serie de encuentros, congresos y jornadas, algunos de celebración periódica, organizados por las Sociedades de Profesores de Matemáticas u otros colectivos, en los que se presentan comunicaciones y ponencias realizadas por grupos de investigación o innovación, que difunden resultados más o menos contrastados de experiencias y estudios sistemáticos.

Los materiales escolares, cuadernos de trabajo temáticos o libros para estudiantes son un producto de aparición reciente en el mercado editorial español, que tienen su origen en los materiales experimentados durante los periodos de reforma del currículo de matemáticas. En muchos de ellos se emplean tareas ensayadas en investigaciones especializadas con una intencionalidad precisa, que suponen la aplicación de conocimiento bien fundado.

Además de los materiales manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que han experimentado un desarrollo espectacular en los últimos años, las investigaciones sobre los usos del software didáctico y la utilización de algunos programas sencillos de matemáticas para uso escolar se han sostenido sobre investigaciones sistemáticas. Las revistas, nacionales e internacionales, están incrementando el número de artículos en los que se presentan resultados de estudios sobre el uso y las aplicaciones de las nuevas tecnologías y el software didáctico dedicado a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

### 11. Utilidad y aportaciones de la disciplina

Nuestro propósito es concluir esta reflexión detallando la utilidad de la disciplina Didáctica de la Matemática y destacando las aportaciones que realiza. Nuestra finalidad se orienta hacia una presentación comprensiva y un balance crítico, situado en esta disciplina en un contexto social e intelectual progresista e ilustrado. Tratamos de acotar responsabilidades en el estado actual de la Didáctica de la Matemática, a nivel local e internacional, y, sobre todo, señalar temas y tareas pendientes para futuros trabajos.

La presencia de la Didáctica de la Matemática en una sociedad contemporánea la consideramos como un índice de la calidad de su actividad intelectual y de los servicios sociales que tienen lugar en ese medio. Hay muchas profesiones y actividades que no han tenido sentido hasta fechas recientes; éste no es el caso de la Didáctica de la Matemática, cuyos antecedentes podemos localizar hace más de 200 años. No nos cabe duda que la demanda social de una escuela más profesional y comprensiva, que aporte a los ciudadanos formación matemática adecuada, es lo que ha hecho aumentar la presión para que nuestra disciplina perfeccione sus herramientas teóricas, desarrolle una investigación cualificada y resuelva los problemas a los que, hoy día, debe enfrentarse.

Esta es la utilidad de la Didáctica de la Matemática: actuar sobre el medio social y mejorarlo, perfeccionando la cualificación intelectual de los ciudadanos mediante una formación matemática de calidad; también son éstas, resumidamente, las aportaciones que esperamos del trabajo y esfuerzo de sus especialistas.

### Referencias

- ABRARA, C. y FRANCISCO, A. (1998). *La formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el Área de Didáctica de las Matemáticas*. León: Universidad de León.
- ABRANTES, P.; CUNHA, L. y PONTE, J.P. (1996). *Investigar para aprender matemáticas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- ARZARELLO, F. (1999). *Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia. Un quadro di riferimento teorico*. Santarem: Documento interno de la Escola de Verao Luso-Italiano.
- AZCARATE, C. (1999). *Calidad y pertinencia de la investigación en educación matemática*. Santarem: Documento interno de la Escola de Verao Luso-Italiano.
- BALACHEFF, N. (1984). «French Research activities in Didactics of Mathematics. Some key words and related references». H. STEINER y cols., *Theory of Mathematics Education (TME)*. Bielefeld: IDW, Universitat Bielefeld.
- BEOLÉ, E. (1979). *Critical Variables in Mathematics Education*. Washington: Mathematical Association of America.
- BIENLER, R., SCHOLZ, R., STRAVER, R. & WINKELMANN, B. (1994). *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- BISHOP, A. (1988). *Mathematical Enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- BISHOP, A. (1992). «International Perspectives on Research in Mathematics Education». D. GROUWS (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- BISHOP, A.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J. & LAVORDE, C. (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- BLOOR, D. (1991). *Knowledge and Social Inquiry*. Chicago: The University of Chicago Press.
- BOULETIN DE LA SEIEM (1999). *Boletín n° 5. Anexo*. Granada: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- CASTRO, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, G. & OTTE, M. (eds.) (1986). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel.

- D'Ambrósio, U. (1986). «Sociocultural bases for Mathematical Education». M. Carss (ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*. Boston: Birkhäuser.
- ECHEVARRÍA, J. (1995). *Filosofía de la Ciencia*. Madrid: Editorial Akal.
- FERNÁNDEZ, A. (1995). *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Madrid: Editorial Síntesis.
- FREUDENTHAL, H. (1982). «Fiabilidad, Validez et Pertinence -criteres de la recherche sur l'Enseignement de la Mathématique». *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 13, pp. 395-408.
- GEERTZ, C. (1987). *La interpretación de las culturas*. Barcelona: Editorial Gedisa.
- GROUWS, D. (1992). *Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- GUZMÁN, M. y cols. (1999). Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria. *Suma*, 31, pp. 15-18.
- HART, K. y HIRT, F. (1999). *Supervision of Higher Degrees in Mathematics Education. An International Perspective*. México: CINVESTAV.
- HOWSON, A. G. (1984). Seventy five years of the International Commission on Mathematical Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 15, pp. 75-73.
- HOWSON, G.; KEITEL, K. y KILPATRICK, J. (1981). *Curriculum Development in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- JAEGER, R. (1988). *Complementary Methods for research in education*. Washington: American Educational Research Association.
- KILPATRICK, J. (1993). «Beyond face value: Assessing Research in Mathematics Education». Nissen, G. y Blomhøi, M. (eds.), *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde: Roskilde University IMFUFA.
- KILPATRICK, J. (1994). «Historia de la Investigación en Educación Matemática». J. Kilpatrick, L., Rico, y M. Sierra, *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Editorial Síntesis.
- KUHN, T. (1975). *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.
- LAUBMAN, L. (1986). *El progreso y sus problemas*. Madrid: Encuentro Ediciones.
- LONG, R.; MELTZER, N. y HURON, P. (1970) Research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 2, pp. 446-468.
- MALARA, N.; MENGHINI, M. y REGGIANI, M. (eds.) (1996). *Italian Research in Mathematics Education: 1988-1995*. Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica. Pisa: Quaderni C.N.R.
- MALARA, N. (ed.) (1998). *Proceedings of Working Group 25-ICME 8: An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Modena: C.N.R.
- MIRREN, S. (1996). *Arqueología de la mente. Orígenes del arte, de la religión y de la ciencia*. Barcelona: Grijalbo-Mondadori Editores.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1981). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: NCTM.
- NISS, M. (1998). *Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education*. Roskilde: Roskilde University IMFUFA.
- NISSEN, G. y Blomhøi, M. (1993). *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde: Roskilde University IMFUFA.
- POINTE, J. P.; MATOS, J. M. y ABEVANTES, P. (1998). *Investigação em Educação matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- POPPER, K. (1979). *El desarrollo del conocimiento científico*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
- POPPER, K. (1997). *El cuerpo y la mente*. Barcelona: Editorial Paidós.
- PUG, L. (1996). «La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora». Pug, L. (ed.), (1996). *Investiga y Enseña: Variadas de la educación matemática*, Bogotá: Universidad de los Andes.
- REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (1996). *Vocabulario Científico y Técnico*. Madrid: Editorial Espasa-Calpe.
- RESTIVO, S. (1992). *Mathematics in Society and History*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- REVISTA INTERUNIVERSITARIA DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO (1994). *Tema Monográfico: Didáctica de la Matemática*. Nº 21. Zaragoza.
- REVISTA INTERUNIVERSITARIA DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO (1998). *Tema Monográfico: Didáctica de las Matemáticas para los Profesores de Educación Secundaria*. Nº 32. Zaragoza.
- RICO, L. y cols. (1985). *Investigación Granada-Más. Un análisis del programa escolar para el Área de Matemáticas*. Granada: Instituto de Ciencia de la Educación, Universidad de Granada.
- RICO, L. (ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de Matemáticas en la Educación Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.
- RICO, L. (1999). «Matemáticas, Universidad y Formación del Profesorado». *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* nº 34. Zaragoza.
- RICO, L. y SIERRA, M. (1991). «La comunidad de educadores matemáticos». A. Gutiérrez (ed.), *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Editorial Síntesis.

- RICO, L. y SIERRA, M. (1994). «Educación Matemática en la España del siglo XX». J. KILPATRICK, L. RICO y M. SIERRA, *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis.
- RICO, L.; SIERRA, M. y CASTRO, E. (1999). «Didáctica de la Matemática». RICO, L. y MADRID, D. (eds.), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.
- ROMBERG, T. (1992). «Perspectives on Scholarship and Research Methods». D. GROUWS (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- SANZ, L. (1997). *Estado, ciencia y tecnología en España: 1939-1997*. Madrid: Alianza Editorial Universidad.
- SCHÜBRING, G. (1985). «Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, particulièrement en France et en Prusse». *Recherches en Didactique de Mathématiques*, vol 5, n.3, pp. 343-385.
- SCHÖN, D. (1998). *El profesional reflexivo*. Barcelona: Editorial Paidós.
- SHUMWAY, R. (1980). *Research in Mathematics Education*. Reston VA: National Council Teachers of Mathematics.
- SIERPIŃSKA, A. (1993). «Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactic of Mathematics». Nissen, G. & Blomhøj, M. (eds.), *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde: Roskilde University IMFUFA.
- SIERRA, M. (1987). «El currículum de Matemáticas y su Didáctica en las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de E.G.B.». *Studia Paedagogica*, 19, pp. 101-114.
- SIERRA, M. (1994). «Mathematics Education in the Spanish "Normalista" Movement». N. MALARA y L. RICO (eds.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*. Modena: Dipartimento di Matematica Università di Modena, pp. 241-248.
- SIERRA, M. (1995). «La formación del profesorado de matemáticas en España: perspectiva histórica». L. BLANCO y V. MELLAO (eds.), *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*. Badajoz: Universidad de Extremadura, pp. 227-242.
- SIERRA, M. y RICO, L. (1996). «Contexto y evolución histórica de la formación en Matemáticas y su Didáctica de los Profesores de Primaria». J. GIMÉNEZ, S. LINARES y V. SÁNCHEZ (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada: Editorial Comares, pp. 39-62.
- SKOVMOSE, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- STEINER, H.; BALACHEFF, N. y MASON, J. (1984). *Theory of Mathematics Education (TME)*. Bielefeld: IDM Universitat Bielefeld.
- STEINER, H. (1987). «Philosophical and Epistemological aspects of Mathematics and their interaction with Theory and Practice in Mathematics Education». *For the Learning of Mathematics*. Vol. 7, pp. 7-13.
- STENHOUSE, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Editorial Morata.
- TORRALBO, M. (1999). *Análisis Científico y Metodológico de la Investigación Española en Educación Matemática*. Proyecto de Tesis Doctoral, documento interno. Granada: Universidad de Granada
- WITTRICK, M.C. (1986). *Handbook of Research on Teaching. A Project of the American Educational Research Association*. New York: Macmillan.