Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Primeiro Estudo Dirigido

1 Neste primeiro problema vamos analisar em detalhe a solução de uma questão dada na primeira série de exercícios para realçar um engano que muitos alunos cometem quanto utilizam sistemas de coordenadas não-cartesianos. A questão foi demonstrar que se uma função vetorial for função vetorial somente da coordenada posição $r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$, ou seja, $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}(r)$, então

$$\nabla.\vec{f}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d\vec{f}}{dr} \tag{1}$$

Essa demonstração pode ser feita facilmente em coordenadas cartesianas e se supõe que os alunos assim fizeram.

Mas como fazer a demonstração em coordenadas esféricas, o que pareceria mais natural?

A. Solução Errada

Em coordenadas esféricas, a tendência natural dos alunos é escrever

$$\vec{f}(r) = f_r(r)\hat{e}_r + f_\theta(r)\hat{e}_\theta + f_\varphi(r)\hat{e}_\varphi \tag{2}$$

e utilizar a expressão da divergência em coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f_r\right) + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta f_\theta\right) + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \tag{3}$$

Faça esse cálculo e mostre que, como f_θ e f_φ não dependem de θ e φ, o resultado é

$$\nabla.\vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{f_\theta}{r}\frac{cos\theta}{sen\theta} \neq \frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{f}}{dr} \tag{4}$$

A pergunta é, o que está errado com o cálculo feito desta forma?

B. Solução Correta

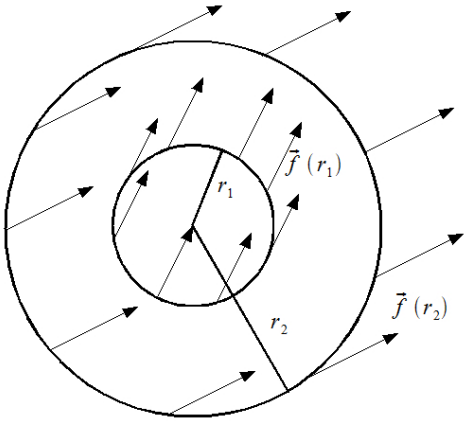
O erro está na interpretação do significado de dizer que uma função vetorial só depende de r. Em coordenadas cartesianas, como os vetores são fixos, de fato isso significa que as componentes cartesianas de $\vec{f}$ só dependem de r,

$$\vec{f}(r) = f_x(r)\hat{e}_x + f_y(r)\hat{e}_y + f_z(r)\hat{e}_z$$

Mas em coordenadas esféricas os versores variam com θ e φ, enquanto que

$$\vec{f}(r) = f_r\hat{e}_r + f_\theta\hat{e}_\theta + f_\varphi\hat{e}_\varphi$$

só pode variar com r! Isso está exemplificado na figura.



Calcule então o divergente utilizando

$$\nabla.\vec{f} = \left[\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{e}_\varphi}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\cdot[f_r\hat{e}_r + f_\theta\hat{e}_\theta + f_\varphi\hat{e}_\varphi]$$

Faça a justificativa para o argumento de que, como $\vec{f}$ só depende de r, todas suas componentes também só podem depender de r; então

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$$

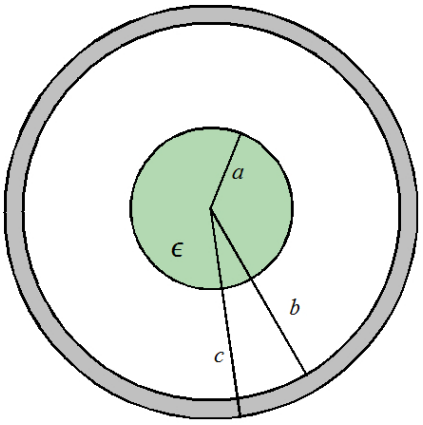
e

$$\nabla\cdot\vec{f} = \left(\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot\vec{f} = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{f}}{dr}$$

2 Uma esfera dielétrica, de raio a e constante dielétrica K, está carregada com uma densidade volumétrica de cargas livres dada por

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

onde ρ_0 é uma constante. Concêntrica com a esfera há uma concha metálica condutora de raio interno $r = b$ e raio externo $r = c$.



A. Obtenha a expressão para a carga total acumulada na esfera interna, em função do raio,

$$q(r) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a}\right)$$

B. Utilize o argumento físico correto para justificar o cálculo de $\vec{D}$ através da integral

$$\oint_S \vec{D}.\hat{n}\, dS = q_{livre}$$

e mostre que

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a}\right)\hat{e}_r; & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{12r^2}\hat{e}_r; & a < r < b \\ 0; & b < r < c \\ \frac{\rho_0 a^3}{12r^2}\hat{e}_r; & b < r \end{cases}$$

C. Mostre que as densidades de carga superficial na superfície interna e externa da concha condutora são

$$\sigma_b = -\frac{\rho_0 a^3}{12b^2}; \quad r = b$$

e

$$\sigma_c = \frac{\rho_0 a^3}{12c^2}; \quad r = c$$

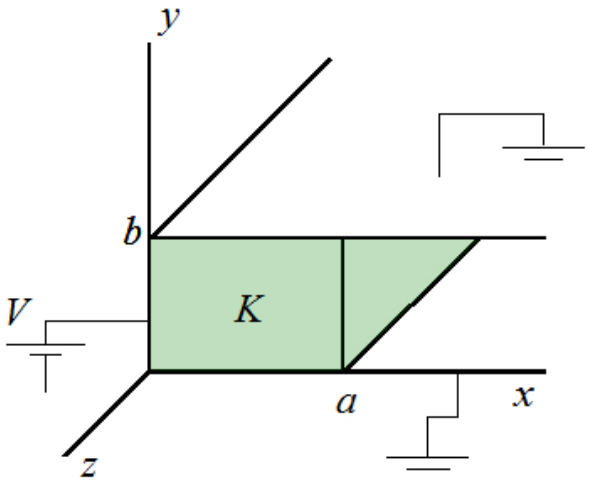
D. Considerando que $\epsilon = constante$, mostre que a densidade volumétrica de cargas de polarização é

$$\rho_p = -\frac{K-1}{K}\rho_0\left(1-\frac{r}{a}\right)$$

E. Mostre que a densidade superficial de cargas de polarização na superfície da esfera dielétrica é

$$\sigma_p = \frac{K-1}{K}\frac{\rho_0 a}{12}$$

3 Neste problema, vamos resolver a Equação de Laplace na presença de um dielétrico. Considere a calha mostrada na figura. A placa condutora mostrada na figura. A placa condutora em $x = 0$ está polarizada com uma tensão V. Na sua frente há uma fatia dielétrica de espessura a. As duas placas condutoras em $y = 0$ e $y = b$ estão aterradas.



A. Mostre que a solução geral da equação de Laplace no espaço entre as plascas é dada por

$$\phi(x,y) = [Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x}][Csen(\alpha x) + Dcos(\alpha x)]$$

B. Aplique as condições de contorno em $y = 0$ e $y = b$ e mostre que

$$D = 0; \qquad \alpha = \frac{m\pi}{b}; \quad m = 1, 2, 3, ...$$

de forma que a solução geral fica

$$\phi(x,y) = \sum_m [A_m e^{-\frac{m\pi x}{b}} + B_m e^{\frac{m\pi x}{b}}] sen\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{5}$$

C. Considere agora a região dentro do dielétrico, que vamos denominar região I. Representando os coeficientes nesta região por A_m^I e B_m^I, mostre que a aplicação da condição de contorno

$$\phi_I(0, y) = V$$

implica em que

$$\begin{aligned} A_m^I + B_m^I &= \tfrac{4V}{m\pi}; \qquad m \text{ ímpar} \\ A_m^I + B_m^I &= 0; \qquad m \text{ par} \end{aligned}$$

D. Denominando a região fora do dielétrico, $x > a$, região II, mostre que, levando em conta a condição de contorno apropriada para $x \to \infty$, que

$$\phi_{II}(x, y) = \sum_m A_m^{II} e^{-\frac{m\pi x}{b}} sen\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

E. Aplique as condições de contorno para $\vec{E}$ e $\vec{D}$ na interface do dielétrico, $x = a$, utilizando $\vec{E} = -\nabla\phi$ e $\vec{D} = \epsilon_0 K\vec{E}$, e obtenha as seguintes relações entre os coeficientes das soluções para o potencial nas duas regiões

$$\begin{aligned} A_m^I e^{-\frac{m\pi a}{b}} + B_m^I e^{\frac{m\pi a}{b}} &= A_m^{II} e^{-\frac{m\pi a}{b}} \\ -A_m^I e^{-\frac{m\pi a}{b}} + B_m^I e^{\frac{m\pi a}{b}} &= -\frac{1}{K} A_m^{II} e^{-\frac{m\pi a}{b}} \end{aligned}$$

F. Resolva estas equações e obtenha as expressões

$$A_m^I = B_m^I = 0; \qquad m \text{ par}$$

$$A_m^I = \frac{K+1}{2K} A_m^{II}; \qquad B_m^I = \frac{K-1}{2K} e^{-\frac{2m\pi a}{b}} A_m^{II}; \qquad m \text{ ímpar}$$

$$A_m^I = \frac{4Ke^{\frac{m\pi a}{b}}}{m\pi\left[Kcosh\left(\frac{m\pi a}{b}\right) + sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\right]} V; \qquad m \text{ ímpar} \tag{6}$$

G. Obtenha a expressão para o vetor polarização $\vec{P}$ dentro do dielétrico.

H. Obtenha as expressões para as cargas superficiais de polarização σ_p nas faces da fatia dielétrica em $x = 0$ e $x = a$.